Bases des mathématiques
Feuille n° 3 Combinatoire et sommation

Sommation

Exercice 1 :
Vérifier les formules suivantes (la raison est toujours r).

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors $\Sigma_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{2u_0+nr}{2}$
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, alors $\Sigma_{k=0}^{n} u_k = u_0\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ (si $r \neq 1$)

Exercice 2 :
Dans un élevage de lapin, l'éleveur constate que chaque année, le nombre de naissance de lapins dans l'exploitation est proportionnelle au nombre de naissances de l'année précédente, avec un même coefficient de proportionnalité. Il y a eu 20 lapereaux la première année et 25 la deuxième. Combien de lapin y a-t-il dans l'exploitation au bout de 5 ans (en supposant qu'il n'y a ni décès, ni vente) ?

Exercice 3 :
Exprimer le retour de la fonction $f(n)$ sous forme de somme (avec Σ) avant de le calculer explicitement.

```
def f(n):
   S=1
   for i in range(n):
     S=S+f(i)
   return S
```

Exercice 4 :
Démontrer la *formule de Nicomaque* :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

Exercice 5 :
Montrer les identités suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$
4. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 6 :
Utiliser la somme téléscopique $S_n = \sum_{k=0}^{n}((k+1)^2 - k^2)$ pour calculer $\sum_{k=0}^{n} k$.

Double sommation et double comptage

Exercice 7 :
On se donne des nombres $a_{i,j}$ pour i et j dans $\mathbb{N}$. Développez l'expression suivante avec deux symboles $\sum$ de deux façons : d'abord en sommant j puis i, et ensuite en sommant sur i puis j :

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} a_{i,j}$$

Exercice 8 :
On se donne des nombres $a_{i,j}$ pour i et j dans $\mathbb{N}$. Combien vaut le calcul suivant ?

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{i,j} - \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} - \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{i} a_{i,j}$$

Exercice 9 : formulaire
Combien y-a-t-il de façons de colorier k cases d'une rangée de n cases ? Utiliser cette interprétation pour montrer combinatoirement les formules suivantes :

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (Relation de Pascal)
3. $\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$
4. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
5. $\sum_{p=k}^{n} \binom{p-1}{k-1} = \binom{n}{k}$
6. si $n \geqslant p \geqslant 1$, $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$ (Formule du pion)
7. si $n \geqslant p \geqslant 1$, $p\binom{n}{p} = (n-p+1)\binom{n}{p-1}$

Combinatoire

Exercice 10 :
1. Décrire tous les graphes non orientés sur l'ensemble de sommets $\{1, 2, 3\}$.
2. Même chose pour l'ensemble de sommets $\{1, 2, 3, 4\}$.

Comment être sûr de les avoir tous trouvés ? En les comptant ! Rendez-vous à l'exercice 12.

Exercice 11 :
Développer $(1 + x)^5$.

Exercice 12 :
1. Combien d'arêtes possède le graphe non orienté complet à n sommets ?
2. Combien y a-t-il de graphes non orientés ayant pour ensemble de sommets $[\![1, n]\!]$?

Exercice 13 :
Pour $k \leqslant n$, montrer
$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$
en utilisant la relation de Pascal. Ensuite, essayer de le montrer par récurrence.
Interpréter le résultat dans le triangle de Pascal.

Exercice 14 :
Calculer avec la formule du binôme de Newton

1. $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$.
2. $\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p}$, $n > 0$.
3. $\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}$.

Interpréter ces résultats dans le triangle de Pascal.

Exercice 15 : mots

1. Combien y a-t-il de mots de 16 bits ayant exactement 8 bits égaux à 1 ? au moins 8 ?

2. Combien peut-on former de mots de longueur n sur l'alphabet $A = \{a, b, c, d\}$? Combien d'entre eux sont des palindromes ?

3. Combien de mots différents peut-on écrire avec les lettres du mot « LICENCE », chaque lettre du mot devant être utilisée une unique fois ?

