L'art de bien battre les cartes

Bérénice Delcroix-Oger

IMAG-Université de Montpellier

Congrès Maths-en-jeans, Toulouse, Vendredi 17 avril 2026

Pourquoi ?

Plus on mélange, plus c'est mélangé ?

https://www.youtube.com/shorts/pwW6-YpWUuo

Un premier mélange : le battage parfait (Faro shuffle)

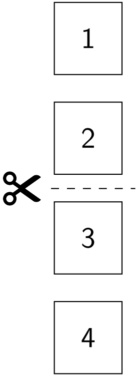
1

2

3

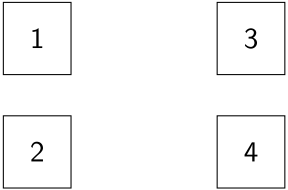
4

Un premier mélange : le battage parfait (Faro shuffle)



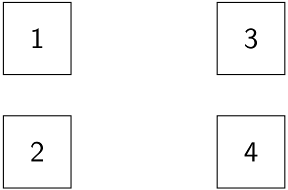
1. On coupe le tas au milieu

Un premier mélange : le battage parfait (Faro shuffle)



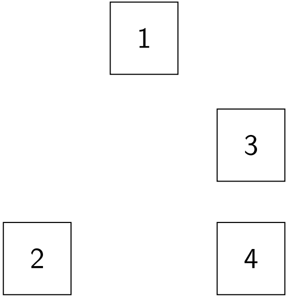
1. On coupe le tas au milieu
2. On obtient deux tas

Un premier mélange : le battage parfait (Faro shuffle)



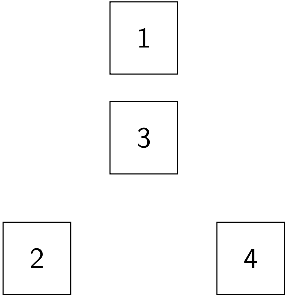
1. On coupe le tas au milieu
2. On obtient deux tas
3. On remélange en alternant une carte de chaque

Un premier mélange : le battage parfait (Faro shuffle)



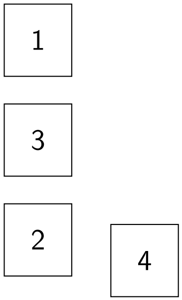
1. On coupe le tas au milieu
2. On obtient deux tas
3. On remélange en alternant une carte de chaque

Un premier mélange : le battage parfait (Faro shuffle)



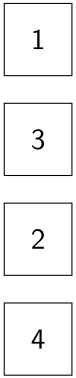
1. On coupe le tas au milieu
2. On obtient deux tas
3. On remélange en alternant une carte de chaque

Un premier mélange : le battage parfait (Faro shuffle)



1. On coupe le tas au milieu
2. On obtient deux tas
3. On remélange en alternant une carte de chaque

Un premier mélange : le battage parfait (Faro shuffle)



1. On coupe le tas au milieu
2. On obtient deux tas
3. On remélange en alternant une carte de chaque

Recommençons

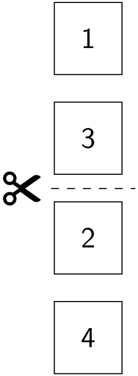
1

3

2

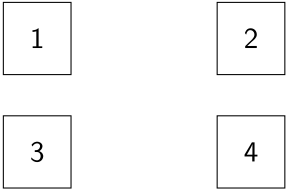
4

Recommençons



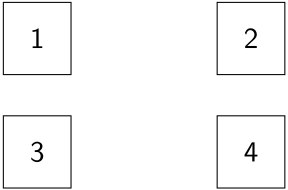
1. On coupe le tas au milieu

Recommençons



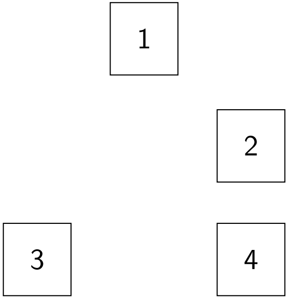
1. On coupe le tas au milieu
2. On obtient deux tas

