Des posets de partitions aux espèces en posets opéradiques

Bérénice Delcroix-Oger
avec Clément Dupont (IMAG)
et Guillaume Laplante-Anfossi (Université de Syddansk), Kurt Stoeckl (Université de Melbourne) et Vincent Pilaud (Université de Barcelone)

But pour aujourd'hui

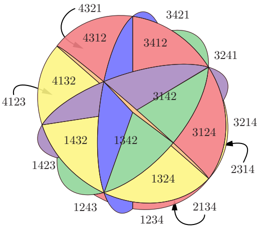
Présenter deux de mes travaux récents reliés aux posets de partitions :

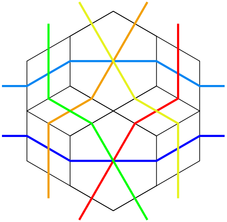
- "Cellular diagonals of permutahedra" avec G. Laplante-Anfossi (Univ. Syddansk), Kurt Stoeckl (Univ. Melbourne) et Vincent Pilaud (Univ. Barcelone), ArXiv : 2308.12119
- "Lie-operads from poset cohomology" avec C. Dupont (IMAG), bientôt sur ArXiv

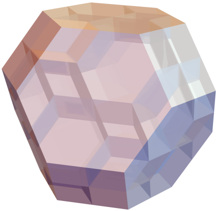
Plan de l'exposé

1. Posets de partitions décorées d'ensemble : lien avec les arrangements de tresses et cohomologie
2. Espèces en posets opéradiques (operadic poset species) et applications

Bande annonce de la partie 1

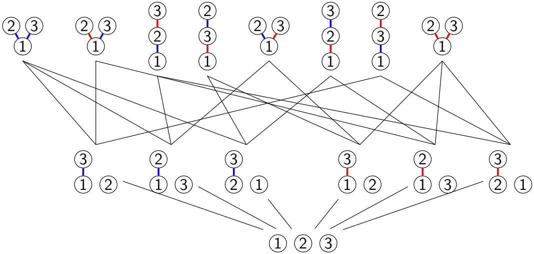






©V. Pilaud

©G. Laplante-Anfossi



Posets de partitions, permutoèdre et arrangement de tresses

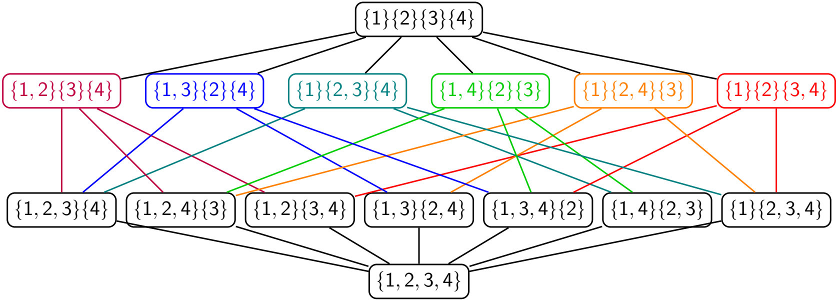
Posets de partitions d'un ensemble V : $\Pi(V)$

Partitions d'un ensemble V :

$$\{V_1, \ldots, V_k\} \models V \Leftrightarrow V = \bigsqcup_{i=1}^{k} V_i, V_i \cap V_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j$$

Ordre partiel sur les partitions d'un ensemble V:

$$\{V_1, \ldots, V_k\} \leqslant \{V'_1, \ldots, V'_p\} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, p\}, \exists j \in \{1, k\} \text{ t.q. } V'_i \subseteq V_j$$



Un autre exemple de poset : l'ordre faible de Bruhat W_n [Verma 1968]

- Relation de couverture, $\ldots ab \ldots \lessdot \ldots ba \ldots$, avec $a < b$

123

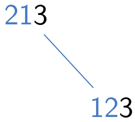
Un autre exemple de poset : l'ordre faible de Bruhat W_n [Verma 1968]

- Relation de couverture, $\dots ab \dots \lessdot \dots ba \dots$, avec $a < b$

123

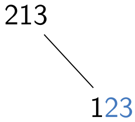
Un autre exemple de poset : l'ordre faible de Bruhat W_n [Verma 1968]

- Relation de couverture, $\ldots ab \ldots \lhd \ldots ba \ldots$, avec $a < b$



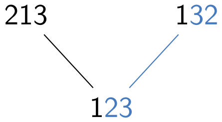
Un autre exemple de poset : l'ordre faible de Bruhat W_n [Verma 1968]

- Relation de couverture, $\dots ab \dots \lessdot \dots ba \dots$, avec $a < b$



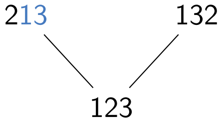
Un autre exemple de poset : l'ordre faible de Bruhat W_n [Verma 1968]

- Relation de couverture, $\dots ab \dots \lhd \dots ba \dots$, avec $a < b$



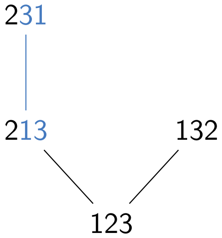
Un autre exemple de poset : l'ordre faible de Bruhat W_n [Verma 1968]

- Relation de couverture, $\ldots ab \ldots \lessdot \ldots ba \ldots$, avec $a < b$



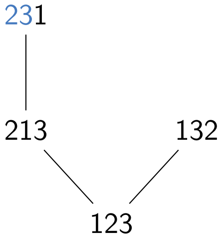
Un autre exemple de poset : l'ordre faible de Bruhat W_n [Verma 1968]

- Relation de couverture, $\ldots ab \ldots \lessdot \ldots ba \ldots$, avec $a < b$



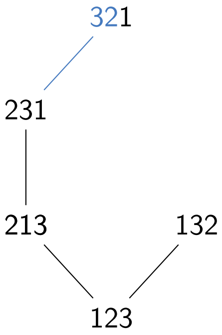
Un autre exemple de poset : l'ordre faible de Bruhat W_n [Verma 1968]

- Relation de couverture, $\ldots ab \ldots \lessdot \ldots ba \ldots$, avec $a < b$



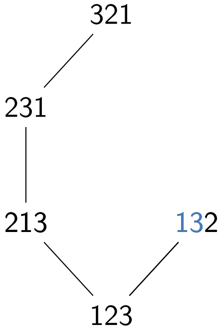
Un autre exemple de poset : l'ordre faible de Bruhat W_n [Verma 1968]

- Relation de couverture, $\ldots ab \ldots \lessdot \ldots ba \ldots$, avec $a < b$



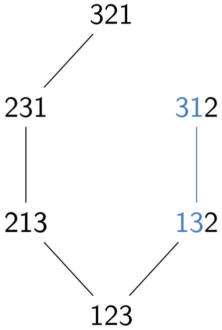
Un autre exemple de poset : l'ordre faible de Bruhat W_n [Verma 1968]

- Relation de couverture, $\ldots ab \ldots \lhd \ldots ba \ldots$, avec $a < b$



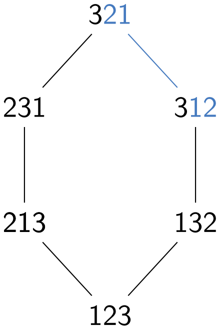
Un autre exemple de poset : l'ordre faible de Bruhat W_n [Verma 1968]

- Relation de couverture, $\ldots ab \ldots \lessdot \ldots ba \ldots$, avec $a < b$



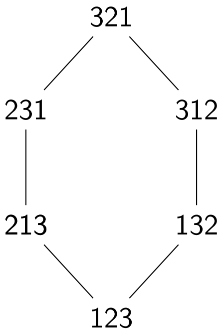
Un autre exemple de poset : l'ordre faible de Bruhat W_n [Verma 1968]

- Relation de couverture, $\ldots ab \ldots \lessdot \ldots ba \ldots$, avec $a < b$



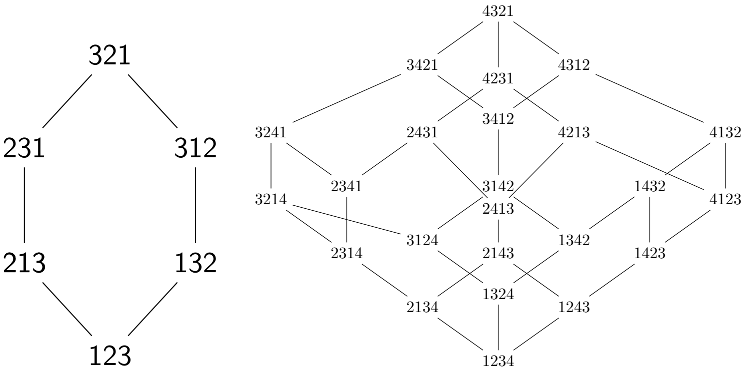
Un autre exemple de poset : l'ordre faible de Bruhat W_n [Verma 1968]

- Relation de couverture, $\ldots ab \ldots \lessdot \ldots ba \ldots$, avec $a < b$

