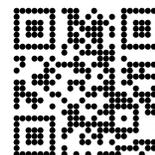


Symbiose entre posets, espèces, opérades et polytopes

Bérénice Delcroix-Oger



Habilitation à diriger des recherches
Lundi 12 Mai 2025

Survol de mes recherches

Plan

- 1 Survol de mes recherches
- 2 Posets et polytopes : La diagonale du permutoèdre
- 3 Espèces, posets et opérades : les (espèces en posets) opéradiques

Posets, Opérades, Algèbres
Étude de structures algébriques

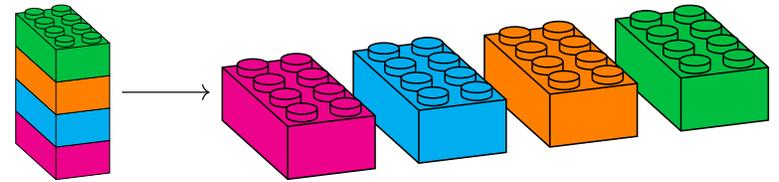
Combinatoire algébrique

sur des structures discrètes

Partitions, Arbres, Hyperarbres

But

Se servir de la structure algébrique pour mieux comprendre les objets combinatoires.



Poset = ensemble partiellement ordonné

Poset=ensemble partiellement ordonné

1



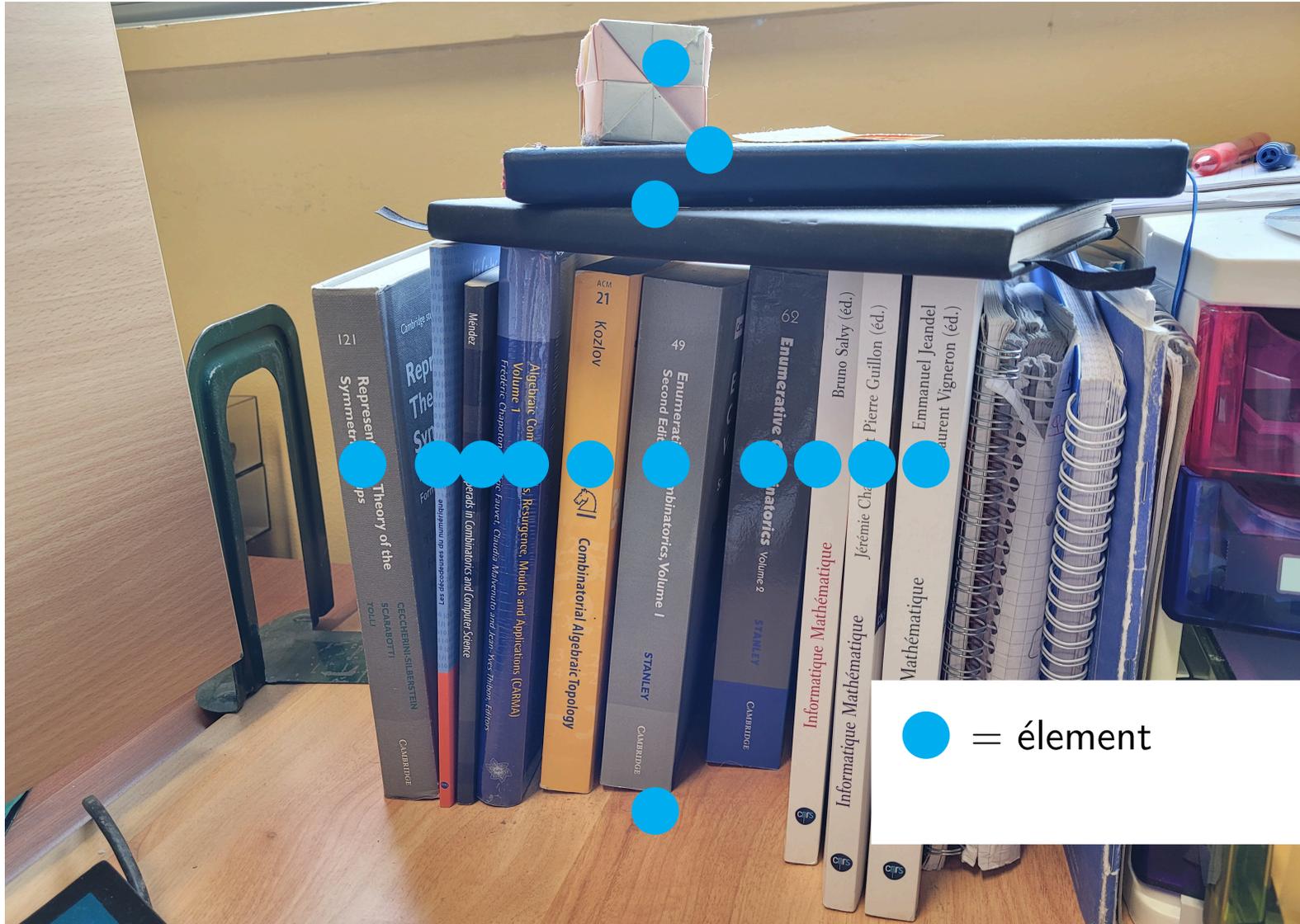
Poset=ensemble partiellement ordonné



Premier exemple de poset : "Qui couvre qui?"



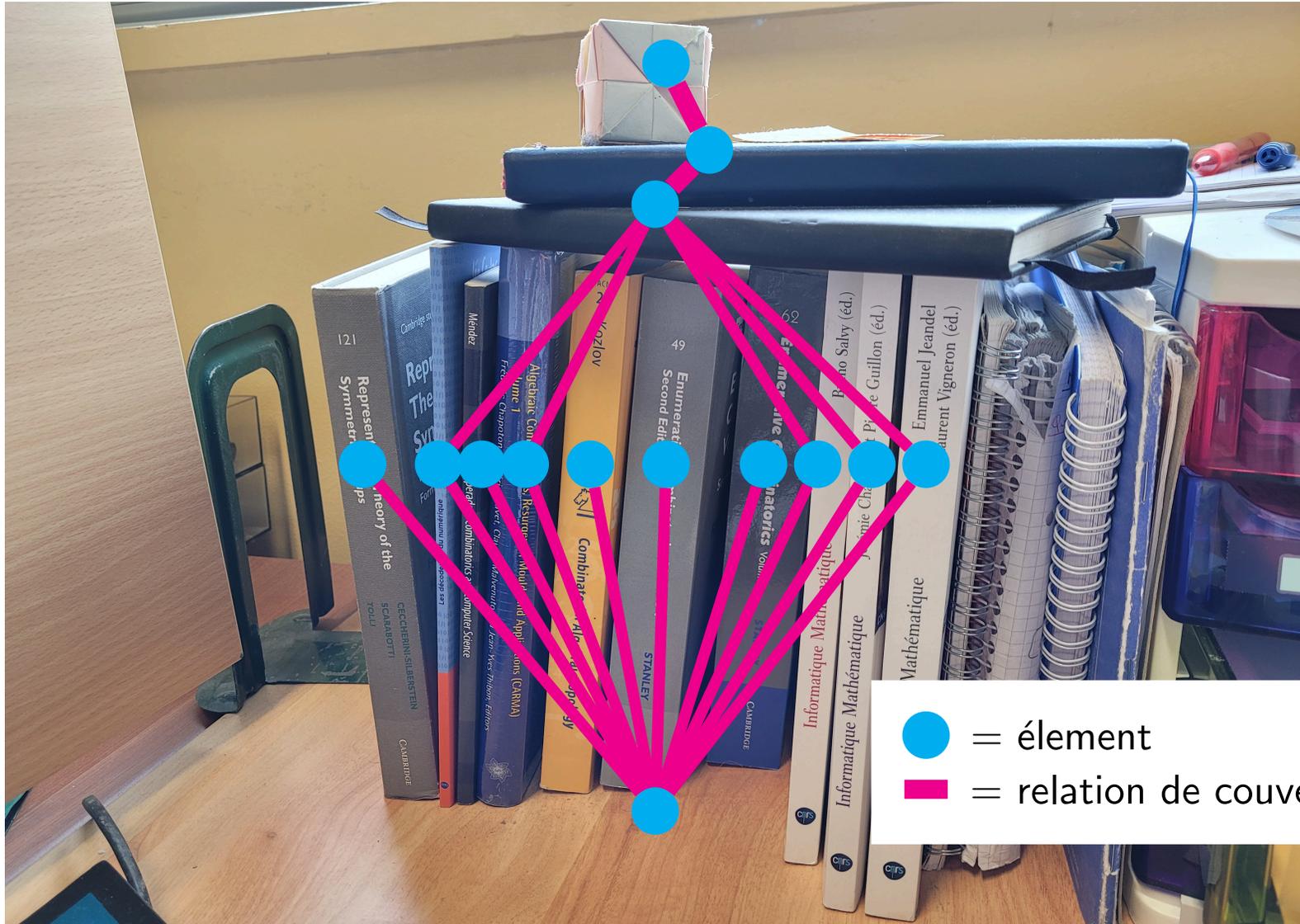
Premier exemple de poset : "Qui couvre qui?"



Premier exemple de poset : "Qui couvre qui?"



Premier exemple de poset : "Qui couvre qui?"



