HAI105X - Bases des mathématiques

B. Delcroix-Oger

Basé sur le poly de HAI105X de F. Fillastre

Université de Montpellier

Semestre d'automne 2023

L1 Informatique

Plan de route

Organisation de l'UE

- 8 séances de Cours en amphi de 1h30
- 16 séances de TD de 1h30
- Évaluation en trois parties :
  - Trois contrôles continus de 30 min (seules les deux meilleurs notes c_1 et c_2 seront retenues)
  - Examen final de 2h
- Calcul de la note finale :

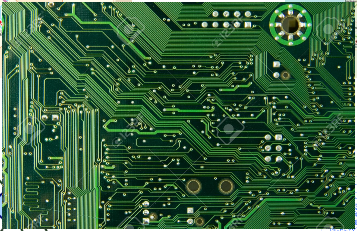
$$\max(examen, 0.6 * examen + 0.4 * (\frac{c_1 + c_2}{2}))$$

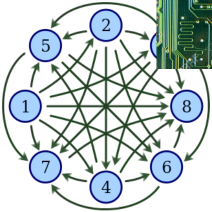
- Calendrier provisoire sur le syllabus

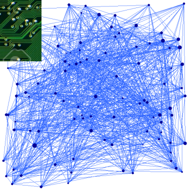
Wooclap


1 Allez sur wooclap.com
2 Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur
Code d'événement
HAI105X1
1 Envoyez @HAI105X1 au 06 44 60 96 62
2 Vous pouvez participer
Copier le lien de participation

Pourquoi des graphes ?





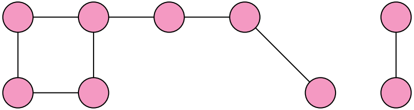


Graphes

Définition

Un graphe non orienté est une paire (V, E) où

- V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets
- E est un ensemble de paires de sommets distincts, appelées arêtes.

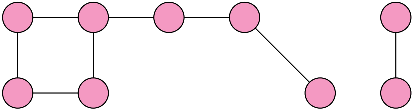


Graphes

Définition

Un graphe non orienté est une paire (V, E) où

- V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets
- E est un ensemble de paires de sommets distincts, appelées arêtes.



Qu'est-ce qu'un ensemble ?

Définition

Un ensemble est une collection (= regroupement) *non ordonnée* d'objets (sans répétition). Un objet de l'ensemble est appelé un élément de l'ensemble, on dit alors qu'il lui appartient.

Si un objet x est dans l'ensemble E (ou "est élément de E" ou encore "appartient à E"), on note $x \in E$. Sinon, on note $x \notin E$.
Un ensemble sera noté entre accolades $\{\ \}$.

Exemples

- $\emptyset := \{\}$ (ensemble vide)
- $\{1, \ldots, n\} = [\![1, n]\!]$
- D'autres exemples et contre-exemples ? **wooclap**

Diagramme de Venn

Opérations sur les ensembles : sous-ensemble

Considérons un ensemble $E = \{x_1, \dots, x_n\} (= \{x_3, x_n, x_1, x_2, x_4, \dots, x_{n-1}\})$.

Définition

Un sous-ensemble S de E, noté $S \subseteq E$, est un ensemble dont tous les éléments sont dans E.
On dit que E est inclus dans E, que S est un sous-ensemble de E, que S est une partie de E ou encore que E contient S.

Attention

Ne pas confondre les symboles $\in$ et $\subseteq$! wooclap
$\subseteq$ ne fait intervenir que des ensembles. Par contre, si $x \in E$, $\{x\} \subseteq E$.

Exemples

- Pour tout ensemble E, $\emptyset \subseteq E$ et $E \subseteq E$
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$, $0 \subseteq \mathbb{R}$

Opérations sur les ensembles : différence et complémentaire

Considérons A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E :

Définition

Le complémentaire de A, noté A^c ou $\bar{A}$,est l'ensemble des éléments qui ne sont pas dans A.
La différence de B et A, noté $B \setminus A$, est l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A.

Exemples

Considérons l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$. Quel est le complémentaire de $\{1,2\}$?
Quelle est la différence de $\{1,2,3\}$ et $\{2,4\}$? wooclap

Remarque

$E \setminus A = A^c (= \bar{A})$

Opérations sur les ensembles : union

Considérons A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E :

Définition

L'union de A et de B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **ou** à B.

Exemple

Quelle est l'union de $\{1, 2\}$ et $\{4, 5\}$ dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$? wooclap

Opérations sur les ensembles : intersection

Considérons A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E :

Définition

L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **et** à B.

Exemple

Quelle est l'intersection de $\{1,2,3\}$ et $\{3,4,5\}$ dans $\{1,2,3,4,5\}$? et de $\{1,2\}$ et $\{3,4,5\}$?wooclap

Deux ensembles sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

Opérations sur les ensembles : récapitulatif

Première démonstration : Comment démontrer $A \subseteq B$?

Il faut prouver que tout (n'importe quel) élément de A est un élément de B.

Méthode

Soit $a \in A$,

...

Donc $a \in B$ $\square$

Exercice

Soit A et B deux ensembles, montrer que $A \cap B \subseteq A \cup B$.

Solution. Si $A \cap B$ est vide, alors le résultat est vrai.
Supposons que $A \cap B$ est non vide.
Soit $x \in A \cap B$.
Alors $x \in A$,
donc $x \in A \cup B$.

Comment démontrer $A = B$?

On peut prouver $A \subset B$ **et** $B \subset A$.

Réponse

Prouvons $A \subset B$

Soit $a \in A$,

$\dots$

donc $a \in B$.

Prouvons $B \subset A$

Soit $b \in B$

$\dots$

donc $b \in A$

On a donc $A = B$ $\square$

Exercice

Soit E un ensemble, et A un sous-ensemble de E. Montrer que $(A^c)^c = A$.

Solution : $A \subseteq (A^c)^c$. wooclap

Opérations sur les ensembles : un peu de pratique !

Proposition

Soient A, B et C trois ensembles :

- $A \setminus B = A \cap B^c$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *et* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(associativité)*
- $A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cap B = B \cap A$ *(commutativité)*
- $\emptyset \cup A = A \cup \emptyset = A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *et* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributivité)*

Démonstration.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ à la page suivante, le reste à faire à la maison en exercice. $\square$

Démonstration.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$\square$

Lois de De Morgan

Proposition

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$$

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$$

Démonstration.

En TD ! (cf. exercice 3 TD1) □

Équivalence de code

```
def f(i):
    if i in [2,4,6,8]:
        print("pair et plus petit que 10")
```

```
def g(i):
    if ((i%2==0) and (0<i)) and (i<10):
        print("pair et plus petit que 10")
```

Logique

Définition

On appelle proposition est un énoncé (assertion) qui a un sens et est soit vrai soit faux (c'est la valeur de vérité de la proposition).

Exemples

Les énoncés « 2 est un nombre pair », « $2+2=7$ », « HAI105X est un cours de première année de Licence », « Aujourd'hui, il a plu » sont des propositions.
« $2+=\times 37-$ », « $3x^2-1$ », « Le premier ministre », « Tais-toi ! », « être un nombre premier », « Non » ne sont pas des propositions.

Variables dans les énoncés

Un énoncé peut dépendre d'une *variable*, c'est-à-dire un élément d'un certain ensemble, par exemple « i est pair » : on affirme quelque chose concernant i dont la valeur de vérité variera en fonction de i.

Définition

On appelle prédicat (ou assertion ouverte) une assertion mathématique qui dépend d'une ou plusieurs variables (et qui a un sens mathématique).

Exemple

- « i est pair » qui porte sur un entier i, et qui est vrai pour $i = 2$ et faux pour $i = 3$ par exemple.
- « $x \leqslant y$ » qui porte sur deux éléments réels x et y, qui est vrai pour $x = 1$ et $y = 2$ mais faux si $x = 3$ et $y = 2$.

Ensembles et logique

Il y a une relation naturelle entre ensemble et proposition : si A est un ensemble $P(x) =$« $x \in A$ » est une proposition. Réciproquement, si $Q(x)$ est une proposition, on peut définir l'ensemble sur lequel Q(x) est vrai. On le note alors $\{x|Q(x)\}$.

Question

Quel est l'analogue pour les propositions de A^c, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \subseteq E$?

Opérations logiques : la négation

Soit A une proposition, la négation de A se note non(A).

Définition

La proposition non(A) est vraie quand A est fausse, et elle est fausse quand A est vraie.

Table de vérité :

A	non(A)
F	V
V	F

Exercice

Valeur de vérité de non$(2+2=4)$? wooclap

Valeur de vérité de non$(2+2=2\times 2)$? wooclap

Valeur de vérité de non(non(2 est pair)) wooclap ?

Remarque

A et non(non(A)) ont la même table de vérité.

Opérations logiques : la conjonction

Soit A et B deux propositions, la conjonction de A et de B se note $A \wedge B$.

Définition

La proposition « $A \wedge B$ » est vraie quand A et B sont vraies, et fausse sinon.

Table de vérité :

A	B	$A \wedge B$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Exercice

Valeur de vérité de : « $(2+2=4) \wedge (1+1=1)$ » **wooclap** ?

Valeur de vérité de : « (2 est pair) et (3 est impair) » **wooclap** ?