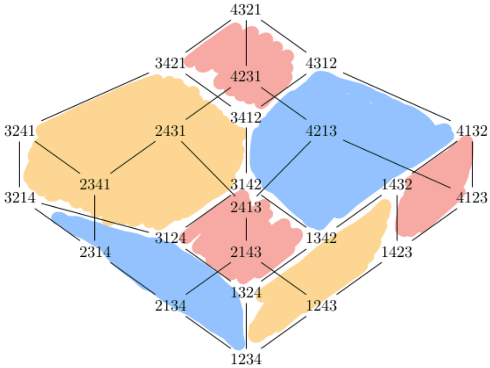


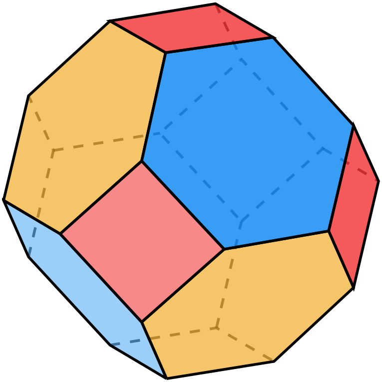
Un autre exemple de poset : l'ordre faible de Bruhat W_n [Verma 1968]

- Relation de couverture, $\ldots ab \ldots \lhd \ldots ba \ldots$, avec $a < b$

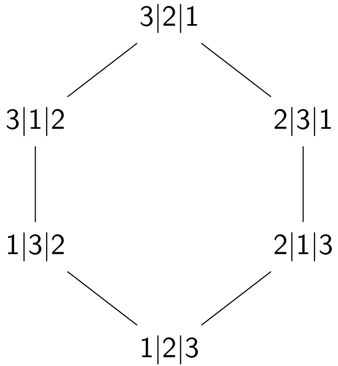


Permutoèdre = polytope dont les sommets sont les permutations et les arêtes sont les relations de couverture de l'ordre faible [Schoute 1911]

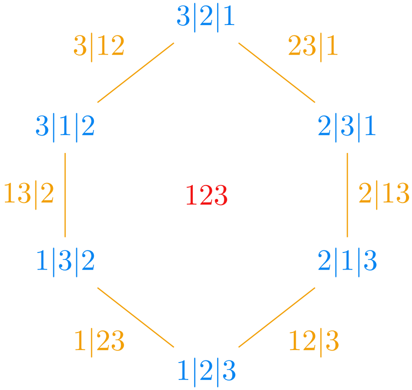




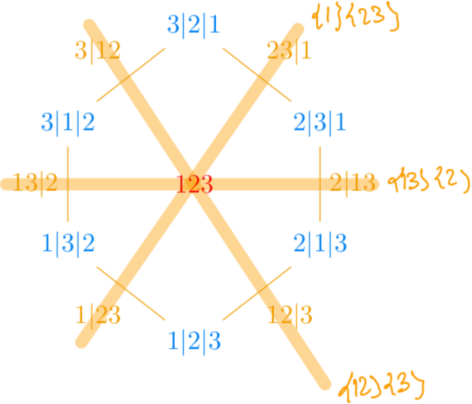
Étiquetage des faces du permutoèdre



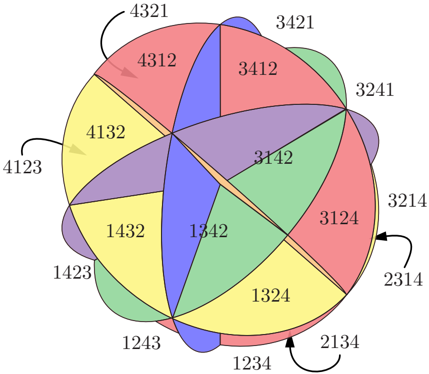
Étiquetage des faces du permutoèdre

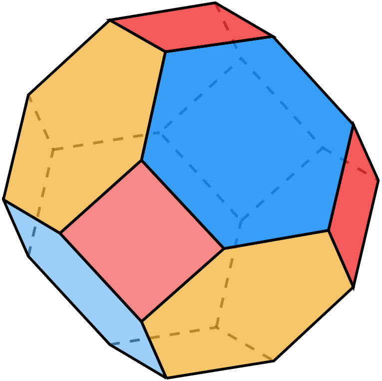


Étiquetage des faces du permutoèdre



Polytope et arrangement d'hyperplan





À retenir

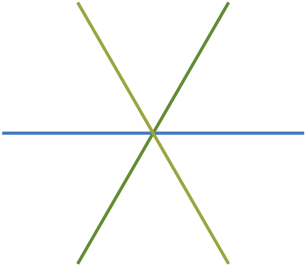
Nombre de faces de dimension k = nombre de régions de dimension $n - k$

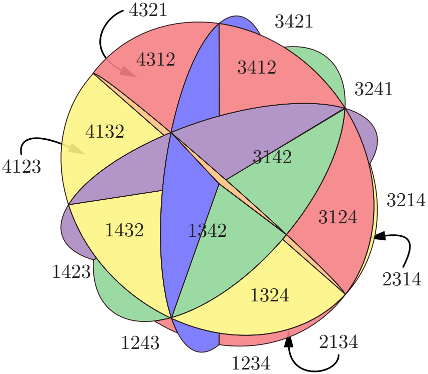
Arrangement de tresses

Soit $H^n_{i,j}$ l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ défini par l'équation $x_i = x_j$. L'arrangement d'hyperplans suivant

$$\mathcal{B}_n = \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} H^n_{i,j}$$

est appelé arrangement de tresses.

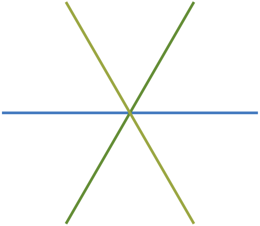




Arrangement de tresses et composition d'ensemble ($^{\mathrm{Assoc}}\Pi$)

Définition

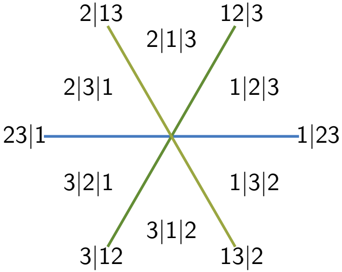
Une région de $\mathcal{B}_n$ est une composante connexe de $\mathbb{R}^n \backslash \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} H_{i,j}^n$. Les faces de $\mathcal{B}_n$ sont les clôtures des régions et leurs intersections avec un hyperplan de l'arrangement. Les faces sont ordonnées par inclusion.



Arrangement de tresses et composition d'ensemble ($^{\mathrm{Assoc}}\Pi$)

Définition

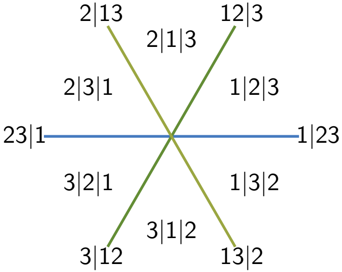
Une région de $\mathcal{B}_n$ est une composante connexe de $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} H_{i,j}^n$. Les faces de $\mathcal{B}_n$ sont les clôtures des régions et leurs intersections avec un hyperplan de l'arrangement. Les faces sont ordonnées par inclusion.

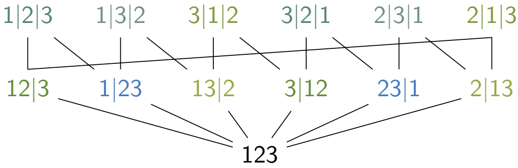


Arrangement de tresses et composition d'ensemble ($^{\mathrm{Assoc}}\Pi$)

Définition

Une région de $\mathcal{B}_n$ est une composante connexe de $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} H^n_{i,j}$. Les faces de $\mathcal{B}_n$ sont les clôtures des régions et leurs intersections avec un hyperplan de l'arrangement. Les faces sont ordonnées par inclusion.

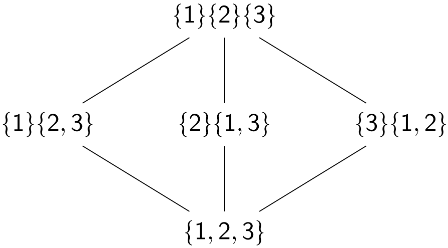


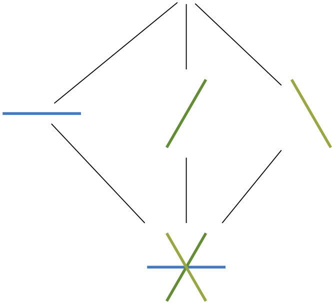


Retour aux partitions

Définition

Un plat de $\mathcal{B}_n$ est un sous-espace affine non vide de $\mathbb{R}^n$ obtenu comme l'intersection de certains hyperplans de $\mathcal{B}_n$. Les plats (aussi appelés intersection) sont ordonnés par contenance (un plat est plus petit qu'un autre s'il le contient).





Nombre de Möbius

Définition

Fonction de Möbius d'un poset P: $\mu : P \times P \to \mathbb{N}$ défini récursivement par $\mu(x,x) = 1$ et $\mu(x,y) = -\sum_{x \leqslant z < y} \mu(x,z)$ pour $x < y$.