Recommençons



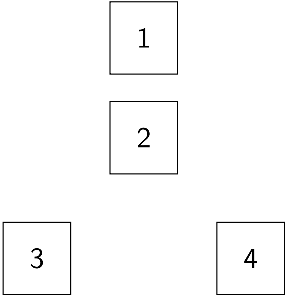
1. On coupe le tas au milieu
2. On obtient deux tas
3. On remélange en alternant une carte de chaque

Recommençons



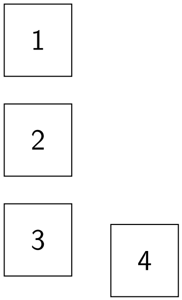
1. On coupe le tas au milieu
2. On obtient deux tas
3. On remélange en alternant une carte de chaque

Recommençons



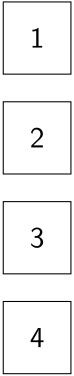
1. On coupe le tas au milieu
2. On obtient deux tas
3. On remélange en alternant une carte de chaque

Recommençons



1. On coupe le tas au milieu
2. On obtient deux tas
3. On remélange en alternant une carte de chaque

Recommençons



1. On coupe le tas au milieu
2. On obtient deux tas
3. On remélange en alternant une carte de chaque

Essayons en changeant celui par lequel on commence (et en accélérant !)

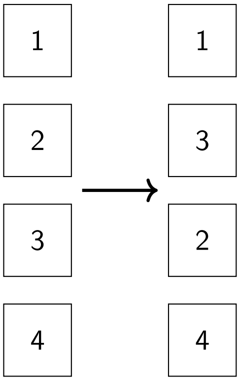
1

2

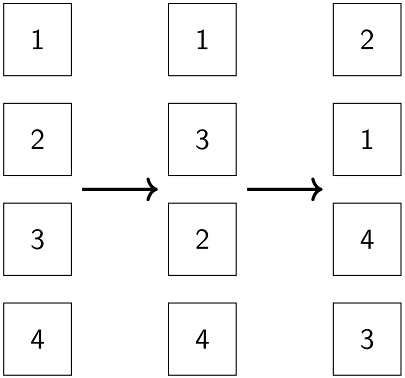
3

4

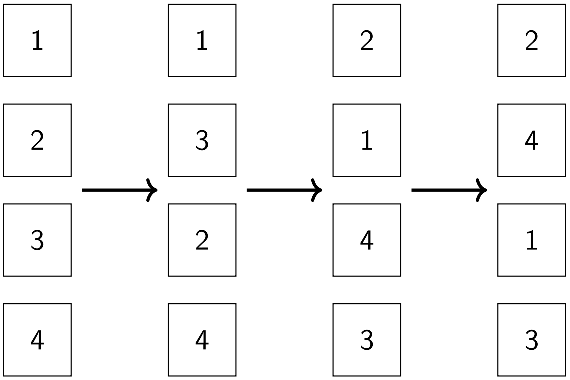
Essayons en changeant celui par lequel on commence (et en accélérant !)



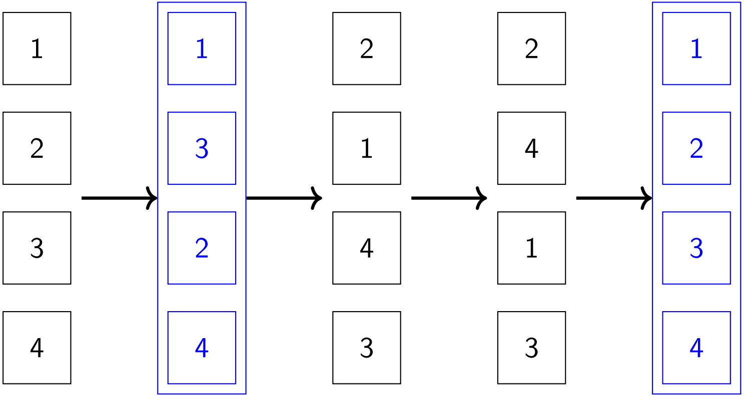
Essayons en changeant celui par lequel on commence (et en accélérant !)



