



Bases des mathématiques

Feuille n° 2 Cardinal, applications, suites

I) Cardinal d'un ensemble et applications

Exercice 1 :

Dans une classe de terminale, il y a 36 élèves dont 25 qui ont pris la spécialité mathématiques et 20 qui ont pris la spécialité Physique. Combien d'élèves au moins ont pris ces deux spécialités ?

Exercice 2 :

Soient $f : E \rightarrow F$ une application et A et A' sont deux sous-ensembles de E . Montrer que si f est injective, alors $f(A \cap A') \supseteq f(A) \cap f(A')$, $A \supseteq f^{-1}(f(A))$ et $f(A \setminus A') \subseteq f(A) \setminus f(A')$.

Exercice 3 :

Soient $f : E \rightarrow F$ une application et B un sous-ensemble de F . Montrer que $B \subseteq f(f^{-1}(B))$. Montrer que cette inclusion est une égalité si et seulement si f est surjective.

Exercice 4 :

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux bijections. Montrer que $g \circ f$ est une bijection.

Exercice 5 : Fonctions

Soit $A = \llbracket 1; 3 \rrbracket$ et $B = \llbracket 1; 5 \rrbracket$. Combien y-a-t-il de ...

1. fonctions de A vers B ? ...de B vers A ?
2. fonctions injectives de A vers B ? ...de B vers A ?
3. fonctions surjectives de A vers B ? ...de B vers A ?
4. fonctions bijectives de A vers B ? ...de B vers B ?

II) Principes de multiplication et addition

Exercice 6 : Problème de domino

De combien de façons différentes est-il possible de choisir un domino, puis un deuxième qui a une face en commun avec le premier ? Pour rappel, il y a 7 dominos de la forme (a, a) et 21 de la forme (a, b) , avec $a < b$, dans un jeu de dominos.

Exercice 7 :

J'ai oublié le code de mon digicode !

1. Je me souviens qu'il y a 3 chiffres dans le code. Combien y a-t-il de possibilités ?
2. Je me souviens en plus qu'il n'y a pas deux fois le même chiffre dans le code. Combien y'a-t-il de possibilités ?

Exercice 8 : Petit problème de placement

Quatre enfants, chacun accompagné d'un de ses parents vont au cinéma. Il ne reste qu'une rangée de huit places. Combien de façons ont-ils de s'installer

1. sans imposer de restriction particulière ?
2. en alternant les enfants et adultes ?
3. en groupant les enfants d'une part, et les adultes d'autre part ?
4. en groupant les enfants (mais pas nécessairement les adultes) ?
5. sans séparer les parents de leurs enfants ?

Exercice 9 :

Un blockbuster sort au cinéma. Au jour n , s_n spectateurs vont le voir. Supposons que chaque spectateur convainque 3 de ses amis d'aller voir le film le lendemain et que 50 personnes par jour décide d'aller voir le film. Quelle est la relation entre s_{n+1} et s_n ?

III) Suites arithmético-géométriques**Exercice 10 :**

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Montrer que $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique. Montrer que $u_n^2 = u_{n+1}u_{n-1}$.

Exercice 11 :

Une suite *arithmético-géométrique* est une suite satisfaisant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

pour a et b deux réels donnés.

1. Qu'obtient-on si $a = 1$? Et si $b = 0$?
2. On suppose que $a \neq 1$ et $b \neq 0$ et on pose $c = \frac{b}{1-a}$. On note $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout n par $v_n = u_n - c$. Montrer que v_n est une suite géométrique, et donner sa raison.
3. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour un premier terme u_0 donné.
4. Vérifier votre résultat par une induction.

Exercice 12 :

Dans un élevage de lapin, l'éleveur constate que chaque année, le nombre de naissance de lapins dans l'exploitation est proportionnelle au nombre de naissances de l'année précédente, avec un même coefficient de proportionnalité. Il y a eu 20 lapereaux la première année et 25 la deuxième. Combien de lapereaux l'exploitation compte-t-elle la dixième année ?

Exercice 13 :

Une *suite harmonique* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dont les termes ne s'annulent pas, et telle que la suite des inverses $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

1. Donner un exemple simple de suite harmonique.
2. Donner le terme général d'une suite harmonique.

IV) DIY

Exercice 14 : Système de numération

Nous comptons usuellement en base 10 et la mémoire des ordinateurs est adaptée à la base 2. En se plaçant en base n (qui utilise les chiffres de 0 à $n - 1$), combien d'entiers naturels peut-on décrire avec au plus k chiffres ? et avec exactement k chiffres (dont le premier non nul) ?

Exercice 15 : Jeu de cartes

Une main de cinq cartes est sélectionnée parmi un paquet de $4n$ cartes. Pour chaque couleur (coeur, carreau, trèfle, pique), il y a n cartes ($n > 5$) numérotées de 1 à n .

1. Combien de mains y a-t-il contenant

- a. une quinte flush (cinq cartes consécutives de la même couleur) (exemple : 7,6,5,4,3 de coeur)
- b. un carré (quatre cartes avec le même numéro et la cinquième différente) (exemple : 4 des quatre couleurs et 2 de pique)
- c. un full (trois cartes d'un numéro et deux autres d'un autre numéro) (exemple : 7 de pique, trèfle et coeur et 3 de pique et trèfle)
- d. une quinte ou suite (cinq cartes consécutives) (exemple : 7 de coeur, 6,5 de pique, 4 de carreau et 3 de trèfle)
- e. une double paire (deux cartes d'un numéro, deux cartes d'un autre numéro et la dernière d'un numéro différent) (exemple : 6 de carreau et pique, 4 de pique et trèfle, 9 de coeur)