Nombre de Möbius

Définition

Fonction de Möbius d'un poset P: $\mu : P \times P \to \mathbb{N}$ défini récursivement par $\mu(x,x) = 1$ et $\mu(x,y) = -\sum_{x \leqslant z < y} \mu(x,z)$ pour $x < y$.

$$
\begin{tikzcd}
& \{1,2,3\} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{1\}\{2,3\} \arrow[dr, dash] & \{1,3\}\{2\} \arrow[d, dash] & \{1,2\}\{3\} \arrow[dl, dash] \\
& 0_{\Pi_n} := \{1\}\{2\}\{3\} &
\end{tikzcd}
$$

Nombre de Möbius

Définition

Fonction de Möbius d'un poset P: $\mu : P \times P \to \mathbb{N}$ défini récursivement par $\mu(x,x) = 1$ et $\mu(x,y) = -\sum_{x \leqslant z < y} \mu(x,z)$ pour $x < y$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \{1,2,3\} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{1\}\{2,3\} & \{1,3\}\{2\} & \{1,2\}\{3\} \\
 & 0_{\Pi_n} := \{1\}\{2\}\{3\} \arrow[ul, dash] \arrow[u, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Nombre de Möbius

Définition

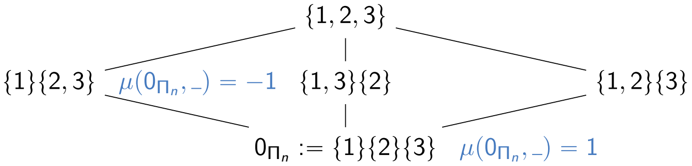
Fonction de Möbius d'un poset P: $\mu : P \times P \to \mathbb{N}$ défini récursivement par $\mu(x,x) = 1$ et $\mu(x,y) = -\sum_{x \leqslant z < y} \mu(x,z)$ pour $x < y$.

$$\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} & \\
\{1\}\{2,3\} \arrow[ur, dash] & \{1,3\}\{2\} \arrow[u, dash] & \{1,2\}\{3\} \arrow[ul, dash] \\
 & 0_{\Pi_n} := \{1\}\{2\}\{3\} \arrow[ul, dash] \arrow[u, dash] \arrow[ur, dash] & \mu(0_{\Pi_n}, _) = 1
\end{tikzcd}$$

Nombre de Möbius

Définition

Fonction de Möbius d'un poset P: $\mu : P \times P \to \mathbb{N}$ défini récursivement par $\mu(x,x) = 1$ et $\mu(x,y) = -\sum_{x \leqslant z < y} \mu(x,z)$ pour $x < y$.



Nombre de Möbius

Définition

Fonction de Möbius d'un poset P: $\mu : P \times P \to \mathbb{N}$ défini récursivement par $\mu(x,x) = 1$ et $\mu(x,y) = -\sum_{x \leqslant z < y} \mu(x,z)$ pour $x < y$.

$$\{1,2,3\}$$

$$\{1\}\{2,3\} \quad \mu(0_{\Pi_n}, \_) = -1 \qquad \{1,3\}\{2\} \quad \mu(0_{\Pi_n}, \_) = -1 \qquad \{1,2\}\{3\} \quad \mu(0_{\Pi_n}, \_) = -1$$

$$0_{\Pi_n} := \{1\}\{2\}\{3\} \quad \mu(0_{\Pi_n}, \_) = 1$$

Nombre de Möbius

Définition

Fonction de Möbius d'un poset P: $\mu : P \times P \to \mathbb{N}$ défini récursivement par $\mu(x,x) = 1$ et $\mu(x,y) = -\sum_{x \leqslant z < y} \mu(x,z)$ pour $x < y$.

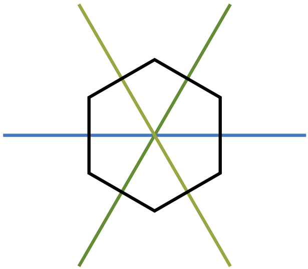
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \{1,2,3\} \quad \mu(0_{\Pi_n},_) = 2 \leftarrow \text{nombre de Möbius} & \\
\{1\}\{2,3\} \quad \mu(0_{\Pi_n},_) = -1 \arrow[ur, dash] & \{1,3\}\{2\} \quad \mu(0_{\Pi_n},_) = -1 \arrow[u, dash] & \{1,2\}\{3\} \quad \mu(0_{\Pi_n},_) = -1 \arrow[ul, dash] \\
 & 0_{\Pi_n} := \{1\}\{2\}\{3\} \quad \mu(0_{\Pi_n},_) = 1 \arrow[ul, dash] \arrow[u, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

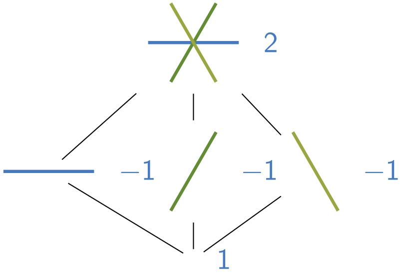
Théorème de Zaslavsky

Soit $\mathcal{A}$ un arrangement d'hyperplan et $\mathcal{I}$ son poset d'intersection.

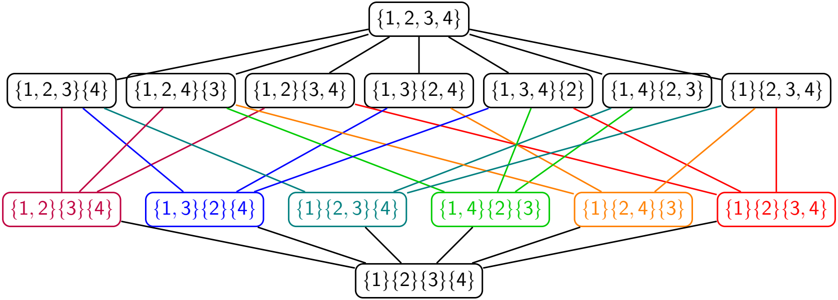
Théorème (Zaslavsky, 75)

$$\textit{nombre de k-faces} \;=\; \sum_{\substack{I \leqslant J \in \mathcal{I} \\ \dim(I) = k}} |\mu(I, J)|$$





Intervalles et nombres de Möbius des posets de partitions



Lemme

Pour $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k) \in \Pi_n$, *nous avons :*

$$[0_{\Pi_n}, \pi] \simeq \prod_{i=1}^{k} \Pi_{|\pi_k|} \qquad [\pi, 1_{\Pi_n}] \simeq \Pi_k \qquad \mu(\pi, 1_{\Pi_n}) = (k-1)!$$

Nombre de régions de l'arrangement de tresses

Proposition

$$f_k(\mathcal{B}_n) = \sum_{\mathbf{F} \leqslant \mathbf{G}} \prod_{F_i \in \mathbf{F}} (\#\mathbf{G}[F_i] - 1)!$$

où $\mathbf{F} \leqslant \mathbf{G}$ *sont deux partitions,* $\mathbf{F}$ *a* $k+1$ *parts et* $\mathbf{G}[F_i] = \{G_j \in \mathbf{G} | G_j \subseteq F_i\}$*.*

Nombre de régions de l'arrangement de tresses

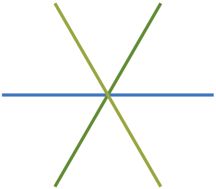
Proposition

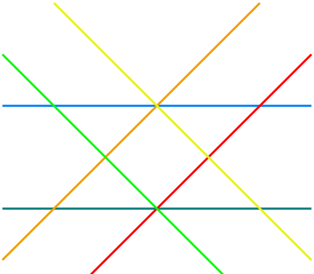
$$f_k(\mathcal{B}_n) = \sum_{\mathbf{F} \leqslant \mathbf{G}} \prod_{F_i \in \mathbf{F}} (\#\mathbf{G}[F_i] - 1)!$$

où $\mathbf{F} \leqslant \mathbf{G}$ *sont deux partitions,* $\mathbf{F}$ *a* $k+1$ *parts et* $\mathbf{G}[F_i] = \{G_j \in \mathbf{G} | G_j \subseteq F_i\}$.

Question

Que se passe-t-il si on considère ℓ copies de l'arrangement de tresses ?



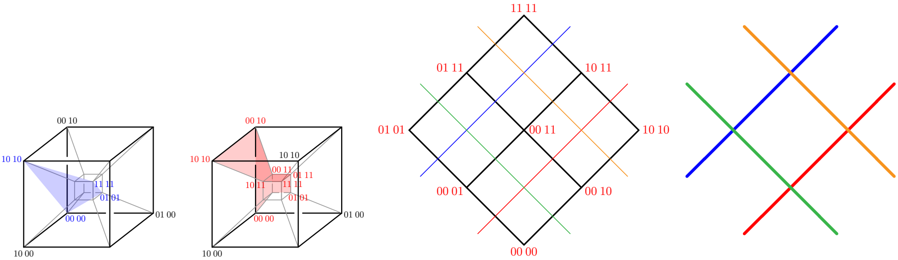


Diagonale du permutoèdre

Motivations

Calcul d'une version cellulaire et cohérente de la diagonale fine $\delta : x \to (x, x)$ du permutoèdre P

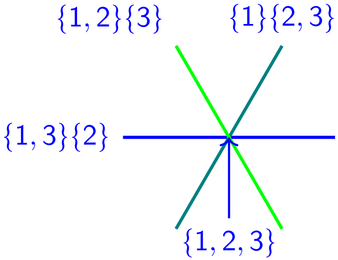
Plus précisément, on définit une application $\Delta : P \to P \times P$ dont l'image est union de faces de $P \times P$ et homotope à la diagonale fine.