Opérations logiques : la disjonction

Soit A et B deux propositions, la disjonction de A et de B se note $A \vee B$.

Définition

La proposition « $A \vee B$ » est vraie quand au moins l'une des propositions A ou B est vraie, et fausse sinon.

Table de vérité :

A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Exercice

Valeur de vérité de : « $(2+2=4) \vee (1+1=2)$ » ? wooclap

Valeur de vérité de : « (2 est impair) ou (3 est impair) » ? wooclap

Opérations logiques : l'implication

Définition

Soit A et B deux propositions, l'implication de A vers B se note $A \implies B$ (« A implique B »).
La proposition $A \implies B$ est fausse uniquement quand A est vraie et B est fausse. Table de vérité :

A	B	$A \implies B$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

L'implication $A \implies B$ est vraie seulement quand A est fausse ou quand A et B sont vraies toutes les deux.

Attention

En d'autres termes, si A est fausse, $A \implies B$ est vraie, mais ça ne dit pas si B est vraie ou fausse !

Exercice

Valeur de vérité de $(1+1=2) \implies (2+2=4)$? **wooclap**
Valeur de vérité de $(x \text{ est impair}) \implies (2x \text{ est pair})$? **wooclap**
Valeur de vérité de $(2 \text{ est impair}) \implies (4 \text{ est impair})$? **wooclap**
Valeur de vérité de $(1+1=3) \implies (2 \text{ est pair})$? **wooclap**

$A \implies B$ peut aussi se lire « Si A est vraie, alors B est vraie ».

Si $A \implies B$ est vraie, alors A est une condition suffisante pour que B soit vraie, et B est une condition nécessaire pour que A soit vraie.

Théorème

Soit A et B deux propositions. Les proposition $A \implies B$ et « $\neg(A) \vee B$ » ont la même table de vérité.

Démonstration

A	B	$A \implies B$	$\neg(A)$	$\neg(A) \vee B$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

□

Exemple

« Si le Père Noël existe, alors je recevrai une Switch en cadeau. »
On peut réécrire cette expression à l'aide de l'opérateur d'implication :
Le Père Noël existe $\implies$ Je recevrai une Switch en cadeau.
On sait que ceci équivaut à l'expression suivante :
non(« Le Père Noël existe. ») ou « Je recevrai une Switch en cadeau. »

Tiré de ▸ Mathématiques pour informaticien MAT-1919 François Laviolette, Josée Desharnais, Pascal Germain

⚠ Attention

Attention aux parenthèses ! ! !

$$(A \implies B) \implies C\,,\, A \implies (B \implies C)$$

$$(A \text{ ou } B) \implies C\,,\, A \text{ ou } (B \implies C), (A \text{ ou } B) \implies C$$

Théorème

Soit A et B deux propositions. $A \implies B$ et $\neg(B) \implies \neg(A)$ ont la même table de vérité.

Définition

$\neg(B) \implies \neg(A)$ est la contraposée de $A \implies B$.

Exercice (Maison)

Prouver ce théorème en faisant les tables de vérité de $A \implies B$ et $\neg(B) \implies \neg(A)$

Remarque

- Il équivalent d'affirmer une implication ou sa contraposée.
- Ne pas confondre la contraposée de $A \implies B$ avec sa réciproque $B \implies A$! Il n'y a aucun lien entre les deux.

Opérations logiques : l'équivalence

Définition

Soit A et B deux propositions, l'équivalence de A et B se note $A \iff B$ (« A équivalent à B »). La proposition $A \iff B$ est vraie seulement quand les propositions A ou B ont même valeur de vérité.

Table de vérité :

A	B	$A \iff B$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Exercice

Valeur de vérité de (2 est impair) $\iff$ (3 est pair) ? **wooclap**

Valeur de vérité de (x est impair) $\iff$ ($2x$ est pair) ? **wooclap**

Valeur de vérité de (x est impair) $\iff$ ($x+1$ est pair) ? **wooclap**

Théorème

Les propositions « $A \iff B$ » et « $(A \implies B) \wedge (B \implies A)$ » ont la même table de vérité.

Exercice (Maison)

Construire la table de vérité de $(A \implies B) \wedge (B \implies A)$ et en déduire ce théorème.

Les opérations “et” et “ou” sont commutatives et associatives, et elles sont distributives l’une par rapport à l’autre : pour A, B et C des propositions :

- $(A \vee B) \iff (B \vee A)$
- $(A \wedge B) \iff (B \wedge A)$
- $((A \vee B) \vee C) \iff (A \vee (B \vee C))$
- $((A \wedge B) \wedge C) \iff (A \wedge (B \wedge C))$
- $(A \wedge (B \vee C)) \iff ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
- $(A \vee (B \wedge C)) \iff ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

Lois de Morgan

Théorème

Soit A et B deux propositions.

$$\neg(A \vee B) \iff (\neg(A) \wedge \neg(B))$$
$$\neg(A \wedge B) \iff (\neg(A) \vee \neg(B))$$

Exercice ((Maison))

Prouver les lois de Morgan en faisant les tables de vérité.

Théorème

Soit A et B deux propositions.

$$(\neg(A \implies B)) \iff (A \wedge \neg(B))$$

Démonstration D'après les théorèmes précédents, $\neg(A \implies B)$ a la même table de vérité que $\neg(\neg(A) \vee B)$, donc que $(\neg(\neg(A)) \wedge \neg(B))$, et enfin que $(A \wedge \neg(B))$. $\square$

Attention

La négation d'une implication **n'est pas** une implication !

Exemple

Soit A=« il pleut » et B=« je prends mon parapluie ». Supposons que $A \implies B$ est vraie. Que dire de sa contraposée et de sa négation ? **wooclap**

Rappels de la dernière séance : Opérations logiques

Négation $\neg()$

A	non(A)
F	V
V	F

Conjonction (Et) $\wedge$

A	B	$A \wedge B$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Disjonction (Ou) $\vee$

A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Implication $\implies$

A	B	$A \implies B$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Rappels de la dernière séance : Tables de vérité

$$\neg(A \vee B) \iff (\neg(A) \wedge \neg(B))$$

A	B	$\neg(B)$	$\neg(A)$	$(\neg(A) \wedge \neg(B))$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$

Rappels de la dernière séance : mantra

Attention

La négation d'une implication **n'est pas** une implication !

Exercice

Donner la négation, la contraposée et la réciproque de la phrase suivante "Si j'ai faim, alors je mange des gâteaux". wooclap

Quantificateurs

On peut aussi vouloir affirmer une assertion pour tous les éléments d'un ensemble ou dire qu'il existe un élément vérifiant l'assertion.

Définition

Soit $P(x)$ une assertion ouverte dépendant d'une variable x d'un ensemble E.
« $\forall x \in E,\ P(x)$ » est l'assertion qui affirme que tous les éléments de E vérifient P.
« $\exists x \in E,\ P(x)$ » est l'assertion qui affirme qu'il existe un élément de E vérifie P.

$\forall$ et $\exists$ sont des quantificateurs.

Exemples

- $\forall n \in \mathbb{N}, n$ est pair vs $\exists n \in \mathbb{N}, n$ est pair.
- $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geqslant 0$ vs $\exists y \in \mathbb{R}, y^2 \geqslant 0$.

Variable muette

Dans les assertions $\forall x \in E, P(x)$ et $\exists x \in E, P(x)$, la variable x est dite muette.
Il est strictement identique d'affirmer $\forall x \in E, P(x)$ et $\forall z \in E, P(z)$, ou encore $\exists x \in E, P(x)$ et $\exists \varphi \in E, P(\varphi)$.

Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ est la même chose que $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geqslant 0$ et que « Le carré de tout réel est positif ».

Exercice

Quelle est la négation de « Tous/tes les étudiant(e)s savent qu'il y a CC la semaine prochaine » ? **wooclap**

Solution Il existe un(e) étudiant(e) qui ne sait pas qu'il y a CC la semaine prochaine.

Exercice

Quelle est la négation de « Il y a un étudiant qui ratera son CC » ? **wooclap**

Solution Aucun étudiant ne ratera son CC.

$$\neg(\forall x \in E,\ P(x)) \iff (\exists x \in E,\ \neg(P(x)))$$

$$\neg(\exists x \in E,\ P(x)) \iff (\forall x \in E,\ \neg(P(x)))$$

⚠ Attention

Les seuls symboles barrés qu'on utilise sont $\notin$ et $\neq$ (les symboles $\not\subset$ et $\nexists$ existent, mais on ne devrait pas en avoir besoin).

Pour prouver une assertion de la forme « $\exists x \in E, P(x)$ », on peut trouver un élément de E qui vérifie la propriété P.

Pour prouver une assertion de la forme $\forall x \in E, P(x)$, il faut montrer que tous les éléments de E vérifient la propriété P. C'est la même chose que de montrer $P(x)$ pour un élément $x \in E$ quelconque. En effet, c'est la même chose de dire
« Pour tout $x \in E$, $P(x)$ est vraie »
que de dire
« Soit $x \in E$. Alors $P(x)$ est vraie »

On doit parfois démontrer l'existence d'un unique élément x vérifiant une certaine propriété P.
On note « $\exists ! x \in E, P(x)$ »pour dire « il existe un unique $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie ».
Pour montrer une telle proposition, il faut montrer :

1. $\exists x \in E, P(x)$
2. ET $\forall x \in E, \forall y \in E, \quad (P(x) \wedge P(y)) \implies x = y$

Raisonnement par l'absurde

On veut prouver une assertion A.
On prouve que si A est faux, alors on aboutit à une contradiction. On en conclut que A est nécessairement vraie.
Autrement dit : Si $\neg(A)$ implique une contradiction, c'est-à-dire une proposition fausse F, alors A est vraie.
En fait, on montre que $\neg(A) \implies F$, c'est-à-dire que A ne peut pas être fausse.