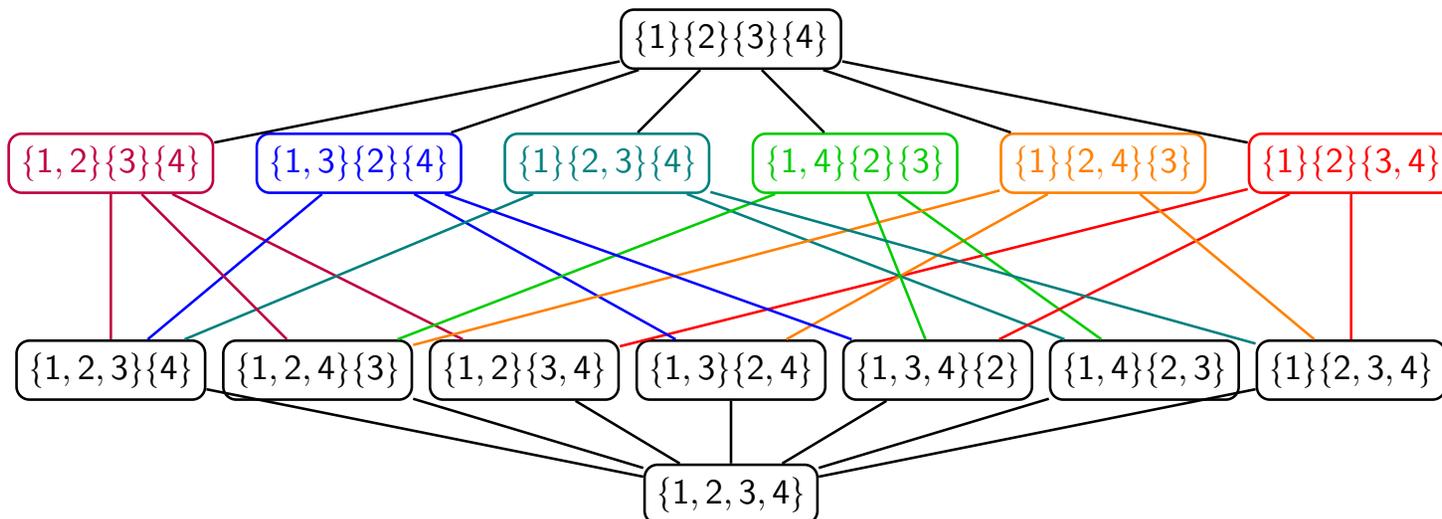
La star d'aujourd'hui : le poset des partitions d'un ensemble fini V ① ● ●

Partitions d'un ensemble V :

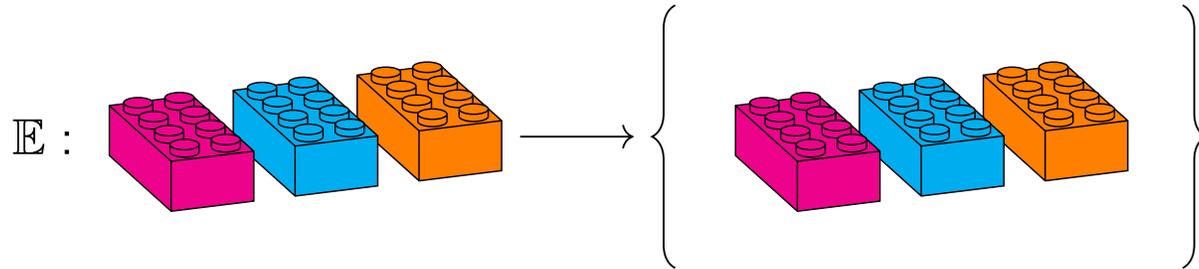
$$\{V_1, \dots, V_k\} \models V \Leftrightarrow V = \bigsqcup_{i=1}^k V_i, V_i \cap V_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j$$

Ordre partiel sur les partitions d'un ensemble V :

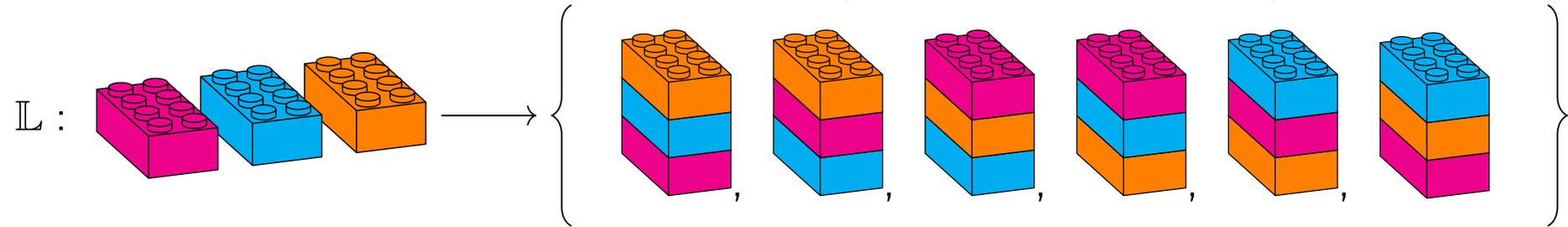
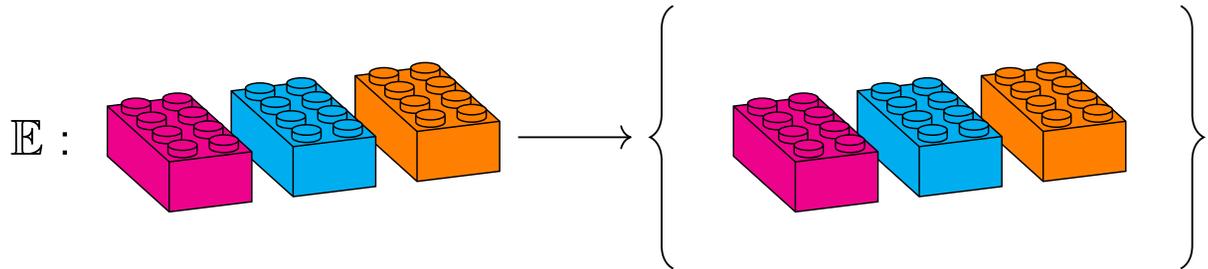
$$\{V_1, \dots, V_k\} \leq \{V'_1, \dots, V'_p\} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, p\}, \exists j \in \{1, k\} \text{ t.q. } V'_i \subseteq V_j$$



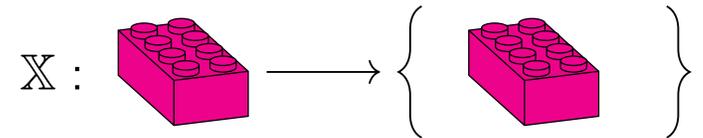
Espèce = constructeur à partir d'un ensemble d'objets



Espèce = constructeur à partir d'un ensemble d'objets

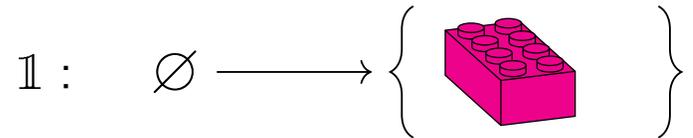


L'espèce "Le seul lego restant!" :



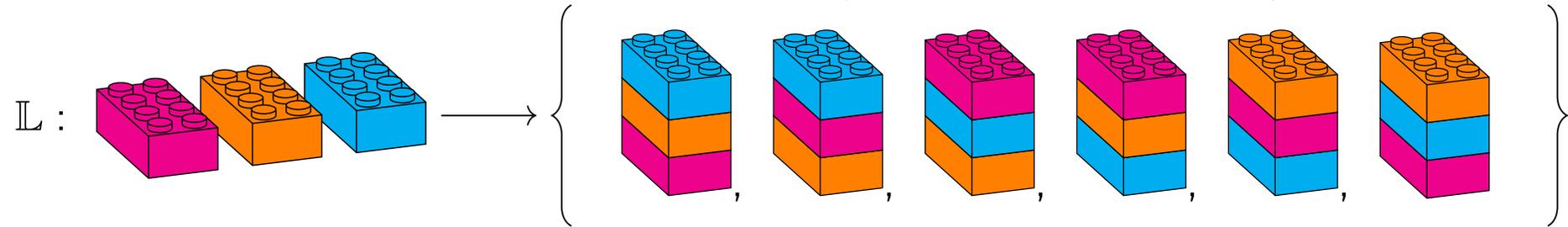
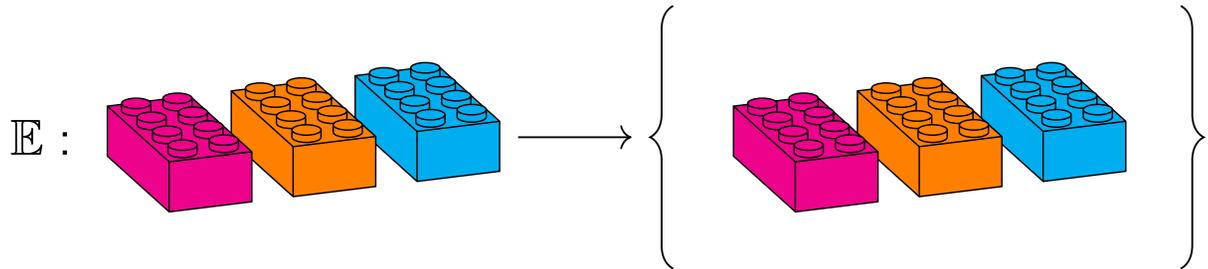
$\mathbb{X}(V) = \emptyset$ sinon

L'espèce "Rachetons des legos!" :

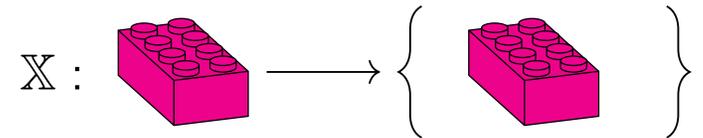


$\mathbb{1}(V) = \emptyset$ sinon

Espèce = constructeur à partir d'un ensemble d'objets

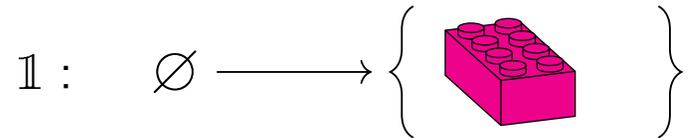


L'espèce "Le seul lego restant!" :



$\mathbb{X}(V) = \emptyset$ sinon

L'espèce "Rachetons des legos!" :



$\mathbb{1}(V) = \emptyset$ sinon

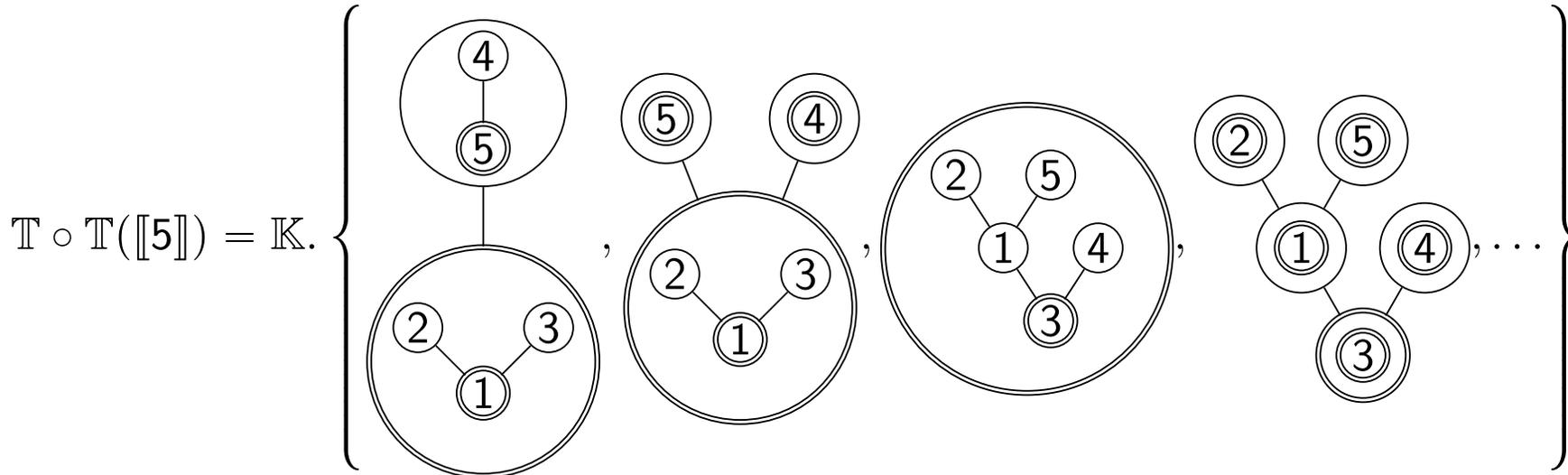
Substitution

La **substitution** de deux espèces \mathbb{F} et \mathbb{G} , avec $\mathbb{F}(\emptyset) = \{0\}$ est définie comme :

$$(\mathbb{F} \circ \mathbb{G})(E) = \bigoplus_{\pi \in \Pi(E)} \mathbb{F}(\pi) \otimes \bigotimes_{p \in \pi} \mathbb{G}(p)$$