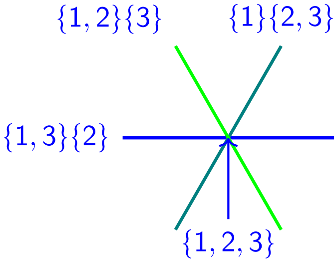
Applications

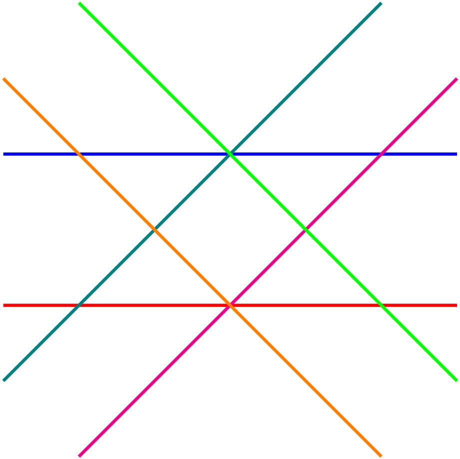
Formule de coproduit, produits tensoriels pour opérades à homotopie près, description du produit cup pour les variétés de Losev-Manin

Description des intersections en termes d'arbres

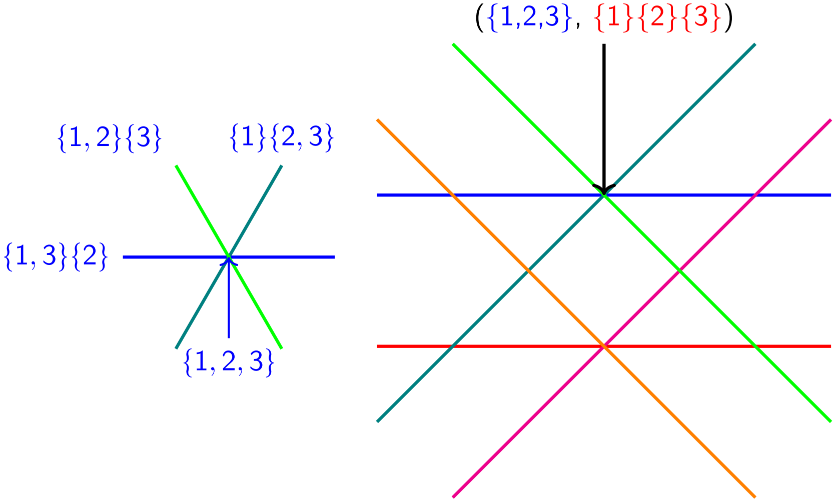


Description des intersections en termes d'arbres

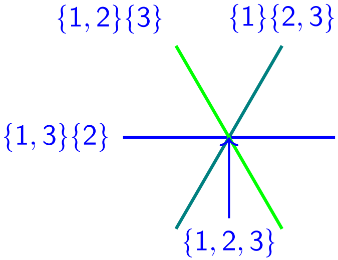


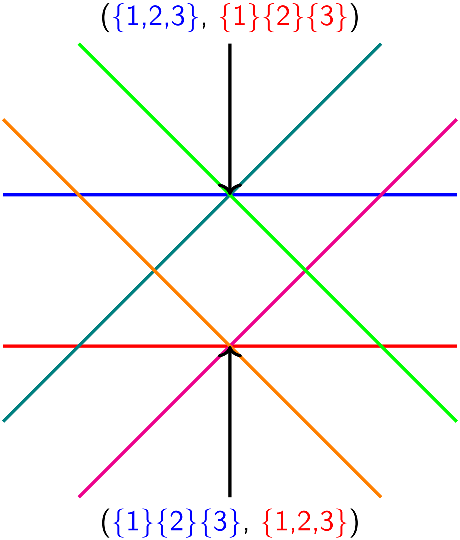


Description des intersections en termes d'arbres

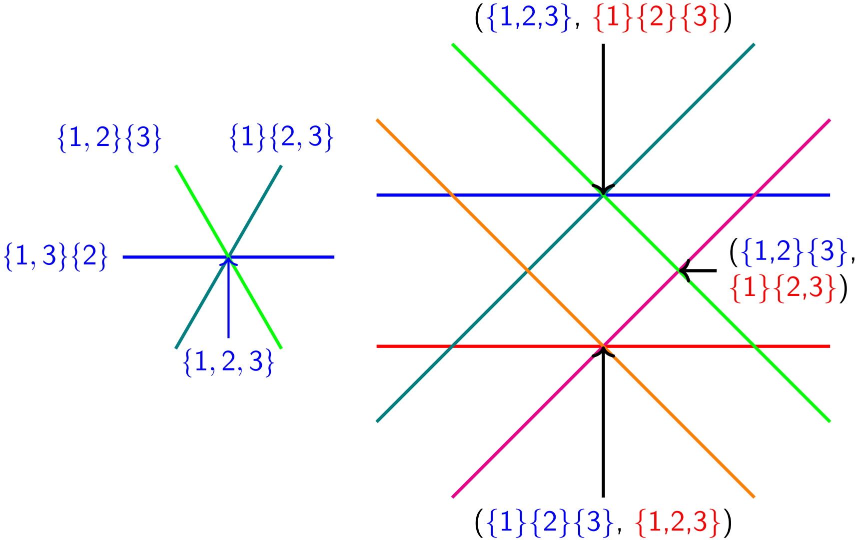


Description des intersections en termes d'arbres

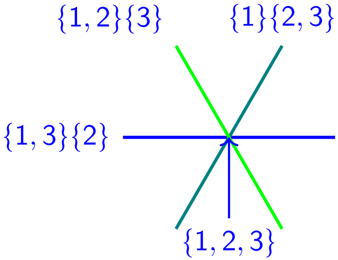


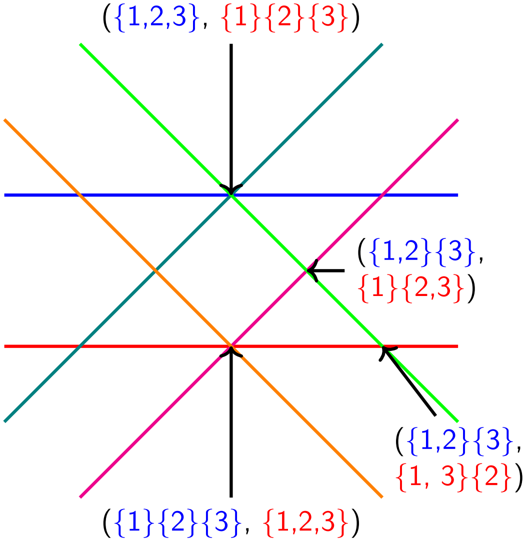


Description des intersections en termes d'arbres

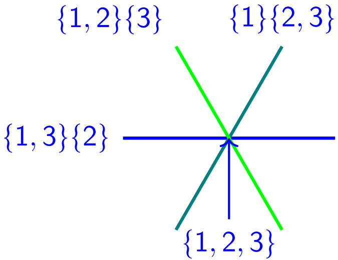


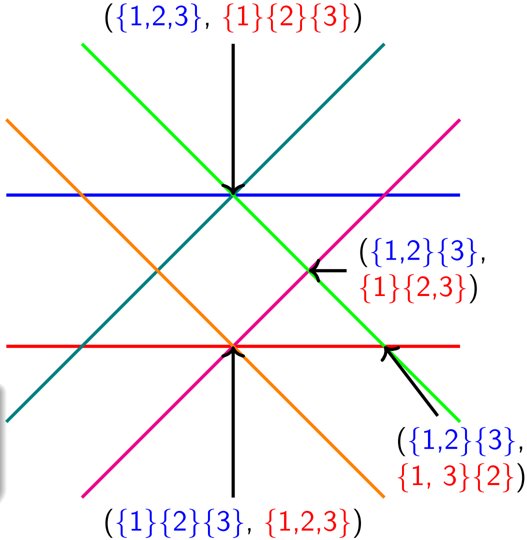
Description des intersections en termes d'arbres