Pour se convaincre

$\neg(A)$	F	$\neg(A) \implies F$
F	**F**	**V**
V	**F**	**F**

Exemple

$A =$« $\forall x \in \mathbb{N},\ x+1 \neq x+2$ ». Montrons par l'absurde que A est vrai.
Supposons donc qu'il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $x+1 = x+2$
Alors, $1 = 2$ (en soustrayant x dans chaque membre).
Cela est impossible. Donc A est vraie. $\square$

Applications

Une application f est la donnée de trois informations :

- Un ensemble dit « de départ » E
- Un ensemble dit « d'arrivée » F
- Une règle qui permet d'attribuer à tout élément x de E un et un seul élément de F (noté $f(x)$).

Pour une application f de E dans F on note :

$$\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

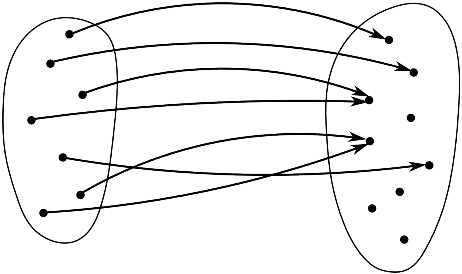
Exemple

1. $$\begin{array}{ccc} \{\text{étudiants de l'amphi}\} & \to & [0;20] \\ \text{étudiant·e} & \mapsto & \text{note à l'examen sur 20} \end{array}$$
2. $$\begin{array}{ccc} \{\text{étudiants de l'amphi}\} & \to & [0;10] \\ \text{étudiant·e} & \mapsto & \text{note à l'examen sur 10} \end{array}$$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$
4. L'**identité** $Id_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$
5. Les suites $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$

Remarque

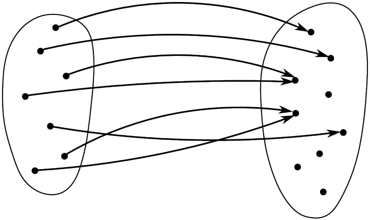
- Une application n'est pas toujours donnée par une formule
- Quand on définit une application, l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont importants :
  s'ils changent, on parle d'une autre application
- Usage des flèches :
  « $\longrightarrow$ » entre les ensembles de départ et d'arrivée,
  « $\longmapsto$ » pour décrire le lien entre un élément de l'ensemble de départ et l'élément de l'ensemble d'arrivée qui lui est associé.

On étudiera plus tard des applications entre ensembles finis. On représente parfois ces application à l'aide de diagrammes ensemblistes et de flèches entre les éléments :

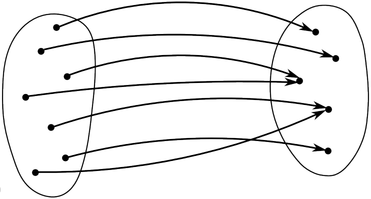


Exercice

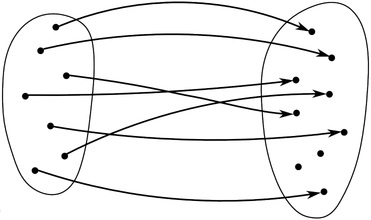
Un des dessins ci-dessous ne représente pas une application, lequel ?



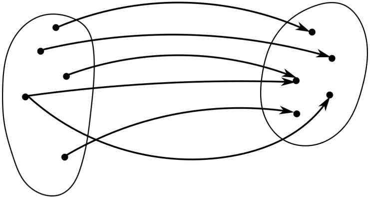
a)



b)



c)



d)

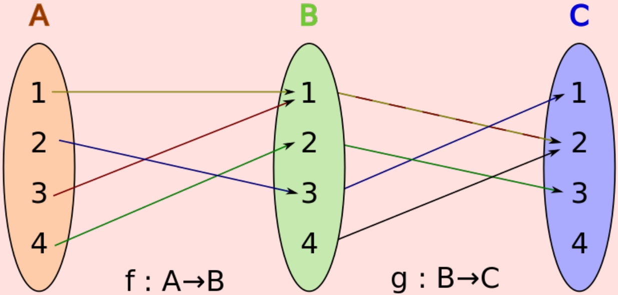
Définition

Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. La composée de g et f est l'application :

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & A & \to & C \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Remarque

Pour évaluer $(g \circ f)(x)$ on applique d'abord f à x, puis g à $f(x)$.



Exercice

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n+3$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Écrire $f \circ g$ et $g \circ f$ en fonction de g et de n. **wooclap**

Solution $(g \circ f)(n) = g(n+3)$ et $(f \circ g)(n) = g(n)+3$.

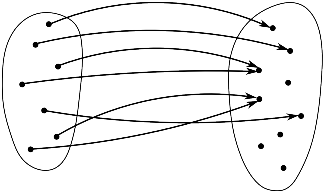
Image directe

Définition

Soit $f : E \to F$, un sous-ensemble A de E et un sous-ensemble B de F. L'ensemble

$$f(A) = \{y \in F | \exists x \in A, y = f(x)\}$$

est appelé image directe de A.
En particulier, l'image directe de E est appelé image de l'application f et notée $\mathrm{Im}(f)$.



Exercice

Soit $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c, d\}$ l'application définie par $f(1) = f(3) = a$, $f(2) = c$. Quelle est l'image directe de $\{1, 3\}$? Quelle est l'image de f ?

wooclap

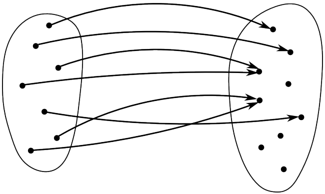
Image réciproque

Définition

Soit $f : E \to F$, un sous-ensemble A de E et un sous-ensemble B de F. L'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in A | f(x) \in B\}$$

est appelé image réciproque de B



Exercice

Soit $f : \{1,2,3\} \to \{a,b,c,d\}$ l'application définie par $f(1) = f(3) = a$, $f(2) = c$. Quelle est l'image réciproque de $\{b,c\}$? Quelle est l'image réciproque de $\{b,d\}$? wooclap

Propriétés de l'image directe et de l'image réciproque

Proposition

Soit f une application de X dans Y, A et A' deux sous-ensembles de X, B et B' deux sous-ensembles de Y.

- $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
- $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$
- $f(A) \setminus f(A') \subseteq f(A \setminus A')$
- $f(f^{-1}(B)) = B \cap \mathrm{Im}(f) \subseteq B$
- $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
- $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$
- $f^{-1}(B \setminus B') = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B')$
- $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

Démonstration.

Exercice 12 du TD1 sauf $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ démontré à la page suivante. $\square$

Démonstration.

$$A \subseteq f^{-1}(f(A))$$

□

Wooclap

1 Allez sur wooclap.com

2 Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur

Code d'événement
HAI105X4

1 Envoyez @HAI105X4 au 06 44 60 96 62

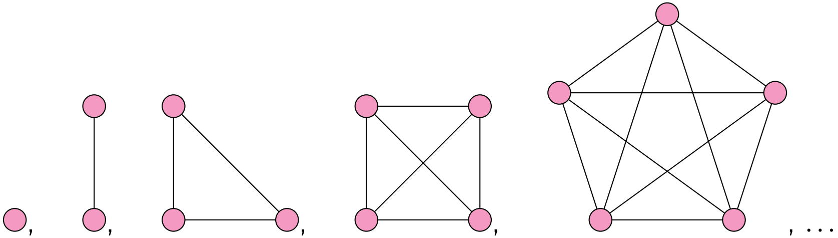
2 Vous pouvez participer

Copier le lien de participation

Un premier exemple de graphes : Graphe complet

Définition

Un graphe est complet si toute paire de sommets distincts est une arête.



Question

Combien un graphe sur n sommets a-t-il d'arêtes ?

Réponse

En TD (ex 14 TD1)

Suite et récurrence

Quelques rappels :

Définition

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire les nombres entiers positifs : $0, 1, 2, \dots$
- Une suite est une application, souvent notée u, qui à tout élément de $\mathbb{N}$ associe un nombre réél : $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- Dans le cas des suites, on note $u(n)$ par u_n.
- La suite elle-même est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple

Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à 4 disques ?

Règles :

- Un seul disque bouge à la fois
- Un disque ne peut pas être au-dessus d'un disque de plus petit diamètre

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple

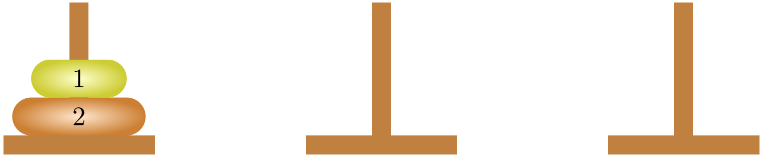
Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à ~~4~~ 3 disques ?