Par exemple, pour $\pi = \{A, B, C\}$ avec $A = \{1, 3\}$, $B = \{2\}$ et $C = \{4\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{L} \circ \mathbb{L} &\supseteq (B, A, C) \otimes ((2) \otimes (3, 1) \otimes (4)) \\ &= ((2), (3, 1), (4)) \end{aligned}$$

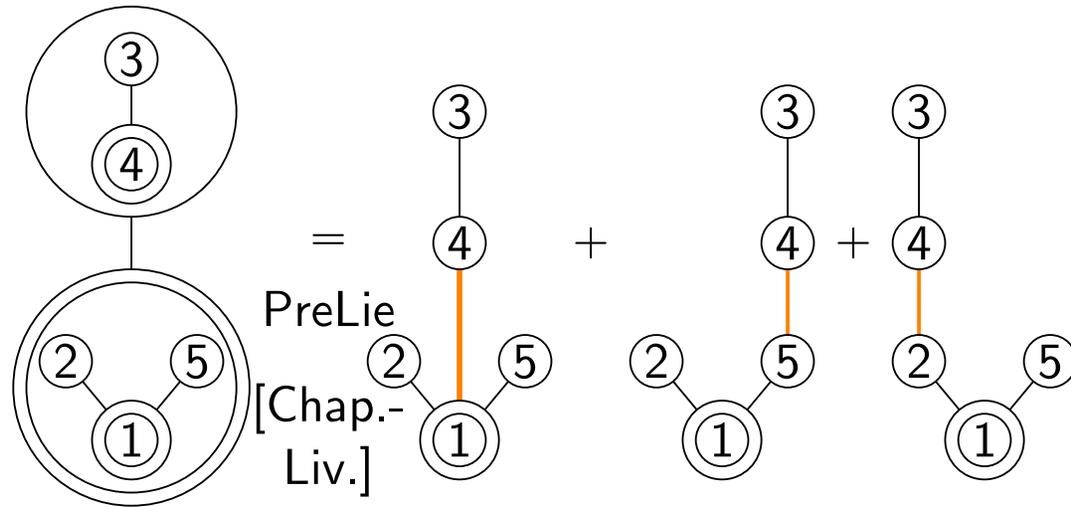


Opérate

Une **opérate** (resp. **opérate ensembliste**) (symétrique) \mathcal{O} est

- une **espèce vectorielle** (resp. **espèce ensembliste**) \mathcal{O} avec une **composition associative**

$$\gamma : \mathcal{O} \circ \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$$



- et une unité $u : \mathbb{X} \rightarrow \mathcal{O}$, où \mathbb{X} est l'espèce singleton ($\mathbb{X}(S) = \delta_{|S|=1} \mathbb{C}$).
- À chaque type d'algèbre est associée une **opérate**.

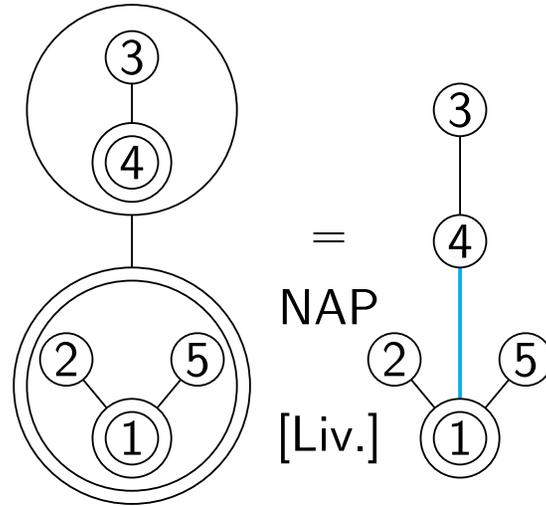
Les opérades considérées sont connexes : $\mathcal{P}(\emptyset) = \emptyset$ et $\mathcal{P}(\{*\}) = \{*\}$

Opérate

Une **opérate** (resp. **opérate ensembliste**) (symétrique) \mathcal{O} est

- une **espèce vectorielle** (resp. **espèce ensembliste**) \mathcal{O} avec une **composition associative**

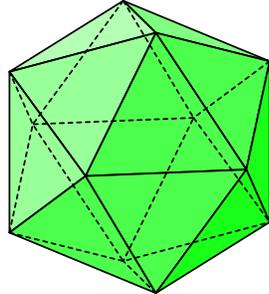
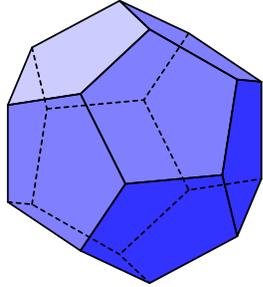
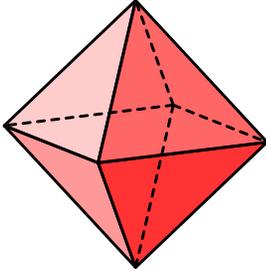
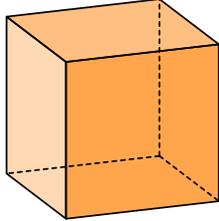
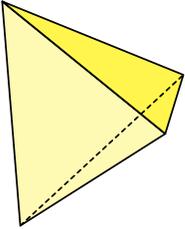
$$\gamma : \mathcal{O} \circ \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$$



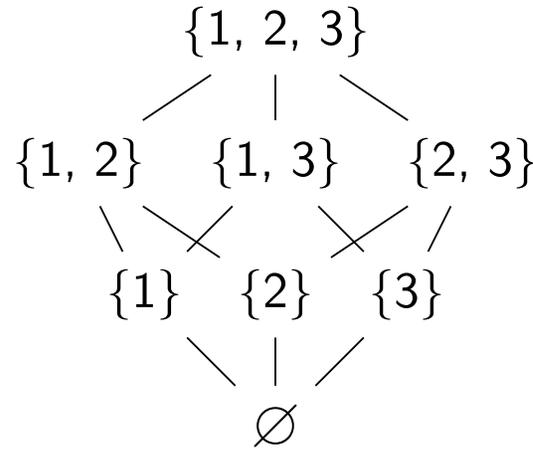
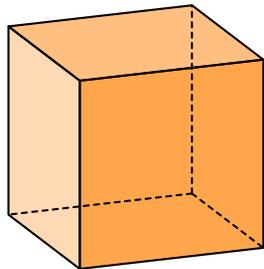
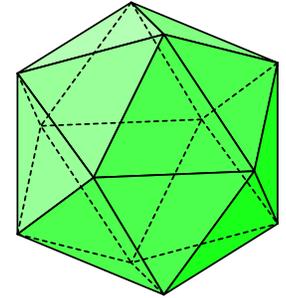
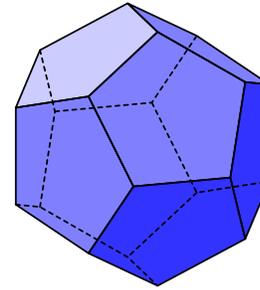
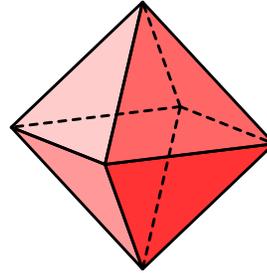
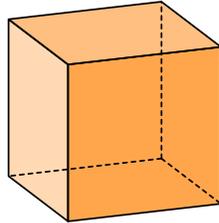
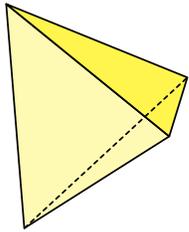
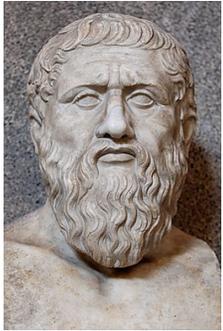
- et une unité $u : \mathbb{X} \rightarrow \mathcal{O}$, où \mathbb{X} est l'espèce singleton ($\mathbb{X}(S) = \delta_{|S|=1} \mathbb{C}$).
- À chaque type d'algèbre est associée une **opérate**.