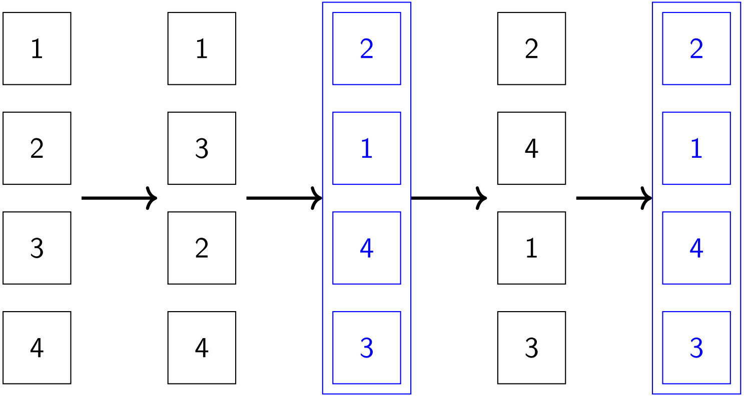
Essayons en changeant celui par lequel on commence (et en accélérant !)



Essayons en changeant celui par lequel on commence (et en accélérant !)



Essayons en changeant celui par lequel on commence (et en accélérant !)

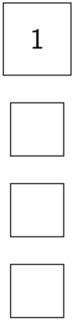


Questions

- Peut-on atteindre tous les mélanges possibles ?
- Comment passer d'un mélange à l'autre ?

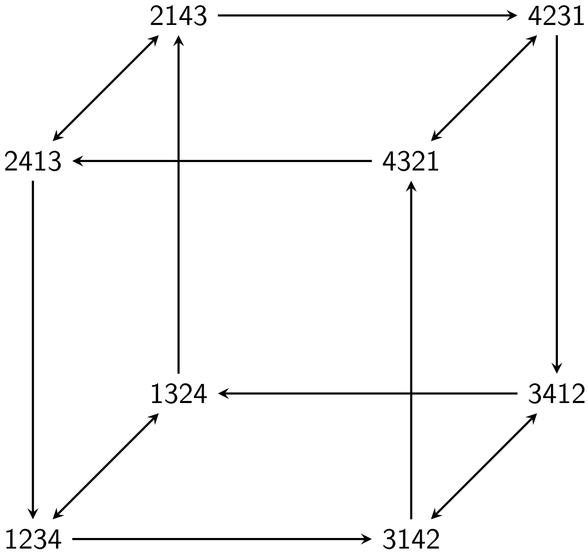
Questions

- Peut-on atteindre tous les mélanges possibles ?
- Comment passer d'un mélange à l'autre ?

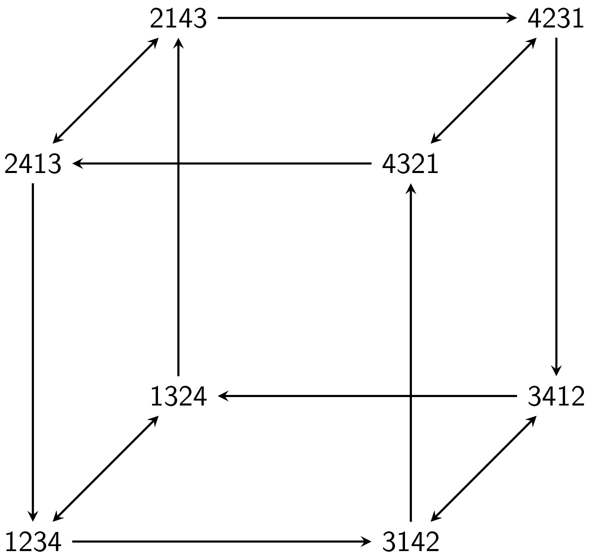


noté 1 2 3 4 dans la suite

Quels mélanges obtient-on ?

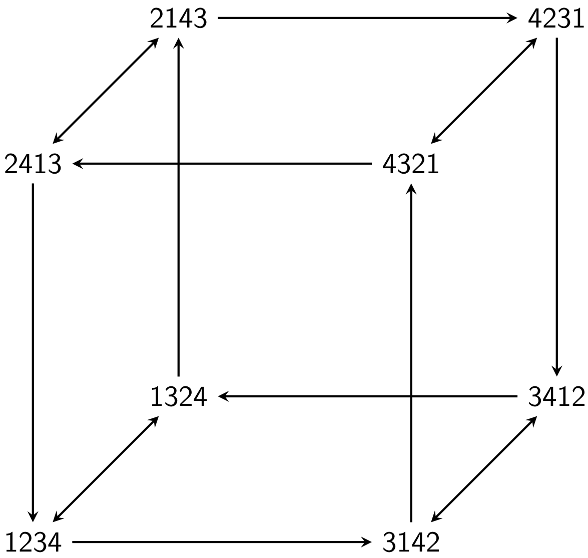


Quels mélanges obtient-on ?