Règles :

- Un seul disque bouge à la fois
- Un disque ne peut pas être au-dessus d'un disque de plus petit diamètre

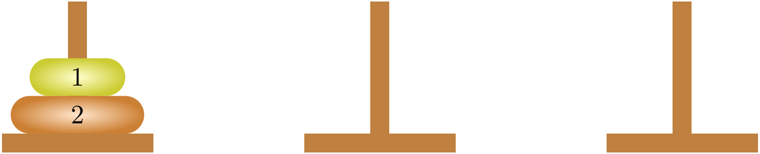
Raisonnement par récurrence : Récurrence simple



Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à ~~3~~ 2 disques ? wooclap

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple



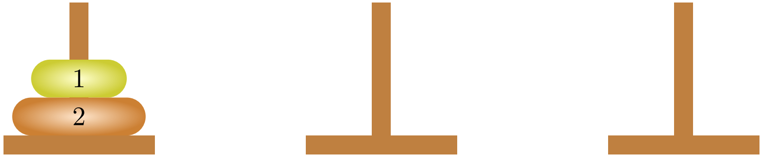
Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à ~~3~~ 2 disques ? wooclap

Réponse

3 !

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple



Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à ~~3~~ 2 disques ? wooclap

Réponse

$3\,!(=:T_2)$

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple

Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à 3 disques ? wooclap

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple

Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à 3 disques ? wooclap

Réponse

$$T_3 = 2T_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7 = 8 - 1$$

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple

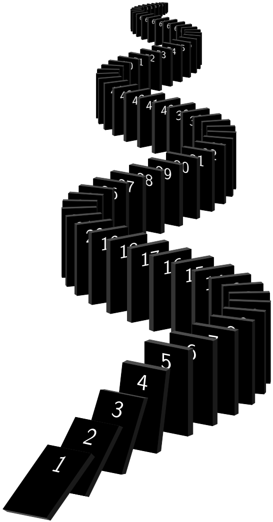
Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à n disques ? **wooclap**

Réponse

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 = 2^n - 1$$

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple



Raisonnement par récurrence : Récurrence simple

Soit $\mathcal{P}(n)$, la propriété à prouver pour tout entier $n \geq n_0$.

Deux étapes :

- Initialisation
- Hérédité

- Initialisation : Montrer $\mathcal{P}(n_0)$
- Hérédité : Pour $k \geq n_0$, montrer $\mathcal{P}(k+1)$ en supposant $\mathcal{P}(k)$ (Attention ! c'est une implication qu'il faut montrer)

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \geq n_0$

Exercice

Montrons par récurrence que les tours de Hanoï à n disques peuvent être résolues en $2^n - 1$ étapes

Raisonnement par récurrence : Récurrence forte

Soit $\mathcal{P}(n)$, la propriété à prouver pour tout entier $n \geq n_0$.

Deux étapes :

- Initialisation
- Hérédité (forte !)

- Initialisation : Montrer $\mathcal{P}(n_0)$
- Hérédité : Pour $k \geq n_0$, montrer $\mathcal{P}(k+1)$ en supposant $\mathcal{P}(k), \mathcal{P}(k-2), \ldots, \mathcal{P}(n_0)$

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \geq n_0$

Exemple

- Mq tout entier naturel $n \geq 2$ s'écrit comme un produit de nombres premiers
- Mq tout entier $n > 0$ admet une expression binaire (càd qu'il existe $c_i \in \{0;1\}$ tq $n = c_r 2^r + c_{r-1} 2^{r-1} + \ldots + c_0 2^0$)

Combien d'éléments dans un ensemble ?

Définition

Le cardinal d'un ensemble E est son nombre d'éléments.

Le cardinal d'un ensemble E est noté $|E|$ (ou $\#E$). On a $|\emptyset| = 0$.

Proposition

Soient A et B deux ensembles,

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$
- *Si $S \subseteq A$, $|S| \leq |A|$*
- $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$

Exercice

Pour $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{b, c, d, e\}$ Quel est le cardinal de $A \cup B$? de $A \cap B$? de $A \setminus B$? **wooclap**

Applications

Principe d'addition

Si $E_1, \ldots, E_k$ sont deux à deux disjoints ($E_i \cap E_j = \emptyset$, pour tout $i \neq j$), on note $\sqcup$ l'union disjointe de ces éléments et on a :

$$|E_1 \sqcup \ldots \sqcup E_k| = |E_1| + \ldots + |E_k|$$

Exemple

Un graphe a 3 sommets rouges, 6 sommets verts et 4 sommets bleus : combien a-t-il de sommets ? wooclap

Produit cartésien de deux ensembles

Définition

Soient A et B deux ensembles. Le produit cartésien de A et B est l'ensemble :

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

Exemple

Les coordonnées dans le plan, un classement des meilleurs scores à un jeu, ...

Proposition

Si A et B sont finis, on a :

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Applications

Principe de multiplication

Si un objet consiste en k éléments, chacun choisit dans un ensemble A_i de cardinal $|A_i|$ $(1 \leq i \leq k)$, alors le nombre d'objets différents possibles est :

$$|A_1 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \times \ldots \times |A_k|.$$

Exemple

Un graphe a 3 sommets rouges et 6 sommets verts, ainsi que toutes les arêtes possibles entre deux sommets de couleurs différentes (le graphe est "biparti complet") : combien le graphe a-t-il d'arêtes ? **wooclap**

Exemple

Dans un restaurant, il y a 2 choix d'entrées, 3 choix de plat principal et 4 choix de dessert : combien de formules différentes y a-t-il ? **wooclap**

Wooclap


Allez sur
wooclap.com
Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur
Code d'événement
HAI105X5
Envoyez @HAI105X5 au 06 44 60 96 62
Vous pouvez participer
Copier le lien de participation

Rappels

Principe d'addition

Si $E_1, \ldots, E_k$ sont deux à deux disjoints ($E_i \cap E_j = \emptyset$, pour tout $i \neq j$), on note $\sqcup$ l'union disjointe de ces éléments et on a :

$$|E_1 \sqcup \ldots \sqcup E_k| = |E_1| + \ldots + |E_k|$$

Principe de multiplication

Si un objet consiste en k éléments, chacun choisit dans un ensemble A_i de cardinal $|A_i|$ ($1 \leq i \leq k$), alors le nombre d'objets différents possibles est :

$$|A_1 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \times \ldots \times |A_k|.$$

Retour sur les applications

Question

Soient E et F deux ensembles finis. Combien y a-t-il d'applications de E dans F ?

Proposition

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$. On a :

$$|F^E| = |F|^{|E|}$$

Propriétés de l'image directe et de l'image réciproque

Proposition

Soit f une application de X dans Y, A et A' deux sous-ensembles de X, B et B' deux sous-ensembles de Y.

- $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
- $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$
- $f(A) \setminus f(A') \subseteq f(A \setminus A')$
- $f(f^{-1}(B)) = B \cap \mathrm{Im}(f) \subseteq B$
- $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
- $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$
- $f^{-1}(B \setminus B') = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B')$
- $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

Question

Dans quel(s) cas a-t-on l'égalité dans les inclusions ci-dessus ?

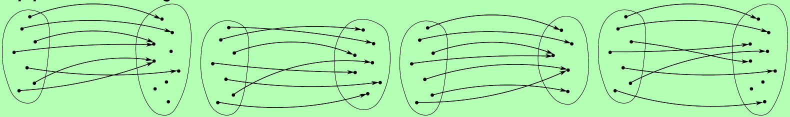
Injectivité

Définition

Une application $f : E \to F$ est injective si et seulement si chaque élément de F a **au plus** un antécédent.

Exemple

Parmi les dessins d'applications ci-dessous, lesquels représentent une application injective ? wooclap



Injectivité et cardinal

Proposition

Soit $f : E \to F$ une application injective entre deux ensembles finis. Alors nous avons les propriétés suivantes pour tous sous-ensembles A et A' de E :

- $|E| = |\mathrm{Im}(f)| \leq |F|$
- $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$
- $A = f^{-1}(f(A))$
- $f(A) \setminus f(A') = f(A \setminus A')$

Démonstration.

Voir TD2. Montrons à la page suivante :

- $|E| = |\mathrm{Im}(f)|$
- $A \supseteq f^{-1}(f(A))$

$\square$

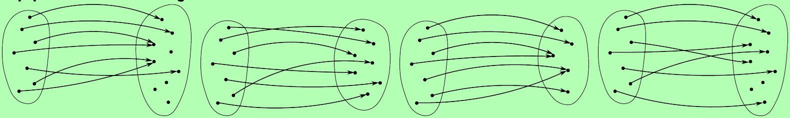
Surjectivité

Définition

Une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si chaque élément de F a **au moins** un antécédent.

Exemple

Parmi les dessins d'applications ci-dessous, lesquels représentent une application surjective ? **wooclap**



Surjectivité et cardinal

Proposition

Soit $f : E \to F$ une application surjective entre deux ensembles finis. Alors nous avons les propriétés suivantes :

- $|F| \leq |E|$
- $f(f^{-1}(B)) = B$

Démonstration.