Les opérades considérées sont connexes : $\mathcal{P}(\emptyset) = \emptyset$ and $\mathcal{P}(\{*\}) = \{*\}$

Polytopes : Premier exemple, les solides de Platon



Polytopes : Premier exemple, les solides de Platon



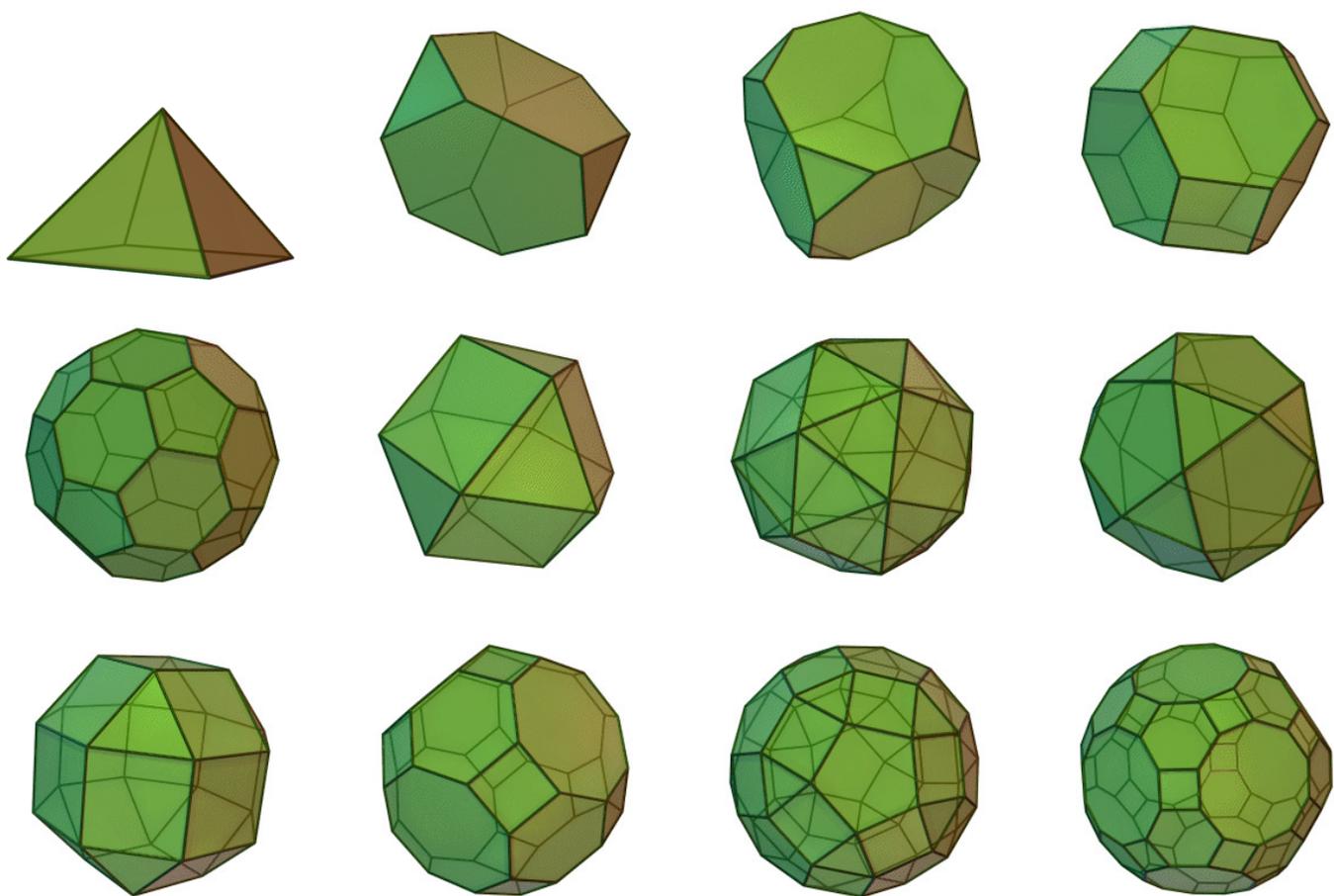
Question pour occuper le public :

Peut-on trouver un poset dont le diagramme de Hasse est le tétraèdre ?

Définition

Les **solides d'Archimède** sont les solides (prismes exclus) composés de deux ou trois sortes de faces tels que le voisinage de chaque sommet soit identique. Il en existe 13.

(Question : qui est l'intrus ?)



Travaux présentés dans le manuscrit (Espèce Poset Opérade Polytope)

- [Del17] BDO. "Semi-pointed partition posets and species" *J. Algebraic Combin.* (2017) ● ● ○ ○
- [BD20] E. Burgunder et BDO. "Structure theorems for dendriform and tridendriform algebras". *CARMA, IRMA Lect. Math. Theor. Phys.* EMS Publ. House (2020) ● ○ ● ○
- [BD19] E. Burgunder et BDO. "Confluence laws and Hopf-Borel type theorem for operads" (2019, en attente de modifications) ○ ○ ● ○
- [BDH21] J. Bellier-Millès, BDO et E. Hoffbeck. "Operads with compatible CL-shellable partition posets admit a PBW basis". *Trans. Amer. Math. Soc.* 374.11 (2021) ○ ● ● ○
- [DJR22] BDO, M. Josuat-Vergès et L. Randazzo. "Some properties of the parking function poset". *Electron. J. Comb.*(2022) ● ● ○ ○
- [CDO25a] P.-L. Curien, BDO et J. Obradović. "Tridendriform algebras on hypergraph polytopes". *Algebraic Combinatorics* (2025) ○ ○ ○ ●
- [Del+23] BDO, G. Laplante-Anfossi, V. Pilaud et K. Stoeckl. "Cellular diagonals of permutahedra". (2023, soumis) ○ ● ● ●
- [DD25a] BDO et C. Dupont. "Lie-operads and operadic modules from poset cohomology". (2025, sur ArXiv). ● ● ● ○
- [CDO25+] P.-L. Curien, BDO et J. Obradović."Restriction, order and shuffles in nestohedra". (2025+, en préparation) ○ ● ○ ●
- [DD25+] BDO et C. Dupont. "Hypertrees, postLie and pre-Lie operads". (2025+, en préparation) ● ● ● ○

Travaux présentés dans le manuscrit (Espèce Poset Opérade Polytope)

- | | | |
|----------|--|---------|
| [Del17] | BDO. "Semi-pointed partition posets and species" <i>J. Algebraic Combin.</i> (2017) | ● ● ○ ○ |
| [BD20] | E. Burgunder et BDO. "Structure theorems for dendriform and tridendriform algebras". <i>CARMA, IRMA Lect. Math. Theor. Phys.</i> EMS Publ. House (2020) | ● ○ ● ○ |
| [BD19] | E. Burgunder et BDO. "Confluence laws and Hopf-Borel type theorem for operads" (2019, en attente de modifications) | ○ ○ ● ○ |
| [BDH21] | J. Bellier-Millès, BDO et E. Hoffbeck. "Operads with compatible CL-shellable partition posets admit a PBW basis". <i>Trans. Amer. Math. Soc.</i> 374.11 (2021) | ○ ● ● ○ |
| [DJR22] | BDO, M. Josuat-Vergès et L. Randazzo. "Some properties of the parking function poset". <i>Electron. J. Comb.</i> (2022) | ● ● ○ ○ |
| [CDO25a] | P.-L. Curien, BDO et J. Obradović. "Tridendriform algebras on hypergraph polytopes". <i>Algebraic Combinatorics</i> (2025) | ○ ○ ○ ● |
| [Del+23] | BDO, G. Laplante-Anfossi, V. Pilaud et K. Stoeckl. "Cellular diagonals of permutahedra". (2023, soumis) | ○ ● ● ● |
| [DD25a] | BDO et C. Dupont. "Lie-operads and operadic modules from poset cohomology". (2025, sur ArXiv). | ● ● ● ○ |
| [CDO25+] | P.-L. Curien, BDO et J. Obradović."Restriction, order and shuffles in nestohedra". (2025+, en préparation) | ○ ● ○ ● |
| [DD25+] | BDO et C. Dupont. "Hypertrees, postLie and pre-Lie operads". (2025+, en préparation) | ● ● ● ○ |

Posets et polytopes : La diagonale du permutoèdre

Plan

- 1 Survol de mes recherches
- 2 Posets et polytopes : La diagonale du permutoèdre
- 3 Espèces, posets et opérades : les (espèces en posets) opéradiques

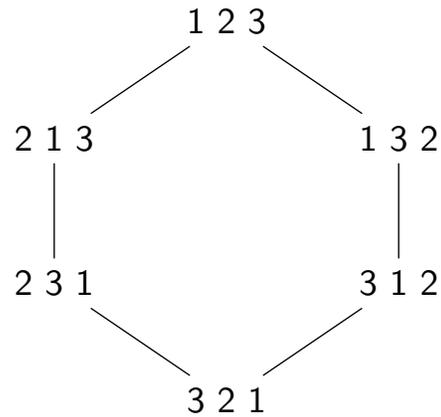
L'ordre de Bruhat faible [Verma 1968]

1234

Relation de couverture :

$$\dots ab \dots \triangleleft \dots ba \dots$$

avec $a < b$

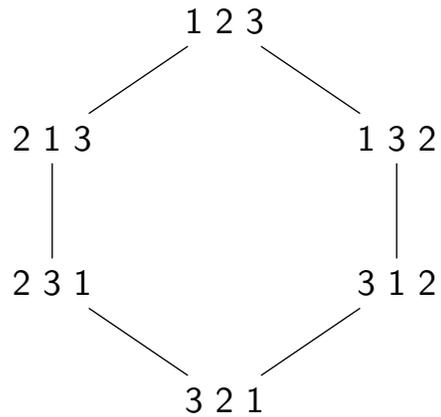
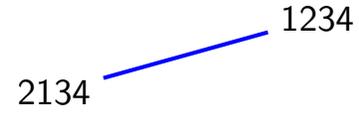


L'ordre de Bruhat faible [Verma 1968]

Relation de couverture :

$$\dots ab \dots \triangleleft \dots ba \dots$$

avec $a < b$

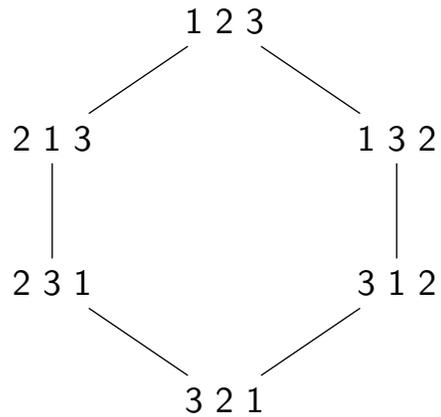
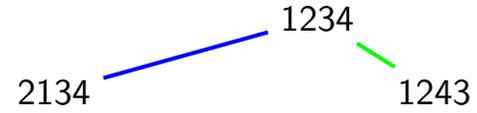


L'ordre de Bruhat faible [Verma 1968]

Relation de couverture :

$$\dots ab \dots \triangleleft \dots ba \dots$$

avec $a < b$

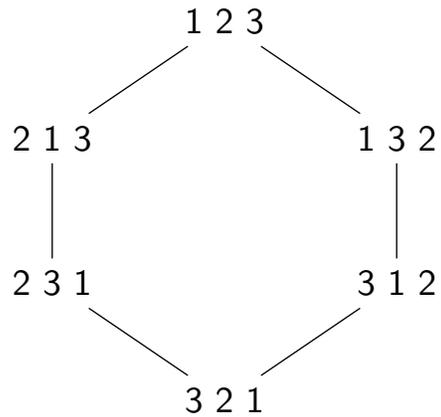
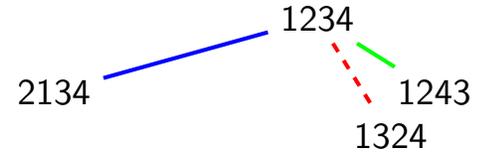