4. Combien de mots peut-on former avec n lettres dont m sont identiques et les autres toutes distinctes ?

Exercice 16 : Enigma
Dans l'une des versions de la machine Enigma pour encoder les messages secrets, 3 rouleaux étaient choisis parmi un ensemble de 5 et placés dans un certain ordre sur la machine. Chaque jour, un ensemble ordonné différent de trois rouleaux était choisi, de manière à ce qu'aucun des rouleaux ne soit à la même position que le jour d'avant. Étant donné l'arrangement d'un jour donné, combien y avait-il de configurations possibles le lendemain ?

DIY

Exercice 17 :
Soit
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}$$
Calculer S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 puis montrer la formule pour S_n par récurrence.

Exercice 18 :

On note F_n les nombres de Fibonacci, vérifiant $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et $F_0 = F_1 = 1$. Montrer que si n est pair,

$$\sum_{k=0}^{n/2} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$$

et si n est impair :

$$\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$$

On procédera par récurrence forte, et on pourra utiliser la relation de Pascal.
Interpréter le résultat dans le triangle de Pascal.

Exercice 19 : pavages de Fibonacci

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble $\mathcal{F}_n$ des pavages d'une bande de n cases par des tuiles carrées $\blacksquare$ et des dominos $\boxminus$. On note $\mathcal{F}_n^{\blacksquare}$ et $\mathcal{F}_n^{\boxminus}$ les sous-ensembles de $\mathcal{F}_n$ constitués des pavages dont la dernière tuile est respectivement un $\blacksquare$ ou un $\boxminus$.
Par exemple, $\boxminus\blacksquare\blacksquare\boxminus\blacksquare\boxminus\boxminus\blacksquare$ est un élément de $\mathcal{F}_{12}$.

1. On note $f_n = |\mathcal{F}_n|$. Calculer f_n pour tout $n \in [\![0, 4]\!]$, Justifier que $f_0 = f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 3$ et $f_4 = 5$.
2. Pour tout $n \geqslant 2$, décrire une bijection entre $\mathcal{F}_n^{\blacksquare}$ et $\mathcal{F}_{n-1}$, et entre $\mathcal{F}_n^{\boxminus}$ et $\mathcal{F}_{n-2}$. En déduire que $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, pour tout $n \geqslant 2$.

Chercher ensuite des démonstrations combinatoires des égalités suivantes, valables pour tous m et n positifs avec la convention $f_{-1} = 0$:

3. $f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$ *(indication : pour interpréter le membre de gauche, couper juste avant le dernier* $\boxminus$*, s'il existe)*
4. $f_0 + f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1}$
(remarquer que les pavages de longueur $2n + 1$ contiennent au moins une tuile $\blacksquare$*)*
5. $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n} - 1$
(considérer les pavages de longueur $2n$ utilisant au moins une tuile $\blacksquare$*)*
6. $f_{2n} = f_n^2 + f_{n-1}^2$
7. $f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$
(on pourra distinguer 2 cas selon que les cases m et $m + 1$ sont dans la même pièce ou non)
8. $\forall n \geqslant 2, \quad 2f_n = f_{n+1} + f_{n-2}$ par double comptage des éléments de $\mathcal{F}_n \times \{\blacksquare, \boxminus\}$.
(indication : décrire deux applications de $\mathcal{F}_n^{\blacksquare}$ vers $\mathcal{F}_{n+1}$; peut-on effectuer les mêmes constructions sur les éléments de $\mathcal{F}_n^{\boxminus}$?)
9. $f_{2n+2} = f_{n+1} f_{n+2} - f_{n-1} f_n$

Exercice 20 :

Lors d'une compétition, 20 équipes s'affrontent. Les trois premières équipes auront des médailles d'or, d'argent et de bronze et les quatre dernières seront reléguées dans une autre ligue. Deux classements de la compétition sont *vraiment différents* si les trois premiers des deux classements diffèrent ou si les quatre équipes reléguées ne sont pas les mêmes d'un classement à l'autre. Combien de classements vraiment différents existent-ils ?

Exercice 21 :

Il y a 12 livres sur une étagère. De combien de façons peut-on choisir 5 de ces livres sans choisir deux livres côte à côte ?