- 8 mélanges différent

Quels mélanges obtient-on ?



- 8 mélanges différent
- Chacun atteignable en au plus 3 battages

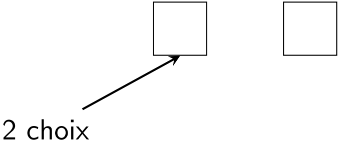
Les mélanges possibles = permutations

Dans un mélange (aussi appelé *permutation*), chaque carte apparaît **une unique fois**.

$\square \qquad \square$

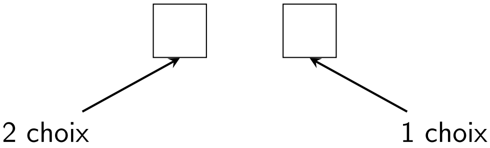
Les mélanges possibles = permutations

Dans un mélange (aussi appelé *permutation*), chaque carte apparaît **une unique fois**.



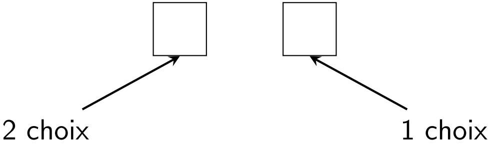
Les mélanges possibles = permutations

Dans un mélange (aussi appelé *permutation*), chaque carte apparaît **une unique fois**.



Les mélanges possibles = permutations

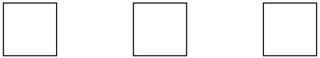
Dans un mélange (aussi appelé *permutation*), chaque carte apparaît **une unique fois**.



$$2! = 2 \times 1 = 2$$

Les mélanges possibles = permutations

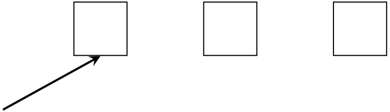
Dans un mélange (aussi appelé *permutation*), chaque carte apparaît **une unique fois**.



$$2! = 2 \times 1 = 2,$$

Les mélanges possibles = permutations

Dans un mélange (aussi appelé *permutation*), chaque carte apparaît **une unique fois**.

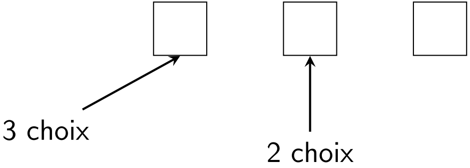


3 choix

$$2! = 2 \times 1 = 2,$$

Les mélanges possibles = permutations

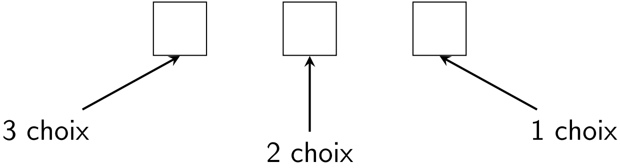
Dans un mélange (aussi appelé *permutation*), chaque carte apparaît **une unique fois**.



$$2! = 2 \times 1 = 2,$$

Les mélanges possibles = permutations

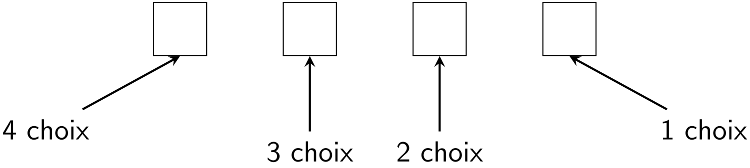
Dans un mélange (aussi appelé *permutation*), chaque carte apparaît **une unique fois**.



$$2! = 2 \times 1 = 2,\ 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Les mélanges possibles = permutations

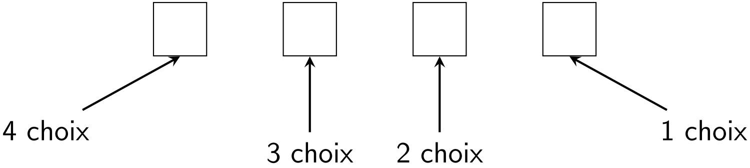
Dans un mélange (aussi appelé *permutation*), chaque carte apparaît **une unique fois**.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800	39 916 800

Les mélanges possibles = permutations

Dans un mélange (aussi appelé *permutation*), chaque carte apparaît **une unique fois**.