L'ordre de Bruhat faible [Verma 1968]

Relation de couverture :

$$\dots ab \dots \triangleleft \dots ba \dots$$

avec $a < b$

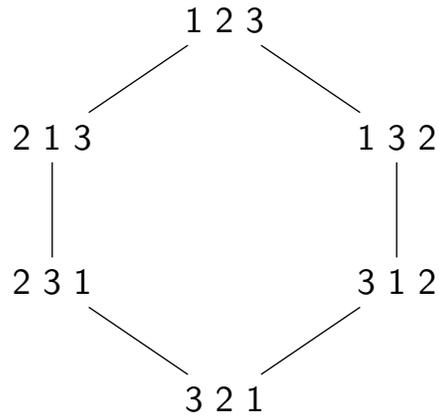
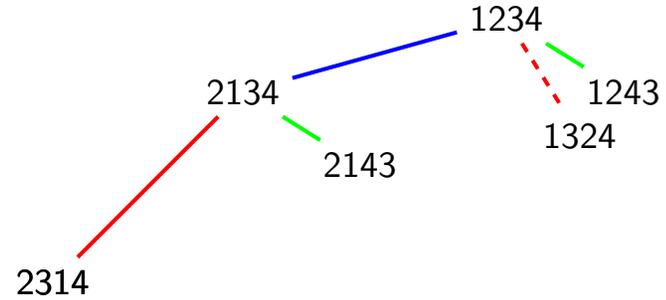


L'ordre de Bruhat faible [Verma 1968]

Relation de couverture :

$$\dots ab \dots \triangleleft \dots ba \dots$$

avec $a < b$

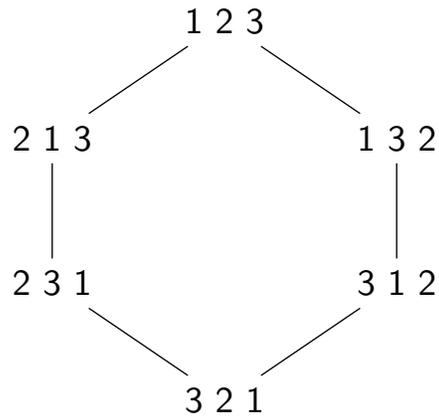
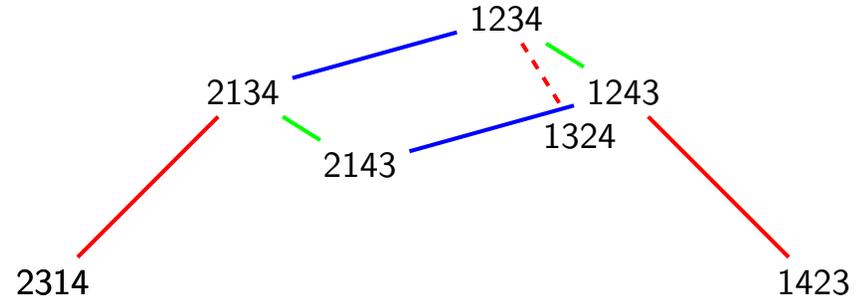


L'ordre de Bruhat faible [Verma 1968]

Relation de couverture :

$$\dots ab \dots \triangleleft \dots ba \dots$$

avec $a < b$

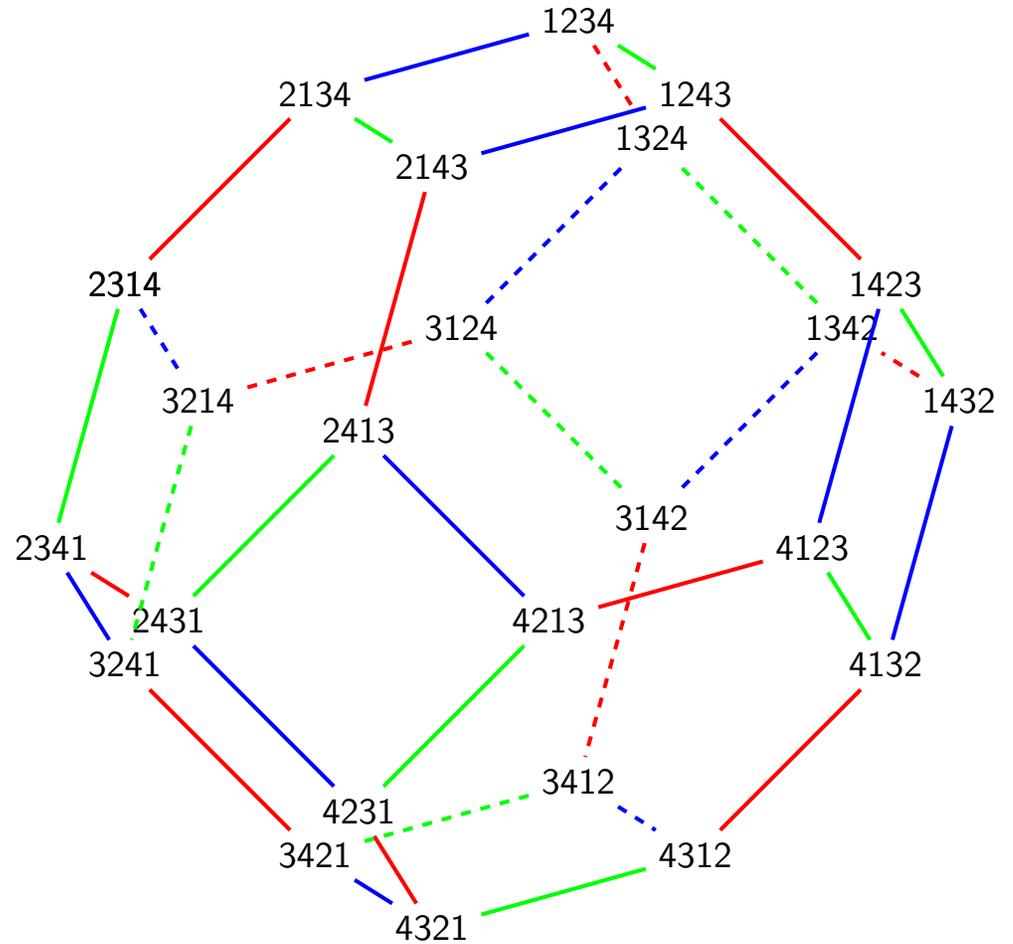
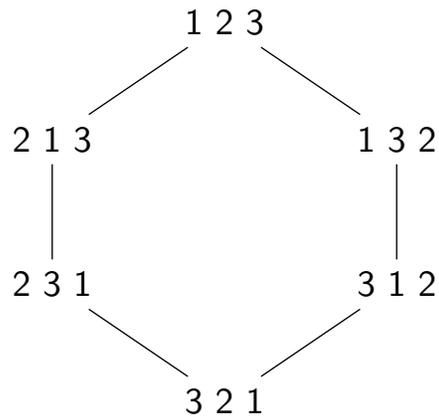


L'ordre de Bruhat faible [Verma 1968]

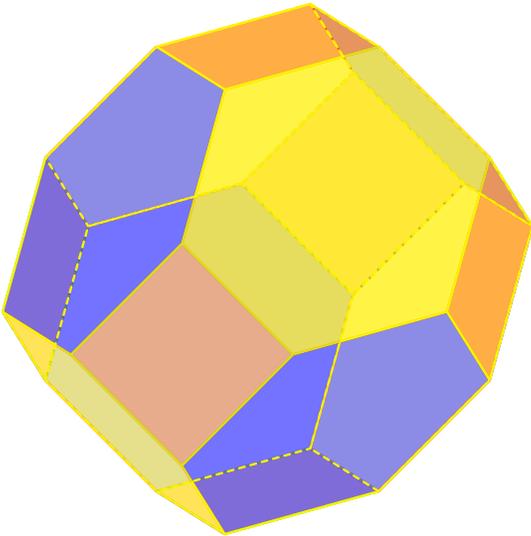
Relation de couverture :