Description des intersections en termes d'arbres

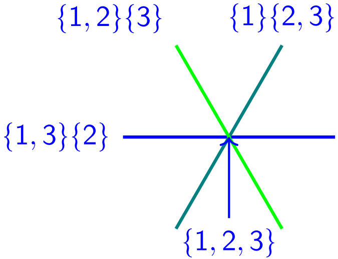


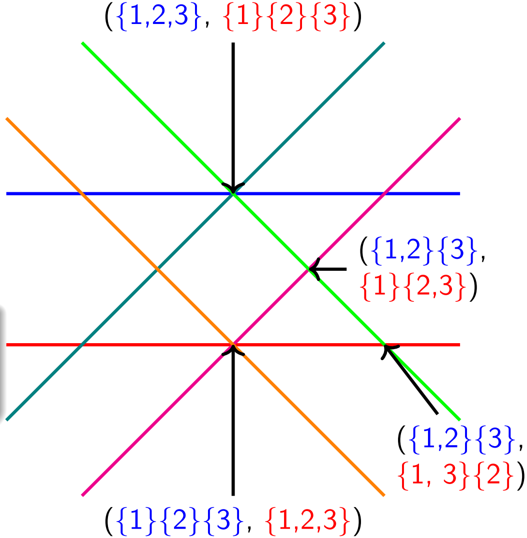


Toutes les paires n'apparaissent pas

$\cancel{(\{1,2\}\{3\}, \{1,2\}\{3\})}$

Description des intersections en termes d'arbres





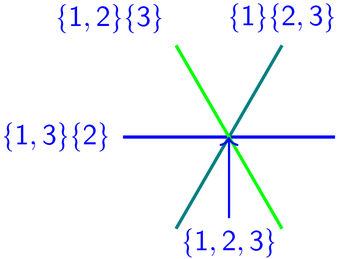
Toutes les paires n'apparaissent pas

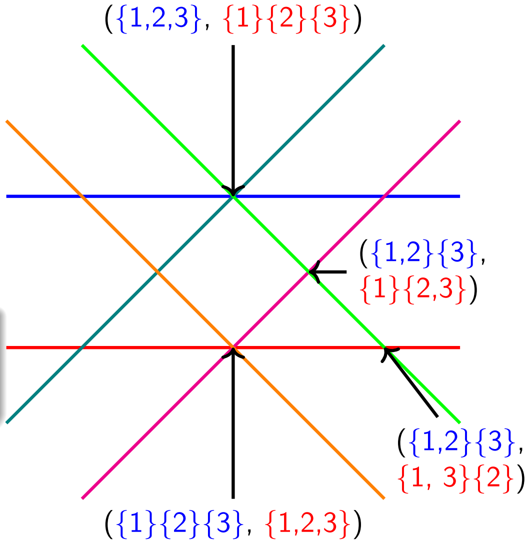
$\cancel{(\{1,2\}\{3\}, \{1,2\}\{3\})}$

1 2   1

3   23

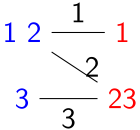
Description des intersections en termes d'arbres



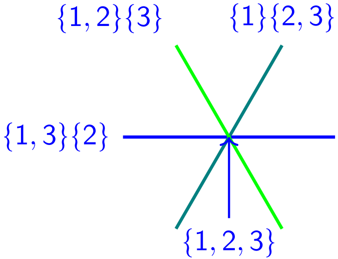


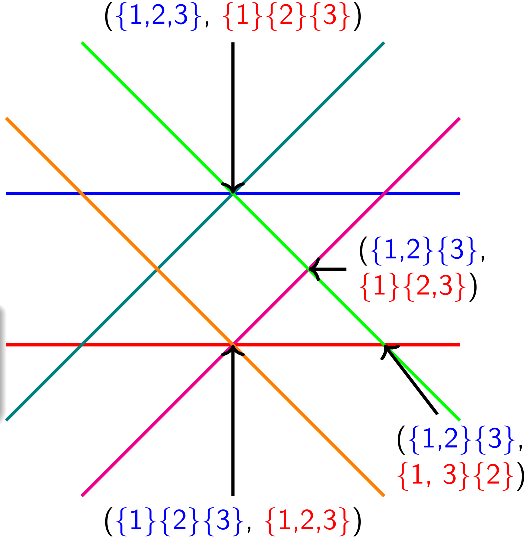
Toutes les paires n'apparaissent pas

~~({1, 2}{3}, {1, 2}{3})~~



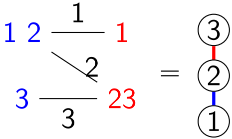
Description des intersections en termes d'arbres





Toutes les paires n'apparaissent pas

~~({1, 2}{3}, {1, 2}{3})~~

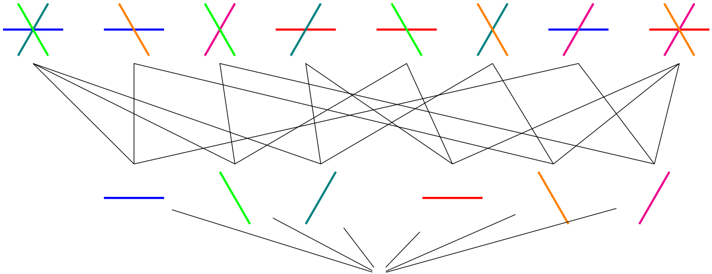


De l'intersection d'hyperplans aux forêts colorées

Intersection d'hyperplans

Chaque intersection est une forêts d'arbres enracinés aux arêtes colorées telles que :

- il y a ℓ couleurs d'arêtes différentes et 1 est une racine,
- L'arête partant d'un enfant n'a pas la même couleur que l'arête le reliant à son parent.

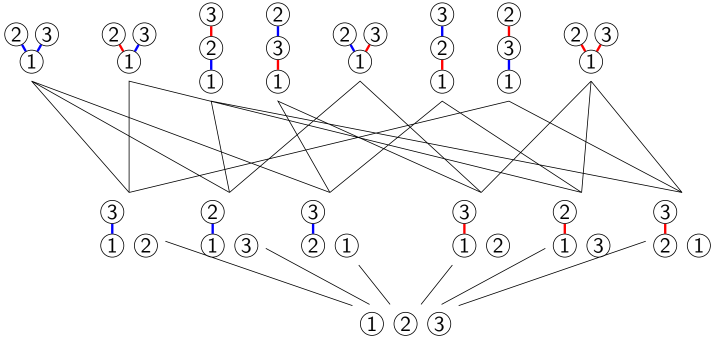


De l'intersection d'hyperplans aux forêts colorées

Intersection d'hyperplans

Chaque intersection est une forêts d'arbres enracinés aux arêtes colorées telles que :

- il y a ℓ couleurs d'arêtes différentes et 1 est une racine,
- L'arête partant d'un enfant n'a pas la même couleur que l'arête le reliant à son parent.



Nombre de régions pour 2 copies de l'arrangement de tresses

Théorème (BDO, G. Laplante-Anfossi, V. Pilaud, K. Stoeckl)

$$f_{n-k_1-1,n-k_2-1}({\mathcal{B}_n}^2) = \sum_{\mathbf{F} \leqslant \mathbf{G}} \prod_{i \in [2]} \prod_{p \in F_i} (\#G_i[p] - 1)!$$

où **F** *et* **G** *sont deux forêts d'arbres 2-colorés et* $\#F_i = k_i + 1$

$$f_{n-1}({\mathcal{B}_n}^2) = n![x^n]exp\left(\sum_{m \geqslant 1} \frac{x^m}{m(m+1)} \binom{2m}{m}\right) [A213507]$$

$$f_0({\mathcal{B}_n}^2) = 2(n+1)^{n-2}[A007334]$$

$$f_{k,n-k-1}({\mathcal{B}_n}^2) = \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} (k+1)^{n-k-1}(n-k)^k$$

Nombre de régions pour ℓ copies de l'arrangement de tresses

Théorème (BDO, G. Laplante-Anfossi, V. Pilaud, K. Stoeckl)

$$f_{n-k_1-1,\dots,n-k_\ell-1}({\mathcal{B}_n}^{\ell}) = \sum_{\mathbf{F}\leqslant\mathbf{G}} \prod_{i\in[\ell]} \prod_{p\in F_i} (\#G_i[p]-1)!$$

où **F** *et* **G** *sont deux forêts d'arbres ℓ-colorés et $\#F_i = k_i + 1$*

$$f_{n-1}({\mathcal{B}_n}^{\ell}) = n![x^n]\exp\left(\sum_{m\geqslant 1} \frac{x^m}{m(1+(\ell-1)m)}\binom{\ell m}{m}\right)$$

$$f_0({\mathcal{B}_n}^{\ell}) = \ell\,(1+(\ell-1)n)^{n-2}$$

Aussi

- Description combinatoire des faces de la diagonale
- Seulement 4 diagonales opéradiques sur le permutoèdre

Cohomologie des posets de partitions

Cohomologie (relative) de posets

À tout poset P peut être associé un complexe de cochaînes $c^\bullet(P)$ dont les k-cochaînes sont les $x_0 < \ldots < x_k$ dans P, où x_0 est un élément minimal et x_k un élément maximal de P, avec le cobord suivant:

$$d[\gamma] = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sum_{x_{i-1}<y<x_i} [x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < y < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n].$$

On note $h^\bullet$ la cohomologie de $c^\bullet(P)$.

