Bases des mathématiques
Feuille n° 1 Ensembles, logique et raisonnements

Ensembles et applications

Exercice 1 :
On pose $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ et $C = [-2, 4[$. Déterminer les ensembles $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $C \setminus A$ et $C \cap \mathbb{N}$.

Exercice 2 :
Remplacer les pointillés dans les formules suivantes par le symbole adéquat : « $\in$ », « $\subset$ » ou « $=$ ».
(a) $1 \ \ldots \ \mathbb{N}$; (b) $\{2, 3\} \ \ldots \ \mathbb{N}$; (c) $\{1\} \ \ldots \ \mathbb{N}$; (d) $1 \ \ldots \ \{1\}$;

Exercice 3 :
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. A-t-on nécessairement :

1. $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cap B^c$?

2. $A^c \cap B^c \subseteq (A \cap B)^c$?

3. $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cup B^c$?

Vous commencerez par étudier l'exemple $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ et $E = [\![1; 6]\!]$

Logique et connecteurs

Exercice 4 :

Remplir la table de vérité suivante

A	B	non(A)	non(A) et B	non(B)	(non(A) et B) ou non(B)

Exercice 5 :
Donner la négation, la contraposée et la réciproque des phrases suivantes, puis pour chacune d'elles indiquer si ces phrases, leurs négations et leurs réciproques sont vraies.

1. Si c'est un poisson, alors il sait nager.

2. Tout triangle rectangle est un polygone avec un angle droit.

3. Si n est un entier positif, sa racine carrée est un entier ;

Exercice 6 :

On considère sur l'ensemble $\mathcal{F}$ des ourses, la proposition $P(x,y) =$ « x est la fille de y ». Formaliser avec des quantificateurs les phrases suivantes :

(a) Toute ourse a une fille.
(b) Toute ourse a une mère.
(c) Toutes les ourses ont une même mère.
(d) Toute ourse est fille de toute ourse.
(e) Il y a une ourse qui est la fille de toute ourse.
(f) On peut trouver deux ourses dont l'une est la fille de l'autre.

Exercice 7 :

Démontrer si les propositions qui suivent sont vraies ou fausses.

1. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 5$.
2. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 5$
3. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$
4. $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y > x^2$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y \leqslant z$

Exercice 8 :

Écrire la négation des propositions suivantes.

1. $(A \text{ ou } B) \Rightarrow C$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(y)$.

Exercice 9 : Principe des tiroirs

Démontrer par l'absurde que si vous rangez $n+1$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

Exercice 10 :

Montrer par contraposée que si n^2 est impair, alors n est impair.

Fonctions et applications

Exercice 11 :

Si $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{a,b,c,d\}$, définit-on une application de A dans B avec les recettes suivantes ?

(a) $1 \mapsto a,\ 3 \mapsto d$;
(b) $1 \mapsto a,\ c \mapsto 2,\ 3 \mapsto 1$;
(c) $1 \mapsto c,\ 3 \mapsto b,\ 2 \mapsto a,\ 1 \mapsto d$;
(d) $1 \mapsto d,\ 3 \mapsto a,\ 2 \mapsto d$.

Exercice 12 :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E et $f : E \to E$ une fonction. A-t-on nécessairement

1. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$?

3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$?

4. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$?

5. $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$?

Exercice 13 :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les propriétés suivantes et donner leur négation :

1. f est majorée

2. f est croissante

3. f s'annule

Récurrence

Exercice 14 :

Montrer que tout graphe complet sur n sommets a $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

Exercice 15 :

Montrer que tout entier $n > 0$ admet une expression binaire, c'est-à-dire qu'il existe $c_0 \ldots, c_r \in \{0, 1\}$ tel que $n = c_r 2^r + c_{r-1} 2^{r-1} + \ldots + c_0 2^0$.