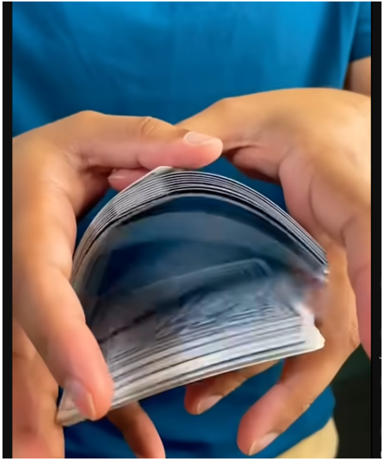


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800	39 916 800

Dans notre exemple, on obtient seulement $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ des mélanges possibles avec le battage parfait.

Un autre exemple de battage : le mélange américain (riffle shuffle)

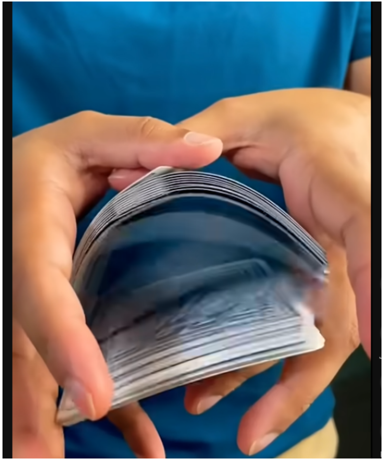
https://www.youtube.com/shorts/UzRbIBKsuqM



- On coupe le tas au milieu
- On obtient deux tas
- On remélange ~~en alternant~~ une carte de chaque tas

Un autre exemple de battage : le mélange américain (riffle shuffle)

https://www.youtube.com/shorts/UzRbIBKsuqM



- On coupe le tas au milieu
- On obtient deux tas
- On remélange ~~en alternant~~ une carte de chaque tas

Sur l'exemple précédent

- Si on mélange le tas "1 2 3 4", on peut obtenir comme tas :
  - 1 2 3 4,
  - 1 3 2 4,
  - 1 3 4 2,
  - 3 1 2 4,
  - 3 1 4 2
  - 3 4 1 2.

Mélange américain et probabilités

- Si on mélange le tas "1 2 3 4", on peut obtenir comme tas :
  - 1 2 3 4,
  - 1 3 2 4,
  - 1 3 4 2,
  - 3 1 2 4,
  - 3 1 4 2
  - 3 4 1 2.