Remarque :

Quand P est borné, $h^n(P) = \tilde{H}^{n-2}(P \backslash \{\hat{0}, \hat{1}\})$.

Cohomologie des posets de partitions

Proposition (Hanlon, 81 ; Stanley, 82 ; Joyal 85)

Le poset des partitions de V, $\Pi(V)$, a un unique groupe de cohomologie non trivial, dont la dimension est donnée par :

$$\mu(\Pi(V)) = (|V| - 1)!$$

De plus, l'action du groupe symétrique sur cette homologie est :

$$h^{n-1}(\Pi(V)) = \mathrm{Lie(V)} \otimes_{\mathfrak{S}_V} \mathrm{sgn},$$

où sgn *est la représentation signature.*

$\mathrm{Lie}(\{1,2\}) = \mathbb{K}.\{[1;2]\}$ avec $[1;2] = -[2;1]$
$\mathrm{Lie}(\{1,2,3\}) = \mathbb{K}.\{[[1;2];3],[[1;3];2]\}$
avec $[[1;2];3] + [[2;3];1] + [[3;1];2] = 0$ (relation de Jacobi)
$\mathrm{Lie}(\{1,\ldots,n\}) = \mathbb{K}.\{[\ldots[1;\sigma(2)]\sigma(3)]\ldots\sigma(n)], \sigma \in \mathfrak{S}(\{2,\ldots,n\})\}$
[Reutenauer]

Construction (co)bar à niveaux [Fresse, 02]

$\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}\{5\}\{6\}\{7\}\{8\}\{9\}$

$\{1,5\}\{2\}\{3\}\{4\}\{6\}\{7\}\{8\}\{9\}$

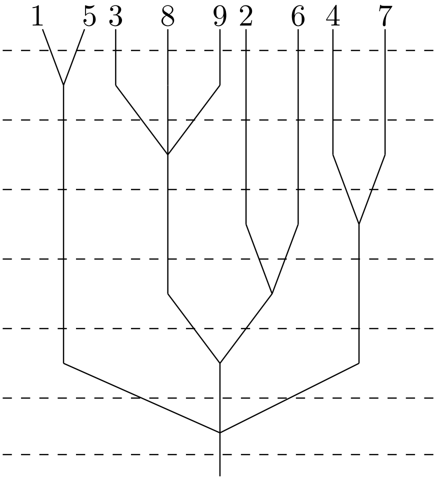
$\{1,5\}\{2\}\{3,8,9\}\{4\}\{6\}\{7\}$

$\{1,5\}\{2\}\{3,8,9\}\{4,7\}\{6\}$

$\{1,5\}\{2,6\}\{3,8,9\}\{4,7\}$

$\{1,5\}\{2,3,6,8,9\}\{4,7\}$

$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$



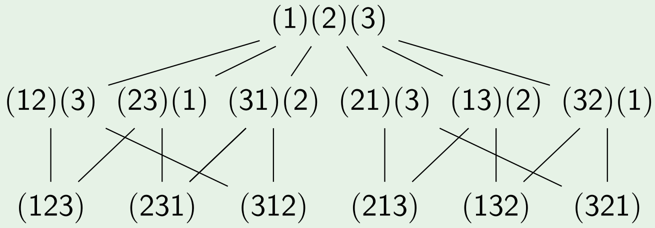
Posets de partitions décorées [Vallette, 07]

Définition

Soit $\mathcal{P}$ une opérade ensembliste connexe ($\mathcal{P}(\varnothing) = \varnothing$ et $\mathcal{P}(\{*\}) = \{*\}$).
Une **partition $\mathcal{P}$-décorée** d'un ensemble fini V est une paire (π, ξ), où π est une partition de V et $\xi = (\xi_T)_{T\in\pi}$, avec $\xi_T \in \mathcal{P}(T)$ pour tout $T \in \pi$.
L'ensemble des partitions $\mathcal{P}$-décorées de V est munie d'un ordre partiel

$$(\alpha, \eta) \leqslant (\beta, \xi) \Leftrightarrow \alpha \leqslant_{\Pi(V)} \beta, \forall A \in \alpha, \exists \nu_A \in \mathcal{P}(\beta_{|A}) \text{ s.t. } \eta_A = \nu_A \circ (\xi_B)_{B\in\beta_{|A}}.$$

Partitions Assoc-décorées de $\{1, 2, 3\}$



Basiques

Définition

Une opérade ensembliste $\mathcal{P}$ est

- Basique à gauche ssi $\prod_{T\in\pi}\mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(S)$, $(\xi_T)_{T\in\pi} \mapsto \nu \circ (\xi_T)_{T\in\pi}$ est injective
- Basique à droite ssi $\mathcal{P}(\pi) \to \mathcal{P}(S)$, $\nu \mapsto \nu \circ (\xi_T)_{T\in\pi}$ est injective

Exemples and contre-exemples

- Perm est basique à droite, mais pas à gauche.
- L'opérade quadratique avec deux générateurs $\dashv$ et $\vdash$ et les relations suivantes est basique à gauche mais pas à droite.

$$\begin{aligned} (a \dashv b) \vdash c &= (a \dashv b) \dashv c & \qquad (a \vdash b) \vdash c &= (a \vdash b) \dashv c \\ a \vdash (b \dashv c) &= a \dashv (b \dashv c) & \qquad a \vdash (b \vdash c) &= a \dashv (b \vdash c) \end{aligned}$$

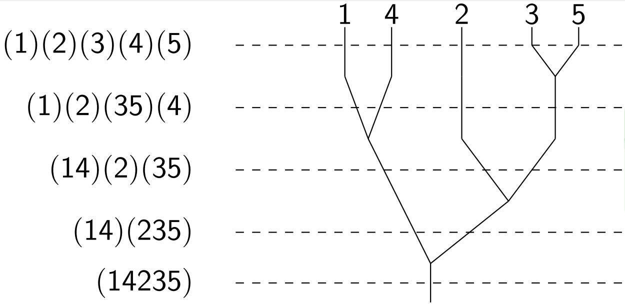
- Assoc et Comm sont à la fois basiques à gauche et à droite.

Posets de partitions décorées [Vallette, 07]

Théorème (Vallette, 07)

Quand $\mathcal{P}$ est basique à droite, l'opérade vectorielle $\mathbb{K}\mathcal{P}$ est Koszul ssi les posets associés $\Pi^{\mathcal{P}}(V)$ ont un unique groupe de cohomologie non trivial (Cohen-Macaulay), pour tout V.
De plus, dans ce cas, notant $(\mathbb{K}\mathcal{P})^!$ son dual de Koszul, l'unique groupe de cohomologie non trivial est donné par :

$$h^{|V|-1}(\Pi^{\mathcal{P}}(V)) \simeq s^{n-1}\,(\mathbb{K}\mathcal{P})^!\,(V) \otimes_{\mathfrak{S}_V} \mathrm{sgn} =: \Lambda^{-1}\,(\mathbb{K}\mathcal{P})^!\,(V).$$



Cas associatif

Arbres **plans** à niveaux.

Cohomologie des posets d'hyperarbres

Theorem (Conjecture de Chapoton, ; prouvée dans 0.,13)

Le poset augmenté des hyperarbres $\widehat{HT}(V)$ est Cohen-Macaulay et

$$\tilde{H}^{|S|-3}(\widehat{HT}(S)\backslash\{\hat{0},\hat{1}\}) = \Lambda^{-1}\widehat{\mathsf{PreLie}}(S),$$

pour tout ensemble fini S.

Cohomologie des posets d'hyperarbres

Theorem (Conjecture de Chapoton, ; prouvée dans 0.,13)

Le poset augmenté des hyperarbres $\widehat{HT}(V)$ *est Cohen-Macaulay et*

$$\tilde{H}^{|S|-3}(\widehat{HT}(S)\backslash\{\hat{0},\hat{1}\}) = \Lambda^{-1}\widehat{\mathrm{PreLie}}(S),$$

pour tout ensemble fini S*.*

Question

Pourquoi une opérade apparaît-elle ici ?

Cohomologie des posets d'hyperarbres

Theorem (Conjecture de Chapoton, ; prouvée dans 0.,13)

Le poset augmenté des hyperarbres $\widehat{HT}(V)$ *est Cohen-Macaulay et*

$$\tilde{H}^{|S|-3}(\widehat{HT}(S)\backslash\{\hat{0},\hat{1}\}) = \Lambda^{-1}\widehat{\mathsf{PreLie}}(S),$$

pour tout ensemble fini S*.*

Question

Pourquoi une opérade apparaît-elle ici ?

Réponse

On peut munir la famille des posets d'hyperarbres d'une structure d'espèce en posets opéradiques.

Espèces en posets opéradiques

Propriétés des posets de partitions

Proposition (Folklore)

Pour toute partition $\pi \in \Pi(S)$, nous avons les isomorphismes de posets suivants

$$\varphi_\pi : \Pi_{\leqslant \pi}(S) \xrightarrow{\sim} \Pi(\pi) \qquad \textit{and} \qquad \psi_\pi : \Pi_{\geqslant \pi}(S) \xrightarrow{\sim} \prod_{T \in \pi} \Pi(T)$$

définis par $\alpha \mapsto \{\pi_{|T}, T \in \alpha\}$ et $\beta \mapsto (\beta_{|T})_{T \in \pi}$ respectivement.