Le deuxième point sera montré en TD. Pour le premier point, $\square$

Lemme des bergers

Lemme

Soit E et F deux ensembles finis. S'il existe une surjection $f : E \to F$ telle que $|f^{-1}(\{y\})| = p$ pour tout y de F alors $|E| = p|F|$

Exemple

Si un berger veut baguer les moutons de son troupeau, il devra acheter deux fois plus de bagues qu'il a de mouton

Bijectivité

Définition

Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si chaque élément de F a **exactement** un antécédent.

Une application est donc bijective si et seulement si elle est **injective et surjective**.

Proposition

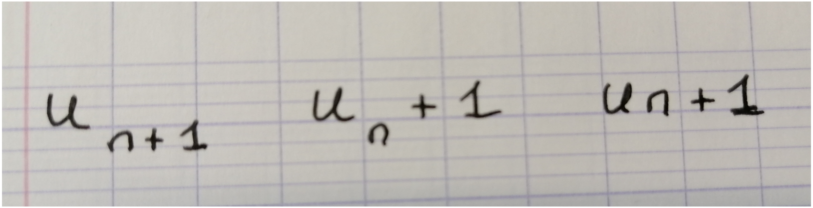
Soit E et F deux ensembles finis. S'il existe une bijection $f : E \to F$, alors $|E| = |F|$.

Vers les suites

Quel est le nombre a_n d'arêtes du cube en dimension n a-t-il ?

Attention

u_n est un nombre, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite et (u_n) est un nombre entre parenthèses...



Au contrôle : une écriture ambiguë ne peut pas être corrigée

Définition

Une suite est définie par récurrence si on connaît le terme initial u_0 et que u_n est défini en fonction des occurrences précédentes.

Attention

Ne pas confondre une suite définie par récurrence, et un raisonnement par récurrence.

Rappels des tours de Hanoï

Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à n disques ?

Réponse

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 = 2^n - 1$$

Problème

Calculer une suite avec la relation de récurrence est coûteux

Par exemple,
$T_{10} = 2T_9 + 1 = 2(2T_8 + 1) + 1 = 4(2T_7 + 1) + 3 = 8(2T_6 + 1) + 7 = \dots$

Réponse

On cherche alors une « formule close » pour T_n, c'est-à-dire une expression de T_n qui ne demande de ne connaître que n (et pas T_{n-1}). On appelle une telle expression le terme général de la suite.

C'est faisable notamment pour les suites arithmético-géométriques.

Suites arithmétiques

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence est une suite arithmétique si, $\exists r \in \mathbb{R}, \forall n > 0$,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r est la raison de la suite.

De manière équivalente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique si la suite $v_n = (u_{n+1} - u_n)$ est constante, c'est-à-dire que sa valeur ne dépend pas de n.

Remarque

L'expression "arithmétique" vient du fait que la suite arithmétique telle que $u_0 = 0$, $r = 1$, décrit tout les entiers naturels. Et l'arithmétique est l'étude des nombres.

Question

Quel est le terme général d'une suite arithmétique ? wooclap

Théorème

Le terme général une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 et de raison r est

$$u_n = u_0 + nr$$

Définition (Suites géométriques)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence est une suite géométrique si, $\exists r \in \mathbb{R}^*, \forall n > 0$,

$$u_{n+1} = r \times u_n \text{ et } u_0 \neq 0$$

Le nombre r est la raison de la suite.

De manière équivalente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique si, elle ne s'annule pas, et la suite $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constante.

Question

Quel est le terme général d'une suite géométrique ? **wooclap**

Théorème

Le terme général une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de premier terme* u_0 *et de raison* r *est*

$$u_n = r^n u_0$$

Démonstration.

Remarque

l'expression “géométrique” pourrait venir de ce phénomène (cf. Thalès) :

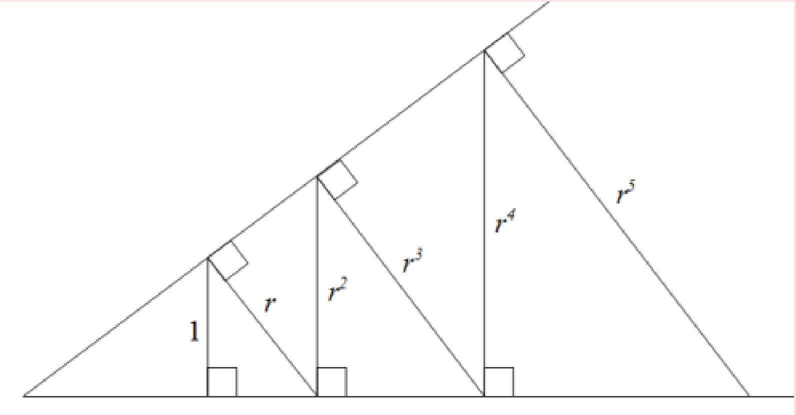
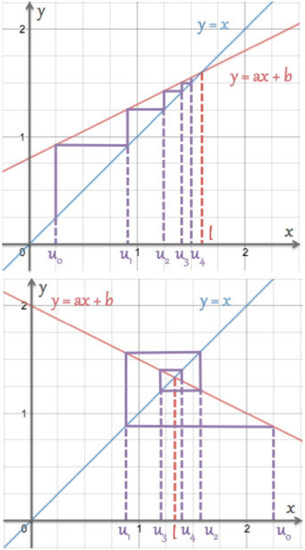


Figure – CC BY-SA 3.0, David K Link

Suites arithmético-géométriques

Que dire d'une suite de la forme $u_{n+1} = au_n + b$?



Théorème (Ex 11 TD2)

Le terme général d'une suite arithmético-géométrique vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$ est

$$u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$$

Conclusion de la séance

Question

Combien d'arêtes a donc le cube de dimension n ?

Wooclap

1. Allez sur wooclap.com
2. Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur

Code d'événement
HAI105X6

1. Envoyez @HAI105X6 au 06 44 60 96 62
2. Vous pouvez participer

Copier le lien de participation

Suites arithmétiques

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence est une suite arithmétique si, $\exists r \in \mathbb{R}, \forall n > 0$,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r est la raison de la suite.

Théorème

Le terme général une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 et de raison r est

$$u_n = u_0 + nr$$

Définition (Suites géométriques)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence est une suite géométrique si, $\exists r \in \mathbb{R}^*, \forall n > 0$,

$$u_{n+1} = r \times u_n \text{ et } u_0 \neq 0$$

Le nombre r est la raison de la suite.

De manière équivalente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique si, elle ne s'annule pas, et la suite $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constante.

Question

Quel est le terme général d'une suite géométrique ? **wooclap**

Théorème

Le terme général une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 et de raison r est

$$u_n = r^n u_0$$

Démonstration.

$\square$

Remarque

l'expression "géométrique" pourrait venir de ce phénomène (cf. Thalès) :

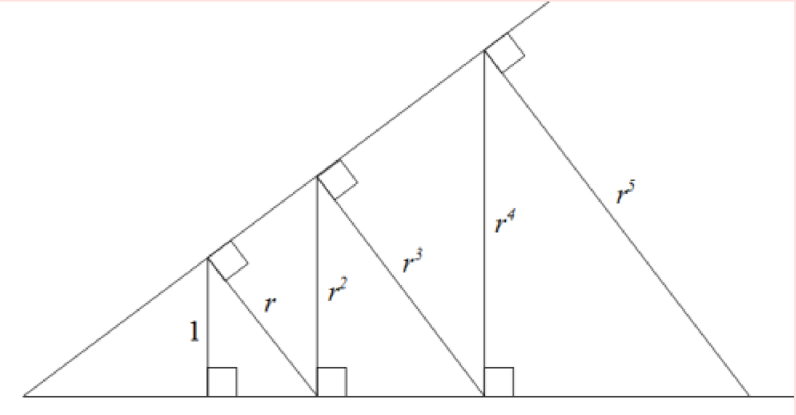
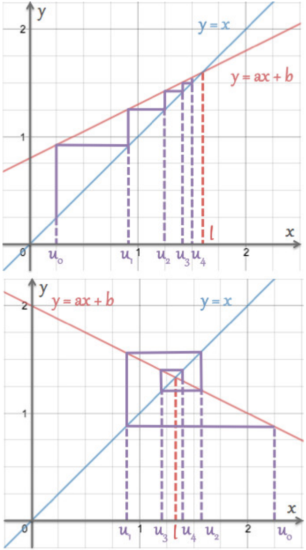


Figure – CC BY-SA 3.0, David K Link

Suites arithmético-géométriques

Que dire d'une suite de la forme $u_{n+1} = au_n + b$?



Théorème (Ex 11 TD2)

Le terme général d'une suite arithmético-géométrique vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$ est

$$u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$$

Conclusion de paragraphe

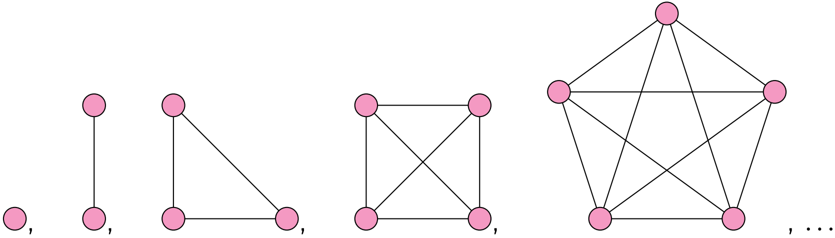
Question

Combien d'arêtes a donc le cube de dimension n ?