Mélange américain et probabilités

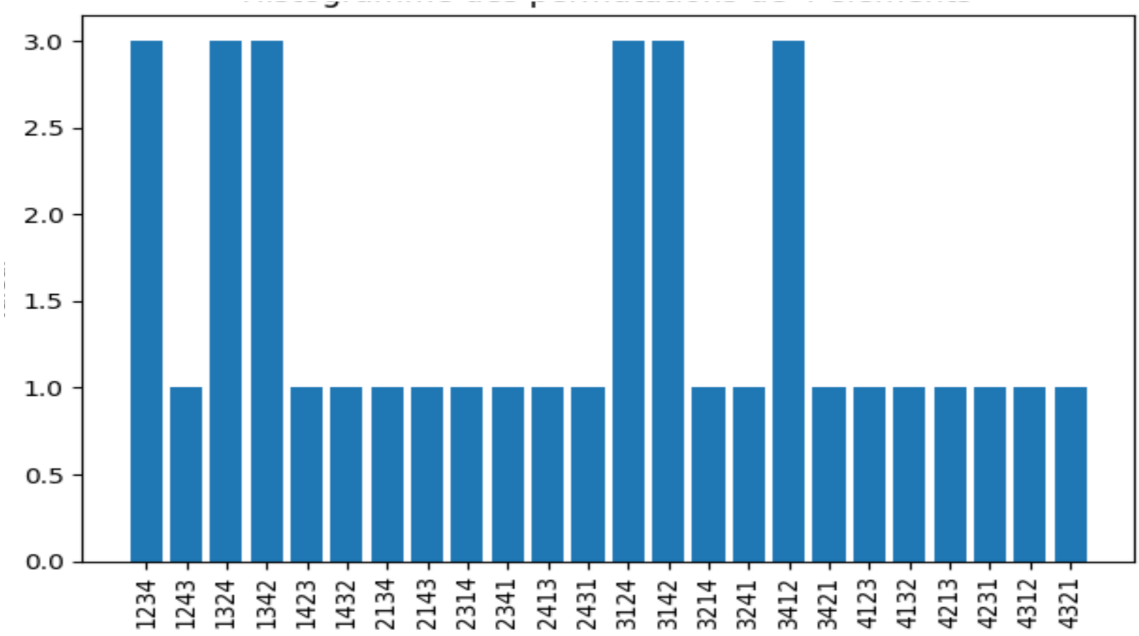
- Si on mélange le tas "1 2 3 4", on peut obtenir comme tas :
  - 1 2 3 4,
  - 1 3 2 4,
  - 1 3 4 2,
  - 3 1 2 4,
  - 3 1 4 2
  - 3 4 1 2.
- Si on mélange deux fois ce tas, on peut obtenir tous les tas possibles !

Mélange américain et probabilités

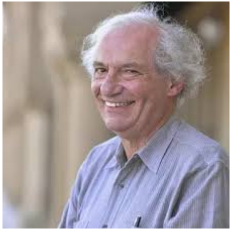
- Si on mélange le tas "1 2 3 4", on peut obtenir comme tas :
  - 1 2 3 4,
  - 1 3 2 4,
  - 1 3 4 2,
  - 3 1 2 4,
  - 3 1 4 2
  - 3 4 1 2.
- Si on mélange deux fois ce tas, on peut obtenir tous les tas possibles !

Mais, attention !

Certains mélanges apparaissent plus souvent.


3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
1234
1243
1324
1342
1423
1432
2134
2143
2314
2341
2413
2431
3124
3142
3214
3241
3412
3421
4123
4132
4213
4231
4312
4321

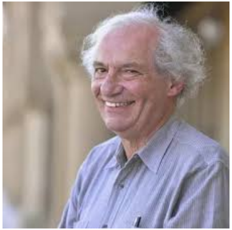
Persi Diaconis



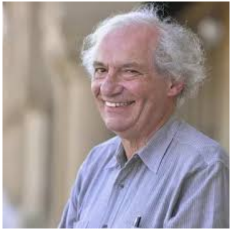
- Magicien, élève de Dai Vernon

Persi Diaconis

- Magicien, élève de Dai Vernon
- À 29 ans : Docteur en mathématiques



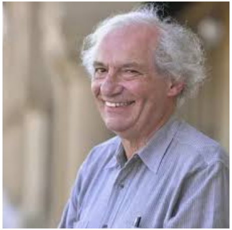
Persi Diaconis



- Magicien, élève de Dai Vernon
- À 29 ans : Docteur en mathématiques
- À 53 ans : Professeur à Stanford (2e au classement de Shanghai 2022)

Persi Diaconis

- Magicien, élève de Dai Vernon
- À 29 ans : Docteur en mathématiques
- À 53 ans : Professeur à Stanford (2e au classement de Shanghai 2022)

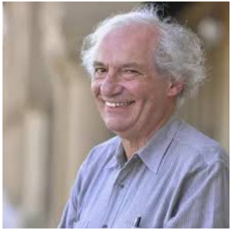


Question :

Combien de fois faire un mélange américain pour obtenir un paquet de 52 cartes bien mélangé ?