$$\dots ab \dots \triangleleft \dots ba \dots$$

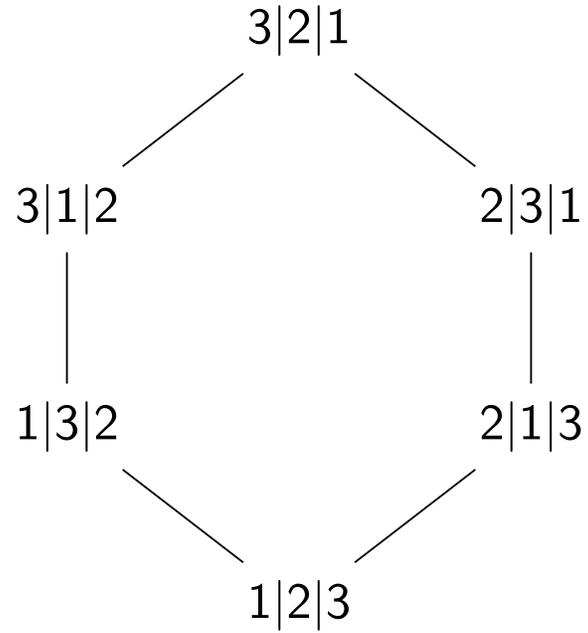
avec $a < b$



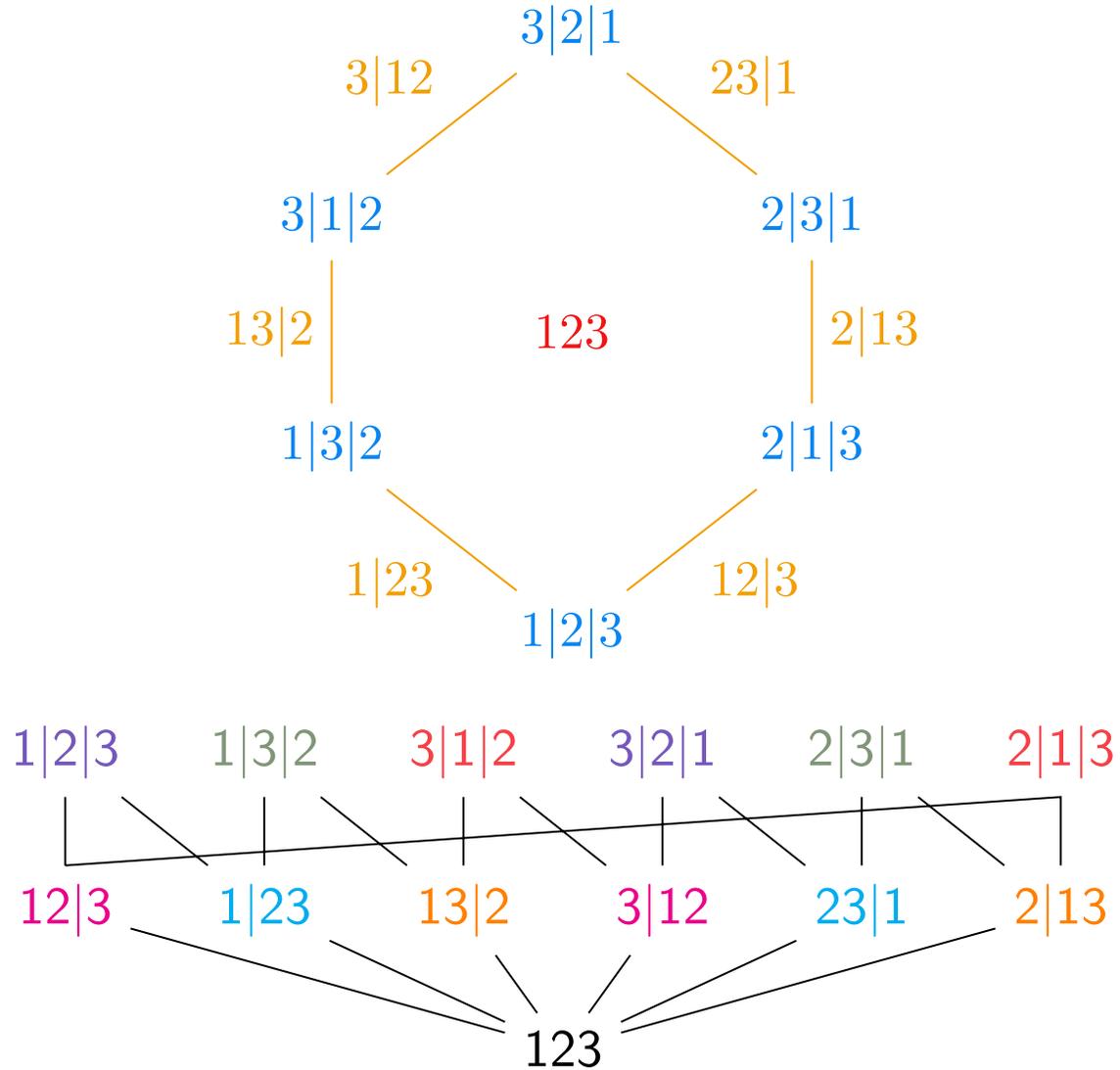
Le polytope associé : le permutoèdre [Schoute 1911]



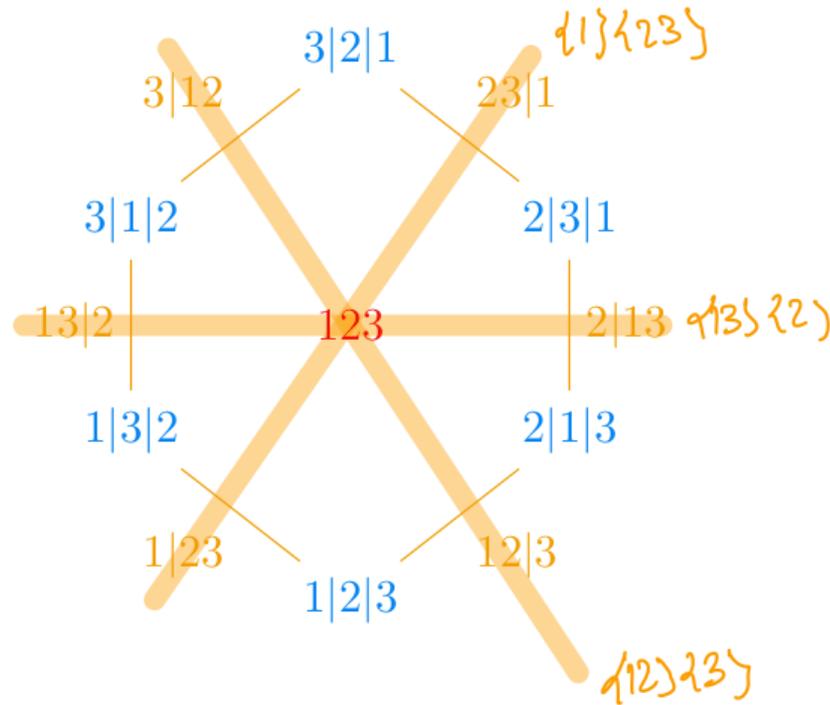
Étiquetage des faces du permutoèdre



Étiquetage des faces du permutoèdre



Étiquetage des faces du permutoèdre



À retenir

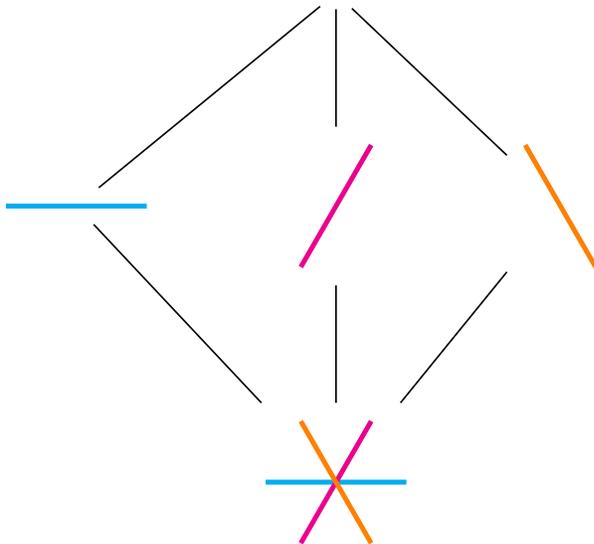
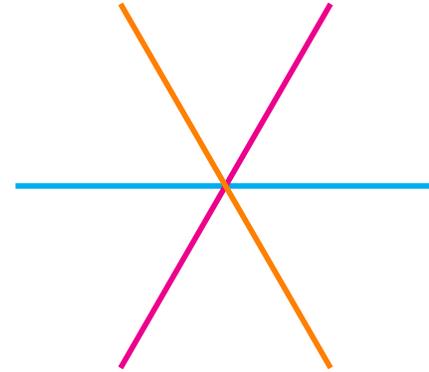
Nombre de faces de dimension $k =$ nombre de régions de dimension $n - k$

Arrangement de tresses

$$H_{i,j}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = x_j\}$$

$$\mathcal{B}_n = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} H_{i,j}^n$$

est appelé l'arrangement de tresses.



Treillis d'intersection

Intersection = intersection de certains hyperplans de \mathcal{B}_n

Ordre : contenance

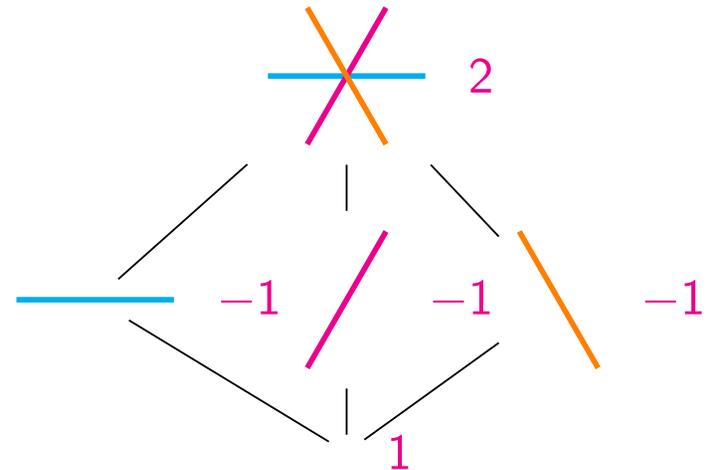
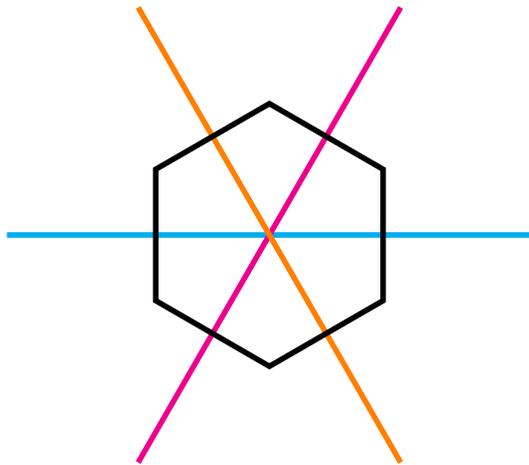
Théorème de Zaslavsky

Soit \mathcal{A} un arrangement d'hyperplan et \mathcal{I} son poset d'intersection.

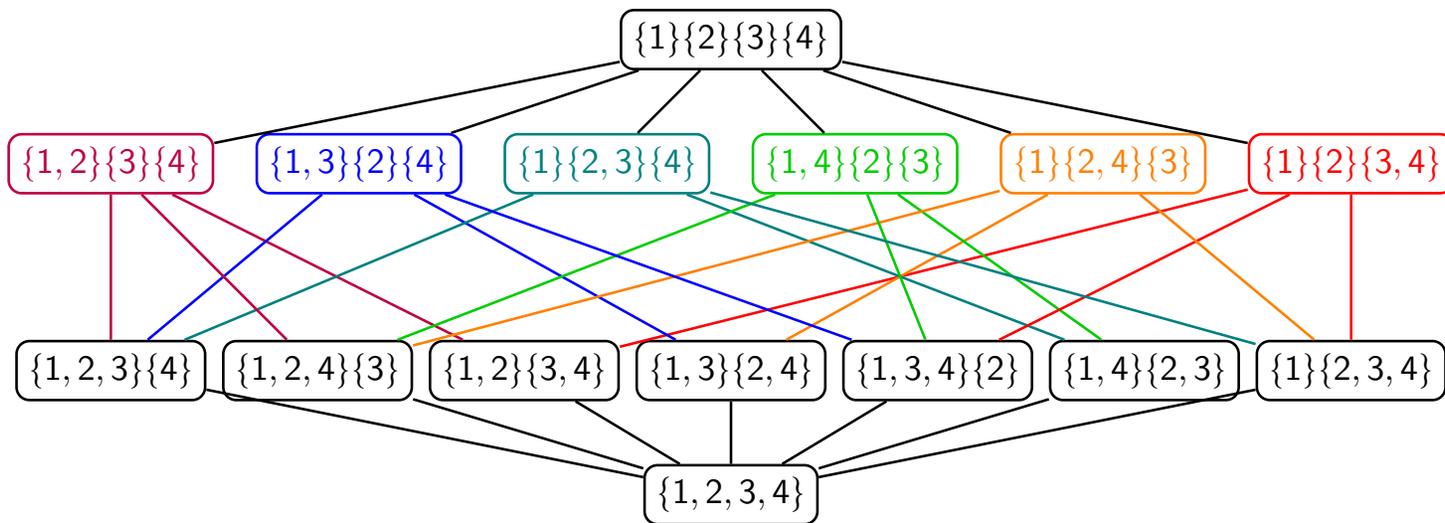
Théorème (Zaslavsky, 75)

$$\text{nombre de } k\text{-faces} = \sum_{\substack{I \leq J \in \mathcal{I} \\ \dim(I)=k}} |\mu(I, J)|,$$

où $\mu(I, J)$ est la caractéristique d'Euler (appelée aussi *nombre de Möbius*) de l'intervalle $[I, J]$.