Souvenez-vous : Graphe complet

Définition

Un graphe est complet si toute paire de sommets distincts est une arête.



Question

Combien un graphe sur n sommets a-t-il d'arêtes ?

Réponse

Comptons autrement !

La notation Sigma Σ

Exercice

Calculer la somme de tous les nombres entiers naturels jusqu'à 6. wooclap

La formule générale est un résultat célèbre dû à Gauss.

Lemme

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. *Alors* $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

On aimerait écrire de manière plus pratique $1+2+3+\cdots+n$. On utilise le signe $\sum$ « somme » (qui est en fait la lettre grecque sigma majuscule) :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n \ .$$

```
def S(n):
  Saux=0
  for k in range(n+1):
     Saux=Saux+k
  return Saux
```

- L'indice k est muet :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

- Par contre n ne peut pas être changé arbitrairement

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \neq \sum_{k=0}^{m} a_k$$

Exercice

Soit a_k un nombre donné. Que vaut $\sum_{i=0}^{n} a_k$? **wooclap**

```
def A(n):
    Saux=0
    for i in range(n+1):
        Saux=Saux+a_k
    return Saux
```

Exercice

Comment écririez-vous la somme suivante ?

```
def B(n):
    Saux=0
    for i in range(3,15):
        Saux=Saux+i
    return Saux
```

wooclap

Réponse

$$B_n = \sum_{i=3}^{14} i$$

Exercice

Comment écririez-vous la somme suivante ?

```
def P(n):
  Saux=0
  for i in range(0,11,2):
     Saux=Saux+i
  return Saux
```

wooclap

Réponse

$$P_n = \sum_{i=0}^{5} 2i$$

On note les propriétés immédiates des sommes : pour un réel c

$$\sum_{k=0}^{n}(ca_k) = c\sum_{k=0}^{n} a_k$$

et aussi :

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

Pour $1 \leq m \leq n$

$$\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_m$$

Sommes téléscopiques

Comment obtenir une expression sans le signe somme ? Un cas simple est celui des sommes telescopiques qui sont de la forme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k)$$

Exercice

Calculer S_n. wooclap

Solution

$S_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_0$.

Changement d'indice

On peut faire un changement d'indice pour simplifier l'expression d'une somme. Il faut toujours veiller à avoir le même nombre d'éléments dans la somme.
Par exemple, pour montrer que :

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}-\frac{k(k-1)}{2}>0$$

Remarque

Si, si, ça arrive en informatique. Par exemple pour montrer que tout graphe G qui a n sommets et strictement plus de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ arêtes est connexe.

Exemple d'application

Exercice

Quelle est la somme des 5 premiers nombres impairs ? des k premiers ?

wooclap

Exercice

En faisant un changement d'indice, simplifier l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{j=2}^{n} (n-j)$ wooclap

Sommation de suites arithmétiques

Proposition

Si u_n est une suite arithmétique de raison r,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r$$

Démonstration.

$\square$

Sommation de suites géométriques et passage à la limite

Proposition

Si u_n est une suite géométrique de raison r,

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{u_p - u_{n+1}}{1-r} = u_p \frac{1-r^{n+1-p}}{1-r}.$$

Notamment, si $|r| < 1$, la limite $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=p}^{n} u_k)$ existe. On note alors :

$$\sum_{k=p}^{\infty} u_k = \frac{u_p}{1-r}.$$

Corollaire (admis)

Si $|r| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)r^{k-2} = \frac{2}{(1-r)^3}.$$

```
S=0
for i in range(5):
  for j in range(i):
    S=S+1
print(S)
```

Exercice

Qu'affiche le programme suivant ? wooclap

Question

Comment le formaliser mathématiquement ?

Réponse

Par une double sommation !

Double somme et tableaux

Soit $(a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ une matrice (ou $a[i][j]$ un tableau si vous préférez)

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

On peut additionner les termes de la i-ième ligne, pour $i \in [\![1, n]\!]$, on obtient un nombre qui dépend de i :

$$L_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$$

On peut aussi additionner les termes de la j-ième colonne, pour $j \in [\![1, m]\!]$, on obtient un nombre qui dépend de j :

$$C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

Par exemple, on peut considérer la matrice où $a_{i,j}$ est la note de l'élève j au $i$ème contrôle.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Question

- Quelle est la moyenne de l'élève 3 ? **wooclap**
- Quelle est la moyenne de la classe au premier contrôle ? **wooclap**
- Quelle est la moyenne de la classe sur l'année ? **wooclap**

Par exemple, on peut considérer la matrice où $a_{i,j}$ est la note de l'élève j au $i$ème contrôle.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

Question

- Quelle est la moyenne de l'élève j ? **wooclap**
- Quelle est la moyenne de la classe au contrôle i ? **wooclap**
- Quelle est la moyenne de la clase sur l'année ? **wooclap**

Si on additionne tous les termes de la matrice, on peut le faire de deux façons :

$$\sum_{j=1}^{n} C_j = \sum_{i=1}^{m} L_i$$

ce qui donne :

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right) .$$

Ce que l'on écrit souvent sans les parenthèses :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} .$$

Si $n = m$, on peut utiliser la notation suivante :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

Un cas particulier est quand $a_{i,j} = b_i c_j$, $i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, m]\!]$.

Lemme

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_i c_j = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{m} c_j\right)$.

Exemple

$a_{i,j} = i \times j$

Indices liés

```
S=0
for i in range(5):
    for j in range(i):
        S=S+1
print(S)
```

$$\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{i} 1$$

De manière générale, on peut avoir :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{m} a_{i,j}$$

Si $n = m$, on peut aussi écrire (134) sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

Exemple d'application : Tri naïf

On veut trier le tableau suivant à l'aide d'un algorithme de tri naïf :

3	5	4	2	1

```
def tri(t):
  for i in range(len(t)):
    max=t[0]
    posMax=0
    for j in range(1, len(t)-i):
      if t[j]>max:
        max=t[j]
        posMax=j
    t[posMax]=t[len(t)-1-i]
    t[len(t)-1-i]=max
```

Question

Combien y a-t-il de comparaisons ? **wooclap**

Exercice

Calculer $\sum_{1\leq j<k\leq 3} k-j$ **wooclap**

Un moyen de voir l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$$

est de représenter dans un tableau les indices qui sont atteints :

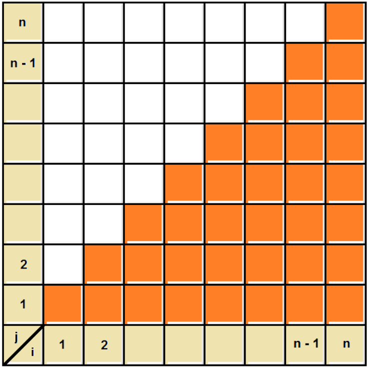
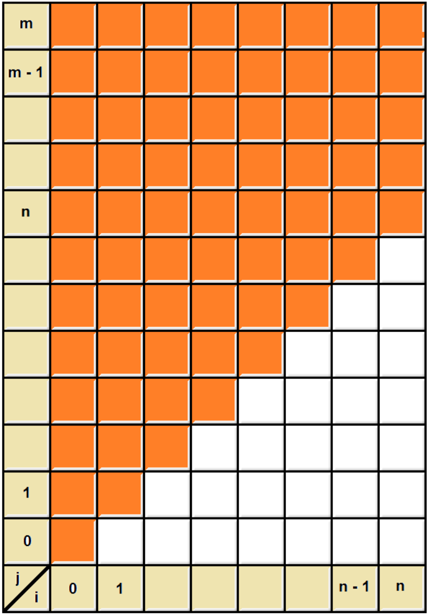


Figure – CC BY-SA 4.0, Link

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{m} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{i,j} + \sum_{j=n+1}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}$$



Uplets

Définition

Un *p-uplet* d'éléments (ou p-liste) de E est une liste d'éléments de E de longueur p.

Proposition

Si E est un ensemble fini de cardinal n, le nombre de p-listes de E est n^p.

Exercice

Je tire trois fois un dé, et je note à chaque fois le résultat. Quel est le cardinal de l'ensemble des résultats ?

Solution $6^3 = 216$

Où a-t-on déjà vu ça ?

Définition

Soient E et F deux ensembles. Une application de E dans F est un uplet de $|E|$ éléments de F. Comme chaque élément de E désigne une et une seule case du uplet, on peut alors noter $f(x)$ l'(unique !) élément du uplet correspondant à x.

Proposition

Le nombre d'applications d'un ensemble E dans un ensemble F est :

$$\mathcal{F}(E,F) = |F|^{|E|}.$$

Permutations et factorielles

Définition

Une permutation d'un ensemble E est une application bijective de E dans E.

Proposition

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est donné par la factorielle

$$n! = n \times (n-1)! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \ldots \times n \text{ avec } 0! = 1.$$

Exemple

Alice range ses cours de L1 pour pouvoir les relire facilement. Sachant qu'elle a 6 modules différents ce semestre, de combien de manières différentes pourra-t-elle attribuer les intercalaires de son classeur ?

Uplets sans répétitions (=Arrangements)

Définition

Un *k-arrangement* de E est un k-uplet de E sans répétition. C'est une injection de $[\![1;k]\!] := \{1, 2, \ldots, k-1, k\}$ dans E.