Persi Diaconis

- Magicien, élève de Dai Vernon
- À 29 ans : Docteur en mathématiques
- À 53 ans : Professeur à Stanford (2e au classement de Shanghai 2022)



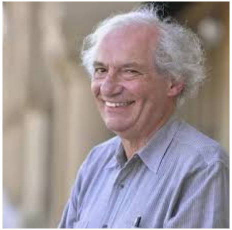
Question :

Combien de fois faire un mélange américain pour obtenir un paquet de 52 cartes bien mélangé ?

- 52! mélanges possibles, soit 8×10^{67} environ

Persi Diaconis

- Magicien, élève de Dai Vernon
- À 29 ans : Docteur en mathématiques
- À 53 ans : Professeur à Stanford (2e au classement de Shanghai 2022)



Question :

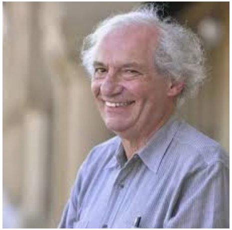
Combien de fois faire un mélange américain pour obtenir un paquet de 52 cartes bien mélangé ?

- 52! mélanges possibles, soit 8×10^{67} environ
-
  - Avec un ordinateur effectuant 10^{11} opérations par secondes,
  - un mélange fait en une opération,

  le calcul ferait 10^{56} secondes, soit 10^{49} années (plus que l'âge de l'univers).

Persi Diaconis

- Magicien, élève de Dai Vernon
- À 29 ans : Docteur en mathématiques
- À 53 ans : Professeur à Stanford (2e au classement de Shanghai 2022)



Question :

Combien de fois faire un mélange américain pour obtenir un paquet de 52 cartes bien mélangé ?

- 52! mélanges possibles, soit 8×10^{67} environ
-
  - Avec un ordinateur effectuant 10^{11} opérations par secondes,
  - un mélange fait en une opération,

  le calcul ferait 10^{56} secondes, soit 10^{49} années (plus que l'âge de l'univers).

Résultat [Bayer-Diaconis, 92]

7 fois !

Et en recherche actuellement ?

- Pour monter des objets en legos, il faut savoir quelles pièces sont nécessaires, et le nombre minimal de pièces nécessaires.

Et en recherche actuellement ?

- Pour monter des objets en legos, il faut savoir quelles pièces sont nécessaires, et le nombre minimal de pièces nécessaires.
- En recherche, c'est pareil !

Et en recherche actuellement ?

- Pour monter des objets en legos, il faut savoir quelles pièces sont nécessaires, et le nombre minimal de pièces nécessaires.
- En recherche, c'est pareil !
- Brique de legos=générateurs

Et en recherche actuellement ?

- Pour monter des objets en legos, il faut savoir quelles pièces sont nécessaires, et le nombre minimal de pièces nécessaires.
- En recherche, c'est pareil !
- Brique de legos=générateurs

$$1 \bullet_g 2 = 21,\ 1 \bullet_d 2 = 12$$

$$3214 =$$

Et en recherche actuellement ?

- Pour monter des objets en legos, il faut savoir quelles pièces sont nécessaires, et le nombre minimal de pièces nécessaires.
- En recherche, c'est pareil !
- Brique de legos=générateurs

$$1 \bullet_g 2 = 21,\ 1 \bullet_d 2 = 12$$

$$3214 = (1 \bullet_g 2)$$

Et en recherche actuellement ?

$$1 \bullet_g 2 = 21,\ 1 \bullet_d 2 = 12$$

$$3214 = ((1 \bullet_g 2) \bullet_g 3)$$

- Pour monter des objets en legos, il faut savoir quelles pièces sont nécessaires, et le nombre minimal de pièces nécessaires.
- En recherche, c'est pareil !
- Brique de legos=générateurs

Et en recherche actuellement ?

- Pour monter des objets en legos, il faut savoir quelles pièces sont nécessaires, et le nombre minimal de pièces nécessaires.
- En recherche, c'est pareil !
- Brique de legos=générateurs

$$1 \bullet_g 2 = 21,\ 1 \bullet_d 2 = 12$$

$$3214 = (((1 \bullet_g 2) \bullet_g 3) \bullet_d 4)$$

Et en recherche actuellement ?