Intervalles et nombre de Mobius des posets de partitions



Lemme

Pour $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k) \in \Pi_n$, nous avons :

$$[0_{\Pi_n}, \pi] \simeq \Pi_k \quad [\pi, 1_{\Pi_n}] \simeq \prod_{i=1}^k \Pi_{|\pi_k|} \quad \mu(0_{\Pi_n}, \pi) = (k-1)!$$

Proposition

$$f_k(\mathcal{B}_n) = \sum_{\mathbf{F} \leq \mathbf{G}} \prod_{F_i \in \mathbf{F}} (\#\mathbf{G}[F_i] - 1)!$$

où $\mathbf{F} \leq \mathbf{G}$ sont deux partitions, \mathbf{F} a $k + 1$ parts et $\mathbf{G}[F_i] = \{G_j \in \mathbf{G} \mid G_j \subseteq F_i\}$.

Nombre de régions de l'arrangement de tresses

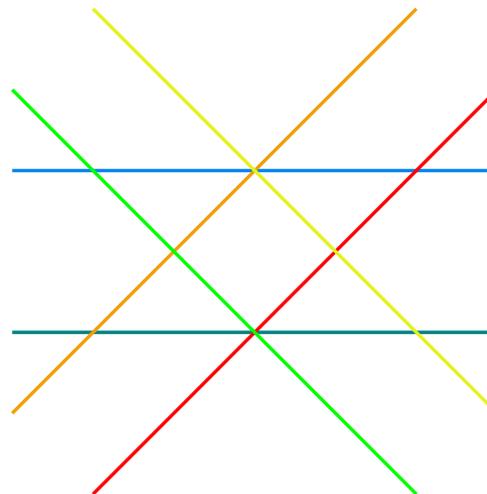
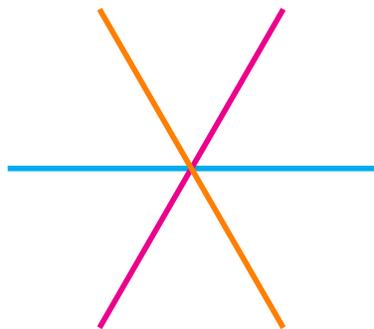
Proposition

$$f_k(\mathcal{B}_n) = \sum_{\mathbf{F} \leq \mathbf{G}} \prod_{F_i \in \mathbf{F}} (\#\mathbf{G}[F_i] - 1)!$$

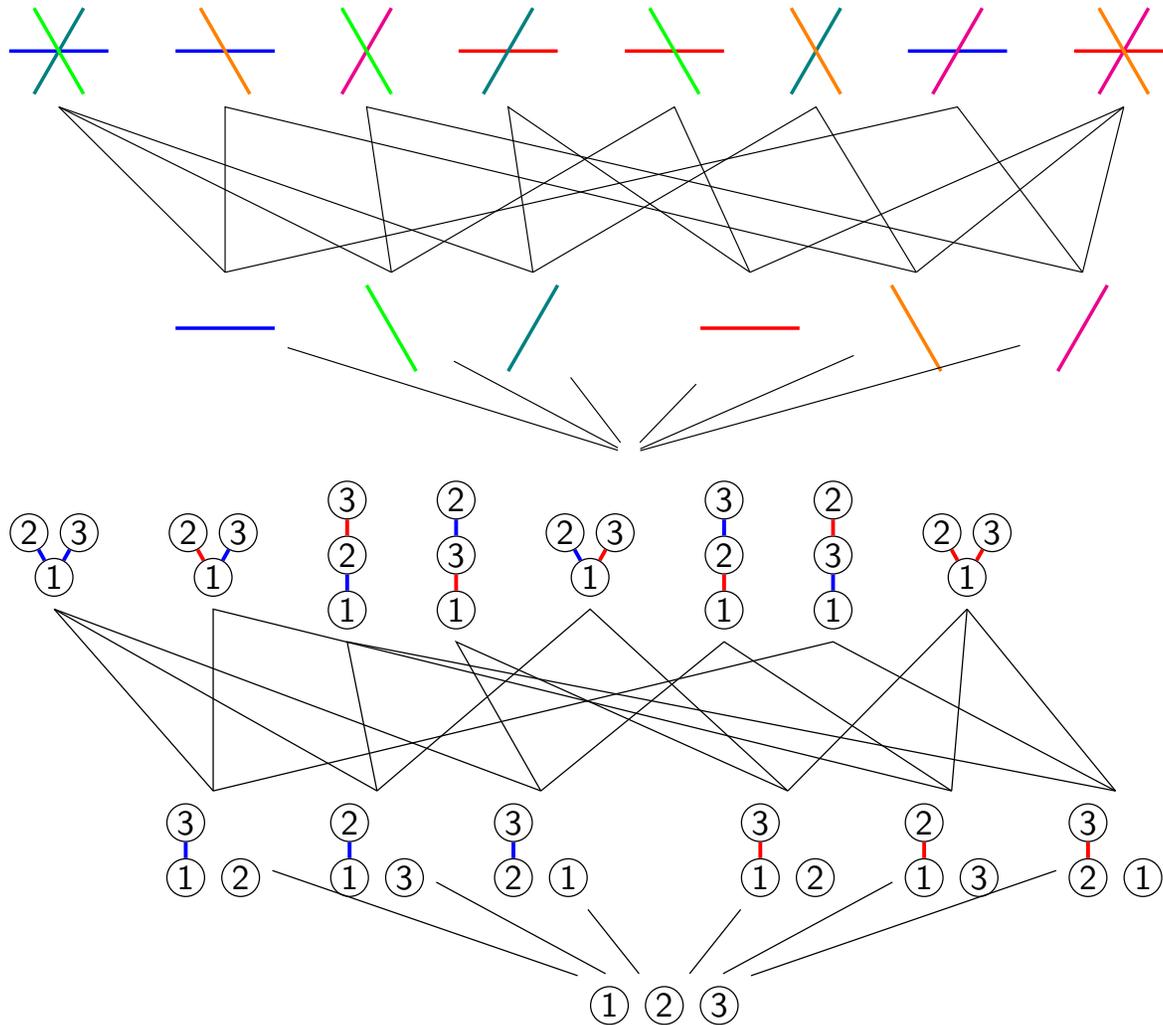
où $\mathbf{F} \leq \mathbf{G}$ sont deux partitions, \mathbf{F} a $k + 1$ parts et $\mathbf{G}[F_i] = \{G_j \in \mathbf{G} \mid G_j \subseteq F_i\}$.

Question

Que se passe-t-il si l'on considère ℓ copies de l'arrangement de tresses ?



De l'intersection d'hyperplans aux forêts colorées



Théorème (BDO, G. Laplante-Anfossi, V. Pilaud, K. Stoeckl)

$$f_{n-k_1-1, \dots, n-k_\ell-1}(\mathcal{B}_n^\ell) = \sum_{\mathbf{F} \leq \mathbf{G}} \prod_{i \in [\ell]} \prod_{p \in F_i} (\#G_i[p] - 1)!$$

où \mathbf{F} et \mathbf{G} sont deux forêts d'arbres ℓ -colorés et $\#F_i = k_i + 1$

$$f_{n-1}(\mathcal{B}_n^\ell) = n! [x^n] \exp \left(\sum_{m \geq 1} \frac{x^m}{m(1 + (\ell - 1)m)} \binom{\ell m}{m} \right)$$

$$f_0(\mathcal{B}_n^\ell) = \ell (1 + (\ell - 1)n)^{n-2}$$

Aussi

- Description combinatoire des faces de la diagonale
- Seulement deux diagonales opéradiques pour le permutoèdre

Espèces, posets et opérades : les (espèces en posets)
opéradiques

Plan

- 1 Survol de mes recherches
- 2 Posets et polytopes : La diagonale du permutoèdre
- 3 Espèces, posets et opérades : les (espèces en posets) opéradiques

Cohomologies (relatives) des posets

À chaque poset P , trois complexes de cochaînes

$$c^k(P) = \{x_0 < \dots < x_k \in P \mid x_0 \in \min(P), x_k \in \max(P)\},$$
$$\check{c}^k(P) = \mathbb{K} \cdot \{x_0 < \dots < x_k \mid x_0 \in \min(P)\}$$
$$\hat{c}^k(P) = \mathbb{K} \cdot \{x_0 < \dots < x_k \mid x_k \in \max(P)\},$$

muni de la différentielle suivante :

$$d[\gamma] = \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{x_{i-1} < y < x_i} [\dots < x_{i-1} < y < x_i < \dots]$$

Nous notons respectivement $h^\bullet(P)$, $\check{h}(P)$ et $\hat{h}(P)$.