Exercice 16 :

Nous allons démontrer par récurrence sur n que si, dans un groupe de n étudiants, il y a au moins une fille, alors il n'y a que des filles.
Initialisation : Pour $n = 1$ c'est évident. En effet s'il y a au moins une fille dans un groupe de 1 étudiant, alors tous les étudiants du groupe sont des filles.
Hérédité : Supposons la propriété établie au rang $n - 1$ et considérons un groupe de n étudiants qui comporte au moins une fille. Choisissons une des filles et appelons-la Alice pour fixer les idées. Choisissons un autre étudiant (garçon ou fille), appelons-le Dominique. Le groupe constitué de tous les étudiants sauf Dominique comporte $n - 1$ étudiants dont au moins une fille (Alice), donc d'après l'hypothèse de récurrence il ne comporte que des filles. Pour conclure il reste juste à montrer que Dominique est une fille. Considérons pour cela le groupe constitué de tous les étudiants sauf Alice. Ce groupe comporte $n - 1$ étudiants, et il contient au moins une fille (puisque tous les étudiants sauf peut-être Dominique sont des filles). En utilisant une nouvelle fois l'hypothèse de récurrence, on en déduit que tous les étudiants de ce groupe sont des filles. En particulier Dominique est une fille, ce qui achève la démonstration.
Où est l'erreur ?

DIY

Exercice 17 :
On appelle *différence symétrique* de deux sous-ensembles A et B de E le sous-ensemble :

$$A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

1. Déterminer $A\Delta E$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta A$

2. Montrer que $A\Delta B = B\Delta A$ et $(A\Delta B)\,\Delta C = A\Delta\,(B\Delta C)$

Exercice 18 :
Faire la table de vérité de $A \Rightarrow (B \text{ ou } C)$.

Exercice 19 :
Un ami vous déclare : « si il pleut, alors je prends mon prarapluie ». Premier cas : vous le rencontrez et vous constatez qu'il a pris son parapluie ; vous vous dites alors qu'il a plu. Second cas : vous le rencontrez et vous constatez qu'il n'a pas son parapluie ; vous vous dites alors qu'il n'a pas plu.

(i) Dans le premier cas, avez-vous utilisé la contraposée ou la réciproque de l'implication ? Dans le second cas, avez-vous utilisé la contraposée ou la réciproque de l'implication ?

(ii) Votre raisonnement dans le premier cas est-il correct ? Et dans le second cas ?

Exercice 20 :
Donner la négation la phrase suivante : "Tous les étudiants travailleront les maths et valideront cette UE."

Exercice 21 :
Contraposer puis écrire la négation de $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$;

Exercice 22 :
Expliquer pourquoi chacun des raisonnements suivants est faux. Lorsque cela est possible, fournir un raisonnement correct.

1. Théorème : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 1$ est divisible par 3.
Preuve par récurrence : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3$. Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si 3 divise $4^n + 1$, alors 3 divise $4^{n+1} + 1$. Donc la propriété est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Théorème : soit $a \neq 0$; alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a^n = 1$.
Preuve par récurrence : Si $n = 0$, $a^n = a^0 = 1$. Soit $n \geqslant 0$, supposons que la propriété est vraie pour tout entier inférieur à n ; alors :

$$a^{n+1} = a^n \times \frac{a^n}{a^{n-1}} = 1 \times \frac{1}{1} = 1.$$

Donc la propriété est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. **Théorème :** soit $n \geqslant 1$; alors dans toute boîte de n crayons, tous les crayons sont de la même couleur.

   Preuve par récurrence : si $n = 1$, c'est vrai. Soit $n \geqslant 1$, supposons que la propriété est vraie pour tout entier inférieur à n, et considérons une boîte de $n + 1$ crayons. Par hypothèse de récurrence, en enlevant un crayon i, les n crayons restants sont tous de la même couleur. En reposant le crayon i et en enlevant un autre crayon j également. Donc les $n + 1$ crayons ont la même couleur.