- Pour monter des objets en legos, il faut savoir quelles pièces sont nécessaires, et le nombre minimal de pièces nécessaires.
- En recherche, c'est pareil !
- Brique de legos=générateurs

$$1 \bullet_g 2 = 21,\ 1 \bullet_d 2 = 12$$

$$3214 = (((1 \bullet_g 2) \bullet_g 3) \bullet_d 4)$$

Questions

- Obtient-on tous les mélanges ?
- Y a-t-il des répétitions ?
  $3214 = (1 \bullet_g (2 \bullet_g 3)) \bullet_d 4)$

Et en recherche actuellement ?

- Pour monter des objets en legos, il faut savoir quelles pièces sont nécessaires, et le nombre minimal de pièces nécessaires.
- En recherche, c'est pareil !
- Brique de legos=générateurs

$$1 \bullet_g 2 = 21,\ 1 \bullet_d 2 = 12$$

$$3214 = (((1 \bullet_g 2) \bullet_g 3) \bullet_d 4)$$

Questions

- Obtient-on tous les mélanges ?
- Y a-t-il des répétitions ?
  $3214 = (1 \bullet_g (2 \bullet_g 3)) \bullet_d 4)$

Dans les faits

Application à l'informatique et au stockage de données (fonctions de parking)

Et en recherche actuellement ?

- Pour monter des objets en legos, il faut savoir quelles pièces sont nécessaires, et le nombre minimal de pièces nécessaires.
- En recherche, c'est pareil !
- Brique de legos=générateurs

$$1 \bullet_g 2 = 21,\ 1 \bullet_d 2 = 12$$

$$3214 = (((1 \bullet_g 2) \bullet_g 3) \bullet_d 4)$$

Questions

- Obtient-on tous les mélanges ?
- Y a-t-il des répétitions ? $3214 = (1 \bullet_g (2 \bullet_g 3)) \bullet_d 4)$

Dans les faits

Application à l'informatique et au stockage de données (fonctions de parking)

Merci de votre attention !

Références

- P. Diaconis, R. Graham et W. M. Kantor, The Mathematics of Perfect Shuffle , Advances in Applied Mathematics, 4 (2) (1983) p. 175-196.
- P. Diaconis, Trailing the Dovetail Shuffle to its Lair, Annals of Applied Probability, (2) (1992), p. 294-313.
- P. Diaconis et R. Graham, The Solutions to Emsley's Problem, Math Horizons, 14 (fév. 2007), p. 22-27.
- P. Diaconis, J. Fulman, The mathematics of shuffling cards
- " Magical Mathematics : The Mathematical Ideas That Animate Great Magic Tricks " de P. Diaconis et R. Graham

Pour aller plus loin

- A. Lachal, Mélanges parfaits de cartes (I). In-shuffles et out-shuffles, Quadrature 76 (2010), 13-25. `https://hal.science/hal-00864428/document`
- A. Lachal, Mélanges parfaits de cartes (II). Mélanges de Monge, Quadrature 77 (2010), 23-29. `https://hal.science/hal-00864433/document`
- A. Lachal et P. Schott, Cartomagie : principes de Gilbreath (I). Dénombrement de mélanges américains, Quadrature 85 (2012), 24-35. `https://hal.science/hal-00864402/document`
- A. Lachal et P. Schott, Cartomagie : principes de Gilbreath (II). Quelques applications, Quadrature 86 (2012), 31-37. `https://hal.science/hal-00864409/document`
- A. Lachal et P. Schott, Cartomagie : principes de Gilbreath (III). Diverses démonstrations, Quadrature 87 (2013), 30-37. `https://hal.science/hal-0864412/document`
- `https://images.math.cnrs.fr/freeze/Un-peu-de-mathemagie-avec-Flavius-Josephe.html`
- `https://images.math.cnrs.fr/freeze/Melanges-de-cartes-et-mathematiques.html`

Crédits des images

- Photo Holdem : Par Todd Klassy - https://www.flickr.com/photos/latitudes/66492870/in/set-1442169/, CC BY 2.5, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1482450
- Ciseaux : Par Tomas Knop https://www.flaticon.com/fr/auteurs/tomas-knop
- Magicienne : issu de l'article du parisien https://www.leparisien.fr/culture-loisirs/un-metier-dune-misogynie-infinie-pourquoi-y-a-t-il-si-peu-de-magiciennes- php