Relations entre cohomologies

Pour $n \geq 1$, nous avons quand P est borné

$$h^n(P) = \tilde{H}^{n-2}(P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\})$$

De manière générale,

$$\check{h}^n(P) \simeq \bigoplus_{x \in \min(P)} \tilde{H}^{n-1}(P_{>x})$$

$$\hat{h}^n(P) \simeq \bigoplus_{y \in \max(P)} \tilde{H}^{n-1}(P_{<y})$$

Proposition (Hanlon, 81 ; Stanley, 82 ; Joyal 85)

Le poset des partitions $\Pi(V)$ a un unique groupe de cohomologie dont la dimension est donnée par :

$$\mu(\Pi(V)) = (|V| - 1)!$$

De plus, l'action du groupe symétrique sur ce groupe de cohomologie est :

$$h^{n-1}(\Pi(V)) = \text{Lie}(V) \otimes_{\mathfrak{S}_V} \text{sgn},$$

où sgn est la représentation signature.

$$\text{Lie}(\{1, 2\}) = \mathbb{K} \cdot \{[1; 2]\} \text{ avec } [1; 2] = -[2; 1]$$

$$\text{Lie}(\{1, 2, 3\}) = \mathbb{K} \cdot \{[[1; 2]; 3], [[1; 3]; 2]\}$$

avec $[[1; 2]; 3] + [[2; 3]; 1] + [[3; 1]; 2] = 0$ (relations de Jacobi)

$$\text{Lie}(\{1, \dots, n\}) = \mathbb{K} \cdot \{[\dots [1; \sigma(2)]\sigma(3)] \dots \sigma(n)], \sigma \in \mathfrak{S}(\{2, \dots, n\})\} \text{ [Reutenauer]}$$

Construction cobar à niveaux[Fresse, 02]

{1}{2}{3}{4}{5}{6}{7}{8}{9}

{1, 5}{2}{3}{4}{6}{7}{8}{9}

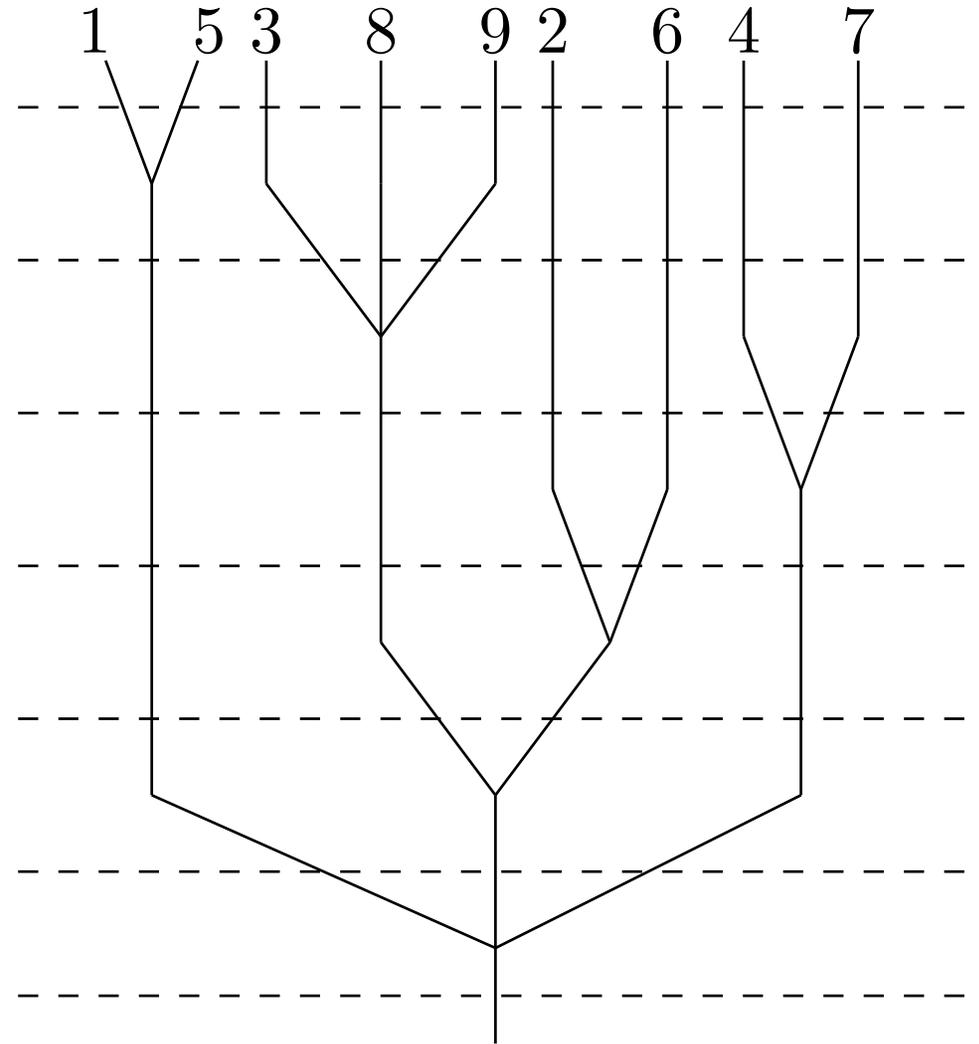
{1, 5}{2}{3, 8, 9}{4}{6}{7}

{1, 5}{2}{3, 8, 9}{4, 7}{6}

{1, 5}{2, 6}{3, 8, 9}{4, 7}

{1, 5}{2, 3, 6, 8, 9}{4, 7}

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

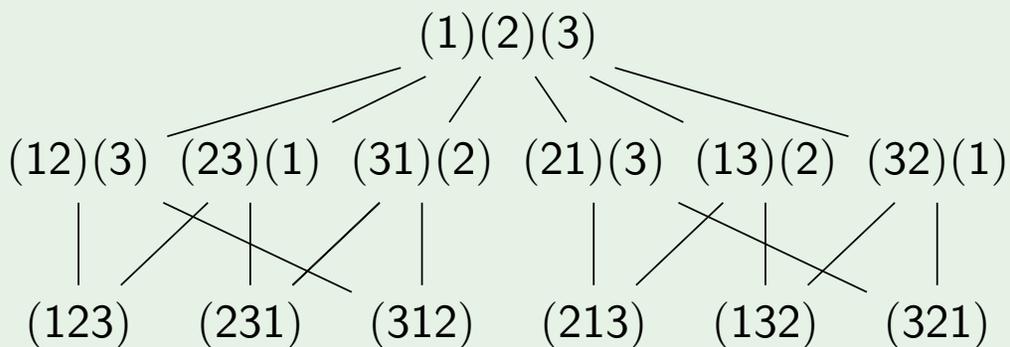


Posets de partitions décorées à droite [Vallette, 07]

Soit \mathcal{P} une opérade ensembliste connexe. Une **partition \mathcal{P} -décorée à droite** sur un ensemble fini V est un élément de $\mathbb{E} \circ \mathcal{P}$.

$$(\alpha, \eta) \leq (\beta, \xi) \Leftrightarrow \alpha \leq_{\Pi(V)} \beta, \forall A \in \alpha, \exists \nu_A \in \mathcal{P}(\beta|_A) : \eta_A = \nu_A \circ (\xi_B)_{B \in \beta|_A}.$$

Partitions de $\{1, 2, 3\}$ décorées à droite par Assoc = \mathbb{L}



Théorème (Vallette, 07)

Pour $\mathbb{K}\mathcal{P}$ Koszul,

$$h^{|V|-1}(\Pi^{\mathcal{P}}(V)) \simeq s^{n-1} (\mathbb{K}\mathcal{P})^!(V) \otimes_{\mathbb{G}_V} \text{sgn} =: \Lambda^{-1} (\mathbb{K}\mathcal{P})^!(V).$$

Théorème (Conjecture de Chapoton; prouvé dans 0.,13)

Le poset des hyperarbres $\widehat{HT}(V)$ est Cohen-Macaulay et

$$\tilde{H}^{|V|-3}(\widehat{HT}(V) \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}) = \Lambda^{-1} \widehat{\text{PreLie}}(V),$$

pour tout ensemble fini V .

Théorème (Conjecture de Chapoton; prouvé dans 0.,13)

Le poset des hyperarbres $\widehat{HT}(V)$ est Cohen-Macaulay et

$$\tilde{H}^{|V|-3}(\widehat{HT}(V) \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}) = \Lambda^{-1} \widehat{\text{PreLie}}(V),$$

pour tout ensemble fini V .

Question

Pourquoi une opérade apparaît-elle ici ?

Théorème (Conjecture de Chapoton; prouvé dans 0.,13)

Le poset des hyperarbres $\widehat{HT}(V)$ est Cohen-Macaulay et

$$\tilde{H}^{|V|-3}(\widehat{HT}(V) \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}) = \Lambda^{-1} \widehat{\text{PreLie}}(V),$$

pour tout ensemble fini V .

Question

Pourquoi une opérade apparaît-elle ici ?

Réponse

Espèces en posets opéradiques

Proposition (Folklore)

Pour toute partition $\pi \in \Pi(S)$,

$$\varphi_\pi : \Pi_{\leq \pi}(S) \xrightarrow{\sim} \Pi(\pi) \quad \text{et} \quad \psi_\pi : \Pi_{\geq \pi}(S) \xrightarrow{\sim} \prod_{T \in \pi} \Pi(T).$$

On peut alors définir :

$$c^\bullet(\Pi(\pi)) \otimes \bigotimes_{T \in \pi} c^\bullet(\Pi(T)) \xrightarrow{id \otimes \kappa} c^\bullet(\Pi(\pi)) \otimes c^\bullet\left(\prod_{T \in \pi} \Pi(T)\right) \\ \xrightarrow{\varphi_\pi^* \otimes \varphi_\pi^*} c^\bullet(\Pi_{\leq \pi}(S)) \otimes c^\bullet(\Pi_{\geq \pi}(S)) \rightarrow c^\bullet(\Pi(S)).$$

Cette construction induit une structure d'opérade graduée sur la cohomologie qui est $\Lambda^{-1}Lie$.

Espèces en posets opéradiques

Soit P une espèce en posets, avec $a : P \rightarrow \Pi$, tel que, pour tout ensemble fini S , $a(S) : P(S) \rightarrow \Pi(S)$ **strictement croissante**, ainsi que

$$\varphi_x : P_{\leq x}(S) \rightarrow P(\pi) \quad \text{et} \quad \psi_x : P_{\geq x}(S) \rightarrow \prod_{T \in \pi} P(T)$$

Définition

P avec a , φ_x et ψ_x est une **espèce en posets opéradique** si

- $\varphi_\pi \circ a = a \circ \varphi_x$, $\psi_\pi \circ a = a \circ \psi_x$
- φ_x et ψ_x satisfont des axiomes d'équivariance, unitarité et associativité.

Théorème (D.O. - Dupont, 25+)

$h^\bullet(P)$ est munie d'une structure d'opérade graduée, avec un morphisme d'opérade graduée $a^* : \Lambda^{-1}Lie \rightarrow h^\bullet(P)$.

$\check{h}^\bullet(P)$ est un module opéradique à gauche sur $h^\bullet(P)$.

$\hat{h}^\bullet(P)$ est un module opéradique à droite sur $h^\bullet(P)$.

- Plein de nouveaux exemples dont les posets d'hyperarbres

Directions de recherche

- Enrichir les exemples
- Adapter la théorie aux ensembles nichés, aux opérades cycliques et anti-cycliques
- Posets de Tamari-Parking
- Relations polytopes \leftrightarrow opérades
- Lien avec la sémantique
- ...

- Plein de nouveaux exemples dont les posets d'hyperarbres

Directions de recherche

- Enrichir les exemples
- Adapter la théorie aux ensembles nichés, aux opérades cycliques et anti-cycliques
- Posets de Tamari-Parking
- Relations polytopes \leftrightarrow opérades
- Lien avec la sémantique
- ...

Merci de votre attention !