Remarque : Un $|E|$-arrangement est une permutation.

Proposition

Le nombre de k-arrangements ($=$ k-uplets sans répétitions) d'un ensemble E est donné par :

$$(n)_k = \prod_{i=1}^{k}(n-i+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemple

Le comité olympique décide, en première sélection, de classer quatre dossiers parmi les vingt dossiers de candidature déposés : combien de classements différents pourrait-il faire ?

Sous-ensembles (=combinaisons)

Remarque

Un k-sous-ensemble (ou ss-ensemble de cardinal k) d'un ensemble E devient un k-uplet sans répétition lorsqu'on ordonne ses éléments

Proposition

Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre de sous-ensembles de E de cardinal k est donné par le coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}^{k \text{ éléments}}}{k!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

Exemple

Pour jouer au loto, il faut cocher 5 numéros sur une grille de 49 nombres puis choisir un numéro chance parmi dix : combien de tickets de loto différents est-il possible de remplir ?

Exercice

Calculer $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{n-1}$ **wooclap**

Solution $\binom{n}{n} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$
$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n)!} = 1$ $\binom{n}{n-1} = n$

Exercice

Calculer $\binom{n}{k}$ pour n de 1 à 4 et k de 0 à n. **wooclap**

Solution Si on range les solutions comme ceci

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

on obtient le triangle de Pascal (dont on reparlera plus tard)

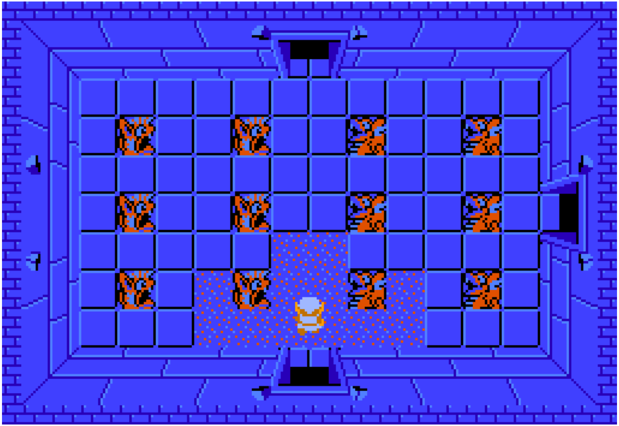
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Figure – CC BY-SA 4.0, Link

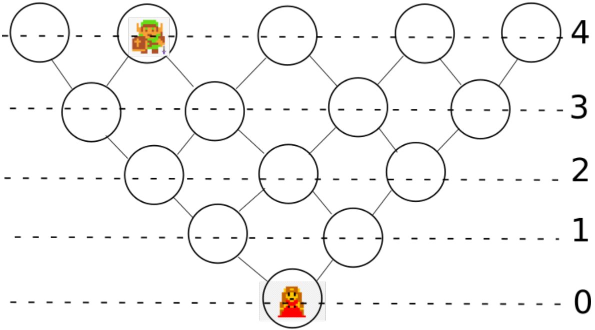
wooclap

À quoi servent les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$?

Imaginons un aventurier qui s'est perdu dans un donjon.



La princesse vient dans le donjon pour récupérer l'aventurier malheureux. On suppose que les salles sont connectées par niveau de cette façon :



Exercice

Combien de chemins différents la princesse peut-elle emprunter pour arriver à l'aventurier (bien sûr elle ne redescend jamais d'un niveau) ? wooclap

La réponse est donnée par le triangle de Pascal !

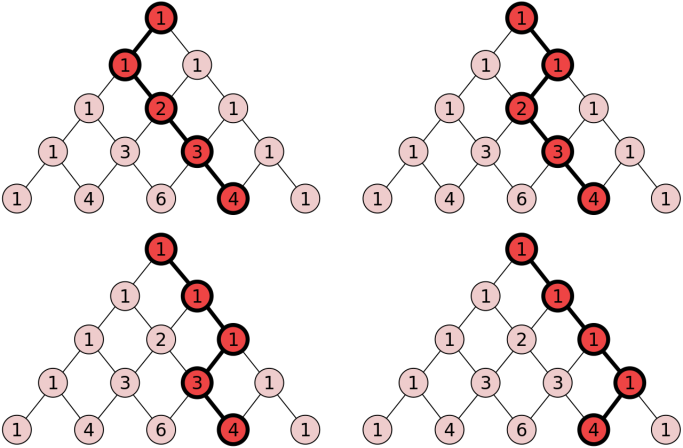
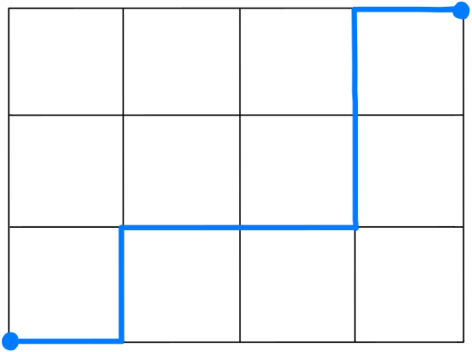


Figure – CC BY-SA 4.0, Link

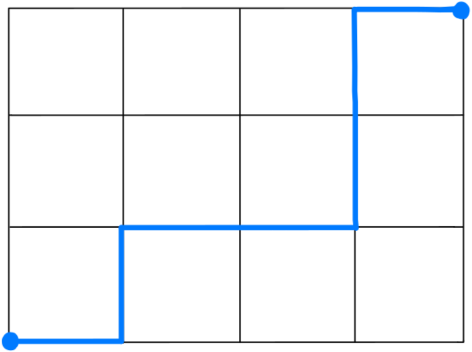
Théorème

Le nombre de chemins d'un coin d'un tableau de taille $n \times m$ au coin opposé est

$$\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$



Par exemple dans ce cas



j'ai 7 pas à faire : $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$. Le choix du chemin est le choix de 4 pas horizontaux, ici p_1, p_3, p_4, p_7. C'est aussi le choix de 3 pas verticaux : p_2, p_5, p_6.

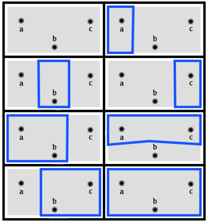
Ensemble des parties

Définition

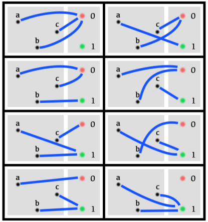
L'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble E est appelé ensemble des parties de E, notée $\mathcal{P}(E)$.

Définition

La fonction indicatrice (ou fonction caractéristique) de $S \subset E$, notée $\mathbf{1}_S$ est l'application de E dans $\{0,1\}$ qui envoie les éléments de S sur 1 et les autres sur 0.



$\mathcal{P}(E)$



$\{0,1\}^E$

Théorème

Pour tout ensemble E, $\mathcal{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$ sont en bijection.

Proposition

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$

Soit $B = \{0,1\}$ l'ensemble des booléens.

Définition

Une fonction booléenne à n variables (ou fonction binaire, ou fonction logique) est une application

$$\begin{array}{rcl} f : B^n & \to & B \\ (a_1, \dots, a_n) & \to & f(a_1, ..., a_n) \end{array}$$

On représente f par un tableau qui est dit Table de Vérité de f.

Proposition

- *L'ensemble F_n des fonctions booléennes (de B^n dans B) est en bijection avec $\mathcal{P}(B^n)$ l'ensemble des ensembles d'éléments de B^n.*
- *Le nombre d'éléments de F_n est $2^{(2^n)}$.*

Rappels : Sous-ensembles (=combinaisons)

Remarque

Un *k-sous-ensemble* (ou ss-ensemble de cardinal k) d'un ensemble E devient un k-uplet sans répétition lorsqu'on ordonne ses éléments

Proposition

Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre de sous-ensembles de E de cardinal k est donné par le coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}^{k \text{ éléments}}}{k!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

Exemple

Pour jouer au loto, il faut cocher 5 numéros sur une grille de 49 nombres puis choisir un numéro chance parmi dix : combien de tickets de loto différents est-il possible de remplir ?

Multi-ensembles (=combinaisons avec répétition)

Exemple

Bob range son armoire dans laquelle il a dix paires de chaussettes toutes identiques et cinq tiroirs : combien de manières différentes a-t-il de ranger ses affaires ?

Proposition

Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre de k-multi-ensembles de E est donné par le coefficient multinomial :

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Anagrammes (=permutations avec répétition)

Définition

Un anagramme (=permutation avec répétition) d'un ensemble E est un mot dont les lettres sont r éléments de E répétés chacun $n_1, n_2, \ldots, n_r$ fois, tels que $n_1 + \ldots + n_r = n$. n est alors la longueur du mot.

Proposition

Le nombre d'anagrammes de longueur n d'un ensemble E avec r lettres différentes répétées $n_1, \ldots, n_r$ fois respectivement est donné par les coefficients multinomiaux

$$\frac{n!}{n_1! \ldots n_r!}.$$

Exemple

Combien le mot "PRESTIDIGITATEUR" a-t-il d'anagrammes ?

Tableau récapitulatif

Soit E un ensemble de cardinal n et F un ensemble de cardinal k.