Exemples

Soient $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et $\pi = \{T_1, T_2, T_3\} =: T_1|T_2|T_3$, avec $T_1 = \{a, b, c\},\ T_2 = \{d, e\},\ T_3 = \{f, g\}$.

$$\varphi_\pi(x) = \varphi_\pi(abcde|fg) = 12|3 =: x/\pi$$
$$\psi_\pi(a|bc|d|e|fg) = (a|bc, d|e, fg)\,.$$

Composition des cochaînes

Soient S un ensemble fini et π une partition de S.
Notant κ le morphisme de Künneth, on a l'application suivante :

$$c^{\bullet}(\Pi(\pi)) \otimes \bigotimes_{T\in\pi} c^{\bullet}(\Pi(T)) \overset{id\otimes\kappa}{\longrightarrow} c^{\bullet}(\Pi(\pi)) \otimes c^{\bullet}\left(\prod_{T\in\pi} \Pi(T)\right)$$
$$\overset{\varphi_\pi^*\otimes\psi_\pi^*}{\longrightarrow} c^{\bullet}(\Pi_{\leqslant\pi}(S)) \otimes c^{\bullet}(\Pi_{\geqslant\pi}(S)) \to c^{\bullet}(\Pi(S)).$$

Ceci ne permet pas de définir une opérade différentielle graduée sur $c^{\bullet}$ (manque d'associativité et de commutativité) mais cela induit une structure d'opérade graduée sur la cohomologie du complexe qui est exactement $\Lambda^{-1}Lie$.

Espèce en posets opéradique

Soit P une espèce en posets, avec $a : P \to \Pi$, tel que pour tout ensemble fini S, $a(S) : P(S) \to \Pi(S)$ **strictement croissante.**
Considérons

$$\varphi_x : P_{\leqslant x}(S) \to P(\pi) \qquad \text{et} \qquad \psi_x : P_{\geqslant x}(S) \to \prod_{T \in \pi} P(T)$$

Définition

L'espèce en poset P avec a, φ_x et ψ_x est une espèce en posets opéradique si

- $\varphi_\pi \circ a = a \circ \varphi_x, \quad \psi_\pi \circ a = a \circ \psi_x$
- φ_x et ψ_x satisfont de plus des axiomes d'équivariance, d'associativité et d'unité.

Théorème (D.O. - Dupont, 24+)

$h^\bullet(P)$ est munie d'une structure d'opérade vectorielle graduée.

Conséquences de la construction

Théorème (D.O. - Dupont, 24+)

$h^\bullet(P)$ est munie d'une structure d'opérade vectorielle graduée.

Proof: On construit le morphisme
$\rho_\pi : h^\bullet(P(\pi)) \otimes \bigotimes_{T\in\pi} h^\bullet(P(T)) \to h^\bullet(P(S))$ pour tout $\pi \in \Pi(S)$.

$\square$

Contre-exemple

La famille des posets booléens ne peut pas être munie d'une structure d'espèce en posets opéradiques (pour des raisons de dimension et de degré).

Premier exemple : posets de partitions décorées à droite $\Pi^{\mathcal{P}}$ aka posets de partitions généralisées de Vallette

- $a(\pi, \xi) = \pi$
- $\varphi_{(\pi,\xi)}((\alpha, \eta)) = (\alpha/\pi, \nu)$ (avec $\eta_A = \nu_A \circ (\xi_P)_{P \in \pi_{|A}}$ pour toute part A de α): ce n'est PAS un isomorphisme de posets.
- $\psi_{(\pi,\xi)}((\beta, \nu)) = \prod_{T \in \pi} \beta_{|T}$: c'est un isomorphisme de posets.

Proposition (D.O. - Dupont, 24+)

$\Pi^{\mathcal{P}}$ *est une espèce en posets opéradique.*

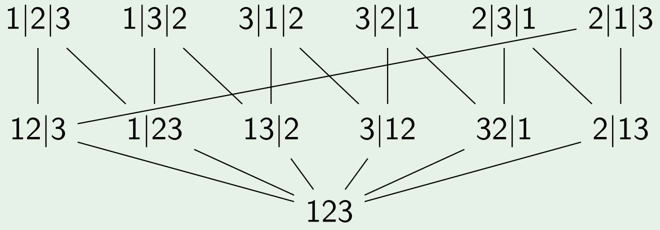
2^{nd} exple : posets de partitions décorées à gauche ${}^{\mathcal{P}}\Pi$

Définition

Soit $\mathcal{P}$ une opérade ensembliste avec $\mathcal{P}(\varnothing) = \varnothing$ et $\mathcal{P}(\{*\}) = \{*\}$.
Une **partition $\mathcal{P}$-décorée à gauche** d'un ensemble fini V est une pair (π, ξ), où π est une partition de V et $\xi \in \mathcal{P}(\pi)$. L'ensemble des partitions $\mathcal{P}$-décorées à gauche de V est muni de l'ordre partiel suivant

$$(\alpha, \nu) \leqslant (\beta, \eta) \Leftrightarrow \alpha \leqslant_{\Pi(V)} \beta, \eta = \nu \circ (\xi_A)_{A \in \alpha}.$$

${}^{\mathrm{Assoc}}\Pi(\{1,2,3\})$, le treillis des faces du permutoèdre



2^{nd} exple : posets de partitions décorées à gauche ${}^{\mathcal{P}}\Pi$

- $a(\pi, \xi) = \pi$
- $\varphi_{(\pi,\xi)}((\alpha, \eta)) = (\alpha/\pi, \tilde{\eta})$, où $\tilde{\eta}$ est la décoration de $\mathcal{P}(\alpha/\pi)$ induite par η : c'est un isomorphisme de posets.
- $\psi_{(\pi,\xi)}((\beta, \eta)) = \prod_{T\in\pi}(\beta_{|T}, \mu_T)$, où $\eta = \xi \circ (\mu_T)_{T\in\pi}$: ce n'est PAS un isomorphisme de posets.

Proposition (D.O. - Dupont, 24+)

Quand $\mathcal{P}$ est basique à gauche, ${}^{\mathcal{P}}\Pi$ est une espèce en posets opéradique.

D'autres cohomologies

En considérant

$$\check{c}^{k}(P) = \mathbb{K}.\{x_0 < \ldots < x_k | x_0 \in \min(P)\}$$

$$\hat{c}^{k}(P) = \mathbb{K}.\{x_0 < \ldots < x_k | x_k \in \max(P)\}$$

nous obtenons les morphismes

$$\check{\rho}_\pi : h^\bullet(P(\pi)) \otimes \bigotimes_{T \in \pi} \check{h}^\bullet(P(T)) \to \check{h}^\bullet(P(S)).$$

$$\hat{\rho}_\pi : \hat{h}^\bullet(P(\pi)) \otimes \bigotimes_{T \in \pi} h^\bullet(P(T)) \to \hat{h}^\bullet(P(S)).$$

Proposition (D.O. - Dupont, 24+)

$\check{h}^\bullet(P)$ est un $h^\bullet(P)$-module opéradique à gauche.
$\hat{h}^\bullet(P)$ est un $h^\bullet(P)$-module opéradique à droite.

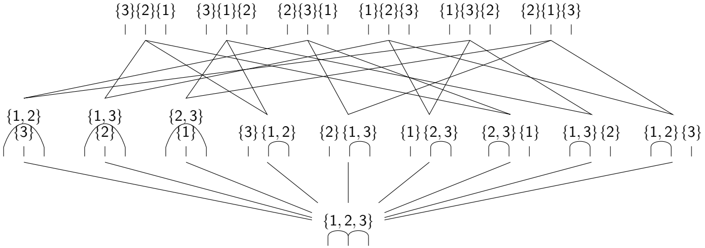
Exemples d'espèces en posets opéradiques

Premier exemple : fonctions de parking

Définition

Étant donné un ensemble fini S, une S-fonction de parking est

- une partition non-croisée $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ de $\{1, \ldots, |S|\}$ (où les parts sont ordonnées selon l'élément minimal) ,
- dont chaque part est étiquetée par un sous-ensemble de S de même taille,
- tels que les ensembles d'étiquettes forment une partition de S,



Proposition (DO–Josuat-Vergès–Randazzo, 22; Kreweras, 72)

Pour un ensemble fini S, le poset augmenté $\Pi_2(S) \cup \hat{1}$ et les intervalles maximaux de $\Pi_2(S)$ sont décortiquables, et donc Cohen–Macaulay.

$$\dim h^{n-1}(\Pi_2(\{1, \ldots, n\})) = n! C_n = (2n-2)(2n-1)\ldots n,$$

où C_n est le nième nombre de Catalan. En tant que $\mathfrak{S}_n$-module, il est composé de C_n copies de la représentation régulière.