		Ordonné : Oui	Ordonné : Non
Répétition	Oui	k-uplets de E $(=$ fonctions de F dans $E)$ n^k	k-multi-ensembles de E $\binom{n+k-1}{k}$
Répétition	Non	k-uplets sans répétitions $(=$ fctions inj. de F dans $E)$ $\frac{n!}{(n-k)!}$	k-sous-ensembles de E $\binom{n}{k}$

Retour vers le futur

Définition

Considérons un sous-ensemble F d'un ensemble **fini** E. La probabilité pour un élément x de E d'être dans F est donnée par :

$$\mathbb{P}(\{x \in F\}) = \frac{|F|}{|E|}$$

Attention

Une probabilité ne peut **JAMAIS** être plus grande que 1.

Remarque

Une définition plus rigoureuse sera donnée au second semestre.

Principe de double-comptage

Le double-comptage consiste à compter de deux manières différentes un certain ensemble. De manière équivalente, il revient à donner une bijection entre deux ensembles qui ont alors le même cardinal.

Exemple

Souvenez-vous de l'exemple vu précedemment :

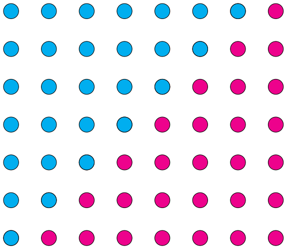
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + 2b^2$$

Exemple

Comment montrer de la même manière :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}?$$

Illustration du principe de double-comptage



Comptons les points magenta :

- Il y a en tout 7×8 points (ici, n=7). Comme il y a autant de points magenta que cyan, il y a donc 28 points magenta.
- Comptons les par ligne : il y en a 1 sur la 1ère ligne, 2 sur la 2ème, ..., 7 sur la 7ème soit $1+2+3+4+5+6+7$ points magenta.

On a alors $\frac{7 \times 8}{2} = 1+2+3+4+5+6+7$.

Illustration du principe de double-comptage

Proposition

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration.

Considérons un rectangle de n lignes et $n+1$ colonnes avec i points magenta sur la $i$ème ligne et les autres cyan. Comptons les points magenta :

- Il y a en tout $n \times (n-1)$ points. Comme il y a autant de points magenta que cyan, il y a donc $\frac{n(n-1)}{2}$ points magenta.
- Comptons les par ligne : il y en a 1 sur la 1ère ligne, ..., n sur la $n$ième soit $\sum_{i=1}^{n} i$ points magenta.

En comptant de deux manières différentes les points magenta, on obtient $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. $\square$

Théorème (Formule du binôme de Newton)

Pour tout entier n, et deux nombres réels a et b quelconque,

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

Démonstration.

Considérons n étudiants qui décident d'acheter une tablette (a modèles différents) ou un ordinateur (b modèles différents).

- Chaque étudiant a $a+b$ choix, il y a donc $(a+b)^n$ choix possibles
- Soit p le nombre d'étudiants qui décident d'acheter une tablette (donc $n-p$ achètent un ordinateur). On a $0 \leq p \leq n$.

Il y a $\binom{n}{p}$ manières de choisir les étudiants qui vont acheter les tablettes.
Chacun des p étudiants qui achètent une tablette a a choix, soit a^p possibilités au total.
Chacun des $n-p$ étudiants qui achètent un ordinateur a b choix, soit b^{n-p} possibilités au total.

Un autre exemple

Proposition (Formule du triangle de Pascal)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Démonstration.

Soit S_k^n l'ensemble des sous-ensembles de taille k de $\{1, \dots, n\}$. Considérons un élément s de S_k^n . Il y a $\binom{n}{k}$ manière de choisir un tel ensemble. $*$
De plus, ou bien n appartient au sous-ensemble choisi ou bien n n'y appartient pas : on peut alors appliquer le principe d'addition.
Comptons les éléments de S_k^n contenant n : il faut choisir les $k-1$ autres éléments de l'ensemble et on a $\binom{n-1}{k-1}$ façons de le faire. $*$
Comptons maintenant les éléments de S_k^n ne contenant pas n : ce sont alors des sous-ensembles de $\{1, \dots, n-1\}$ et réciproquement tout sous-ensemble de $\{1, \dots, n-1\}$ est un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$. $*$
On a alors $|S_k^n| =^* \binom{n}{k} =^* \binom{n-1}{k} +^* \binom{n-1}{k-1}$. $\square$

Nombres de Stirling

Définition

Soit E un ensemble et $k \geq 1$. Une partition de E est un ensemble $\{A_1, \ldots, A_k\}$ de sous-ensembles de E qui sont

- non vides
- *deux à deux disjoints* ce qui signifie

$$\forall (i,j) \in [\![1,k]\!] \times [\![1,k]\!], i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

- $E = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$

Le nombre k est le nombre de blocs de la partition, on parle de partition à k blocs.

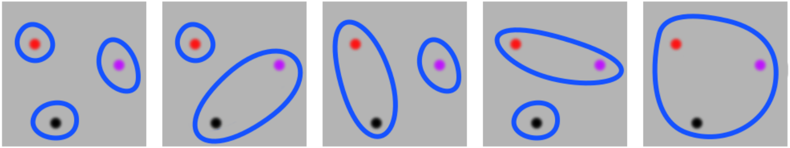


Figure – Link

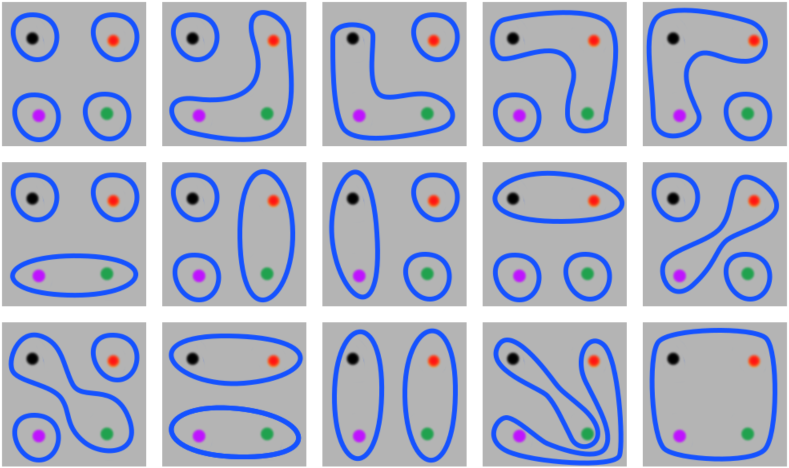


Figure – ▸ Link

Exemple

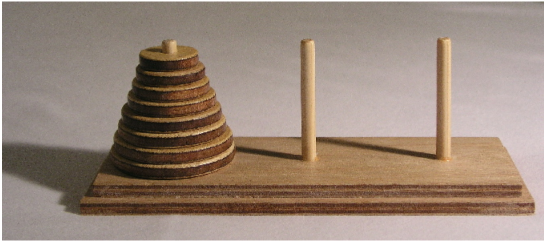
- Il y a une seule partition à un bloc de E, c'est $\{E\}$
- Si E est un ensemble fini avec $|(|E) = n$, il n'y a pas de partition à k bloc si $k > n$, et il y a une seule partition à n blocs : si $E = \{x_1, \ldots, x_k\}$, la partition est

$$\{\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}\}$$

Exercice

Donner toutes les partitions de $E = \{1, 2\}$.

solution $\{\{1\}, \{2\}\}, E$



Exercice

Calculer de combien de façon différentes je peux répartir trois disques sur deux piquets de ma tour de Hanoi.

Solution 3. En effet, si je note a, b, c les disques, on a trois façons de décomposer $\{a, b, c\}$ en 2 blocs

$$\{a\} \cup \{b, c\}, \{b\} \cup \{a, c\}, \{c\} \cup \{a, b\}$$

Définition

Le nombre de Stirling $S(n,k)$ est le nombre de partitions à k blocs d'un ensemble à n éléments, pour $n \geq 1$.

On a vu que

$$S(n,1) = S(n,n) = 1$$

$$k > n \Rightarrow S(n,k) = 0$$

et d'une manière évidente, on va poser

$$S(n,0) = 0$$

Théorème (Récurrence de Stirling)

Pour tout $n \geq 2$ *et* $2 \leq k \leq n-1$,

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

Démonstration Soit E un ensemble à n éléments, et soit $x \in E$. Il y a deux types de partitions à k blocs de E :

1. celles où $\{x\}$ est un bloc. Donc toutes les partitions de ce type sont la même chose qu'une partition de $E \setminus \{x\}$ à $k-1$ blocs, ce qui est exactement $S(n-1,k-1)$;
2. celles où $\{x\}$ n'est pas un bloc. Il faut alors ajouter x à un bloc d'une partition de $E \setminus \{x\}$ à k blocs. Il y a $S(n-1,k)$ telles partitions, et on a un choix de k blocs où mettre x : $kS(n-1,k)$ choix.

□

Exercice

Utiliser la récurrence de Stirling pour (re)compter de combien de façon différentes je peux poser 3 disques sur 2 piquets.

Solution Il faut calculer $S(3,2)$!

$$S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2 \times 1 = 3$$

Définition

Le nombre de Bell B_n est le nombre total de partitions d'un ensemble à n éléments.

En d'autres termes,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$$

(on pose $B_0 = 1$).


"That's all folks!"