Proposition

L'espèce en posets Π_2 est une espèce en posets opéradique.

Proposition

L'égalité suivante est vérifiée dans $h^2(\Pi_2(3))$:

$$(1 \prec 2) \prec 3 + 1 \prec (2 \prec 3) + (1 \prec 3) \prec 2 + 1 \prec (3 \prec 2) = 0.$$

En particulier, $a^* : \Lambda^{-1}\mathrm{Lie} \to h^\bullet(\Pi_2)$ se factorise par $\Lambda^{-1}\mathrm{PreLie}$.

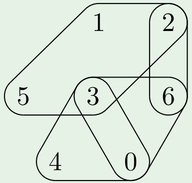
Hypergraphes

Définition (Berge)

Un hypergraphe (sur un ensemble V) est un couple (V, E) où :

- V est un ensemble fini (sommets)
- E est un ensemble de sous-ensembles de taille au moins 2 de V (arêtes).

Exemple d'un hypergraphe sur $[1; 7]$



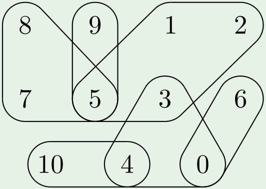
Hyperarbres

Définition

Un hyperarbre est un hypergraphe non vide H tel que, pour tous sommets distincts v et w de H,

- il existe une marche de v à w dans H à arêtes distinctes e_i, (H est connexe),
- et cette marche est unique, (H est acyclique).

Exemple d'un hyperarbre

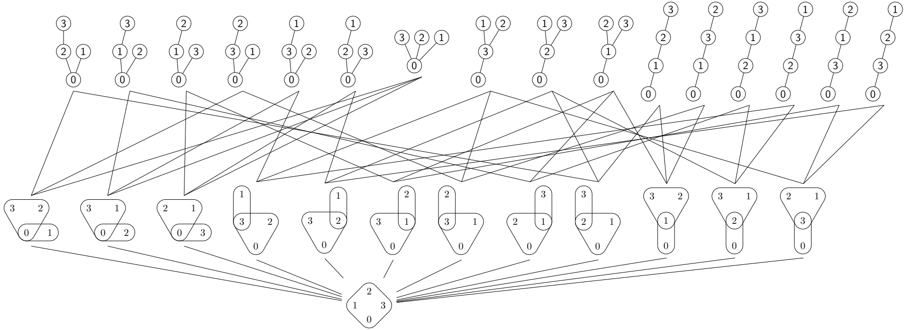


Le poset des hyperarbres

Définition

Soit I un ensemble fini de cardinal n, S et T deux hyperarbres sur I.

$$S \preceq T \iff \text{Toute arête de } S \text{ est union d'arêtes de } T$$



Caractéristique d'Euler des posets d'hyperarbres

Proposition (McCammond–Meier, 2004)

La dimension de l'unique groupe de cohomologie non trivial de $\widehat{\mathrm{HT}}_n$ *est donnée par :*

$$\dim\left(H^{n-2}(\widehat{\mathrm{HT}}_n)\right) = (-1)^{n-1}(n-1)^{n-2}$$

Proposition (DO–Dupont, 24+)

La dimension de l'unique groupe de cohomologie non trivial de HT_n *est donnée par :*

$$\dim\left(H^{n-2}(\mathrm{HT}_n)\right) = (-1)^n \frac{(2n-3)!}{(n-1)!}$$

$$\frac{(2n-3)!}{(n-1)!} \ ?$$

A006963	Number of planar embedded labeled trees with n nodes: (2n-3)!/(n-1)! for n >= 2, a(1) = 1. (Formerly M3076)	28

1, 1, 3, 20, 210, 3024, 55440, 1235520, 32432400, 980179200, 33522128640, 1279935820800, 53970627110400, 2490952020480000, 124903451312640000, 6761440164390912000, 393008709555221760000, 24412776311194951680000, 1613955767240110694400000 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

OFFSET 1,3

COMMENTS For n>1: central terms of the triangle in A173333; cf. A001761, A001813. - Reinhard Zumkeller, Feb 19 2010

Can be obtained from the Vandermonde permanent of the first n positive integers; see A093883. - Clark Kimberling, Jan 02 2012

All trees can be embedded in the plane, but "planar embedded" means that orientation matters but rotation doesn't. For example, the n-star with n-1 edges has n! ways to label it, but rotation removes a factor of n-1. Another example, the n-path has n! ways to label it, but rotation removes a factor of 2. - Michael Somos, Aug 19 2014

REFERENCES N. J. A. Sloane and Simon Plouffe, The Encyclopedia of Integer Sequences, Academic Press, 1995 (includes this sequence).

LINKS Vincenzo Librandi, Table of n, a(n) for n = 1..200

David Callan, A quick count of plane (or planar embedded) labeled trees.

Ali Chouria, Vlad-Florin Drăgoi, and Jean-Gabriel Luque, On recursively defined combinatorial classes and labelled trees, arXiv:2004.04203 [math.CO], 2020.

Robert Coquereaux and Jean-Bernard Zuber, Maps, immersions and permutations, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 25, No. 8 (2016), 1650047; arXiv preprint, arXiv:1507.03163 [math.CO], 2015-2016.

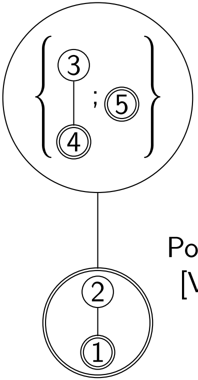
INRIA Algorithms Project, Encyclopedia of Combinatorial Structures 109.

Bradley Robert Jones, On tree hook length formulas, Feynman rules and B-series, Master's thesis, Simon Fraser University, 2014.

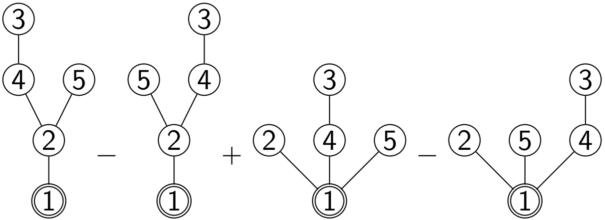
Pierre Leroux and Brahim Miloudi, Généralisations de la formule d'Otter, Ann. Sci.

L’opérade Post-Lie [Vallette, 07 ; Munthe-Kaas–Wright, 08]

Le $\mathfrak{S}$-module sous-jacent PostLie(V) de l’opérade post-Lie est engendré par les crochets de Lie d’arbres plans sur V. La substitution d’un arbre t dans un sommet v est la somme de toutes les manières de greffer les fils de v à droite d’un sommet de t (produit pré-Lie planaire).



$=$ PostLie [Val.]



Proposition

L’e.v. des opérations n-aires de l’opérade Post-Lie operad a pour dimension $\#\,\text{Post-Lie}(n) = \frac{(2n-1)!}{n!}$.

L'espèce des posets d'hyperarbres est une espèce en posets opéradiques

Soit H un hyperarbre sur S et E' l'ensemble des arêtes de H privées du sommet le plus proche de 0.

- $a(H) = E'$
- $\varphi_H(G) =$hyperarbre induit par G sur $S/V(H)$
- $\psi_H(J) = \prod_{e \in E'} J_{|e}$

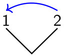
Proposition (D.O. - Dupont, 24+)

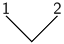
HT est une espèce en posets opéradique.

Opérade sur la cohomologie du poset (aka. post-Lie !)

Considérons l'application

$$\text{Post-Lie} \xrightarrow{\phi} h^{\bullet}(HT_{\bullet})$$

$$1 \lhd 2 \mapsto$$ 

$$\{1;2\} \mapsto$$ 

Théorème (DO–Dupont, 22+)

ϕ est un morphisme d'opérade. L'opérade sur la cohomologie des posets d'hyperarbres est la désuspension de l'opérade post-Lie.

Structure de module opéradique à gauche

En considérant les chaînes dont le minimum est un élément minimal du poset, nous prouvons que l'opérade pré-Lie est un post-Lie-module à gauche avec les opérations suivantes :

$$
\begin{aligned}
1 \lhd T &= 1 \leftharpoondown T, \\
(G \leftharpoondown D) \lhd T &= (G \lhd T) \leftharpoondown D + G \leftharpoondown (D \lhd T) \\
\{S, T\} &= T \leftharpoondown S - S \leftharpoondown T,
\end{aligned}
$$

où $\leftharpoondown$ est le produit pré-Lie.

À faire

- Étudier la structure d'opérade cyclique sur la cohomologie.
- Définir directement la structure d'opérade sur les ensembles nichés associé à l'ensemble de construction minimal [relié au travail de B. Coron]
- D'autres exemples ? (par exemple partitions et hyperarbres bidécorés)

À faire

- Étudier la structure d'opérade cyclique sur la cohomologie.
- Définir directement la structure d'opérade sur les ensembles nichés associé à l'ensemble de construction minimal [relié au travail de B. Coron]
- D'autres exemples ? (par exemple partitions et hyperarbres bidécorés)

Merci de votre attention !