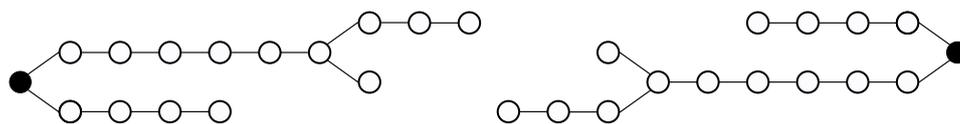


ÉTUDES DE SÉRIES PARTICULIÈRES DANS LE GROUPE DES SÉRIES EN ARBRES



Bérénice Oger
Master de Mathématiques, ENS Lyon

Stage effectué de janvier à avril 2010,
au laboratoire de Mathématiques Camille Jordan, Lyon
sous la direction de F. Chapoton

ETUDES DE SÉRIES PARTICULIÈRES DANS LE GROUPE DES SÉRIES EN ARBRES

BÉRÉNICE OGER

INTRODUCTION

L'objet de ce rapport est l'étude d'un groupe de séries formelles indexées par des arbres enracinés, que nous décrirons, puis que nous situerons au sein d'autres structures algébriques, telles que des opérades, des algèbres de Lie et des algèbres de Hopf sur des ensembles d'arbres. Notre étude se portera tout particulièrement sur un analogue du logarithme dans ce groupe.

Cette étude trouve sa motivation dans diverses branches des mathématiques telles que la théorie quantique des champs, l'algèbre, l'analyse numérique ou encore la géométrie. En effet, les groupes étudiés, notamment celui de Butcher, servent au formalisme de méthodes d'approximation d'équations différentielles ordinaires utilisant des arbres, ainsi qu'à l'étude des flots de champs de vecteurs. De plus, l'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer, introduite par Kreimer pour la renormalisation en théorie quantique des champs, apparaît naturellement dans la dernière partie du rapport, ayant un lien direct avec le groupe étudié.

Le groupe des séries formelles indexées par des arbres enracinés que nous étudions est un groupe relativement complexe. Cependant, des projections sur des groupes de séries indexées par des entiers ou encore l'expression explicite des coefficients de séries a priori compliquées donnent des résultats surprenants.

L'expression des coefficients d'un analogue L , appelé logarithme*, du logarithme dans le groupe des séries en arbres ne fait intervenir que les polynômes d'Ehrhart et quelques fonctions simples alors même que le logarithme* n'était défini que comme inverse d'une autre série dans un groupe où le produit est relativement compliqué.

Nous introduirons donc dans un premier temps les notions de polytopes et de polynômes d'Ehrhart, qui sont cruciales pour la compréhension de l'expression des coefficients du logarithme* L , puis le groupe des séries en arbres et sa loi \circ , dans lequel nous travaillons, ainsi que la série logarithme*. Nous démontrerons ensuite le théorème 3.5 page 15, qui donne l'expression des coefficients de L en fonction de polynômes d'Ehrhart.

L'exponentielle* est la somme que l'on obtient en additionnant tous les éléments des multiensembles d'arbres $E(n)$ obtenus récursivement comme suit :

- $E(0) = \{\bullet\}$,
- $E(n)$ est le multiensemble obtenu en ajoutant un sommet aux éléments de $E(n-1)$ de toutes les façons possibles.

Le logarithme* L est défini alors comme l'inverse de la fonction exponentielle*. Ses coefficients s'expriment de manière surprenante à l'aide des polynômes d'Ehrhart. En effet, chaque arbre définit un ordre partiel sur l'ensemble de ses sommets, qui permet à son tour de définir un polytope, en associant une coordonnée du polytope à chacun de ces sommets. A ce polytope, nous associons un polynôme d'Ehrhart qui dénombre le nombre de points à coordonnées entières à l'intérieur du polytope grossit n fois. Ce polynôme d'Ehrhart, objet géométrique, est lié à la série L utilisée en analyse par le théorème suivant :

Théorème (Expression des coefficients de L). *Notons $L = \sum_T \frac{L_T T}{\#Aut(T)}$ où la somme s'étend à tous les arbres finis enracinés et $Ehr_{K_T}(-t-1)$, le polynôme d'Ehrhart associé à l'arbre T . Ces deux éléments sont alors reliés par la formule suivante :*

$$L_T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-1)^{\#T} Ehr_{K_T}(-t-1)}{t}.$$

Après avoir montré l'annulation du coefficient de certains arbres dans le logarithme*, nous approfondirons l'aspect algébrique en montrant les liens qui existent entre le groupe des séries en arbre, les algèbres pré-Lie qui lui sont associées et sur lesquelles il agit, ainsi que les algèbres de Hopf associées à ces deux algèbres pré-Lie.

NOTATIONS ET CONVENTIONS

Tous les arbres considérés sont finis. Nous utiliserons les notations suivantes :

- $\#A$ désigne le cardinal de l'ensemble A ,
- $\#T$ désigne le nombre de sommets de l'arbre T ,
- $[a; b]$ désigne le segment d'entiers compris entre les entiers a et b , c'est-à-dire l'ensemble $\{a, a+1, a+2, \dots, b-1, b\}$,
- \cdot désigne la multiplication dans \mathbb{C} ,
- $a \wedge b$ désigne le PGCD de a et de b et $a \vee b$, leur PPCM,
- $(f(x))^{(k)}$ désigne la dérivée k ième de f en x ,
- pour tout arbre T , $V(T)$ désigne l'ensemble des sommets de T et $E(T)$, l'ensemble de ses arêtes,

1. POLYTOPES ET POLYNÔME D'EHRHART

1.1. Polytopes.

Dans ce qui suit, \mathcal{P}° désigne l'intérieur du polytope \mathcal{P} .

Définition 1.1. Un *polytope* est une intersection bornée de demi-espaces de \mathbb{R}^n . De manière équivalente, un polytope est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Un polytope est dit à *sommets entiers* si les coordonnées de tous ses sommets sont entières.

Exemples : Les polygones et les polyèdres sont des polytopes respectivement de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

1.2. Polynôme d'Ehrhart.

A chaque polytope à sommets entiers, on peut associer un polynôme d'Ehrhart qui permet de compter le nombre de points à coordonnées entières à l'intérieur et sur les bords du polytope.

1.2.1. Définition.

Théorème 1.2. *Soit \mathcal{P} un polytope à sommets entiers de \mathbb{R}^n . Il existe un unique polynôme $Ehr_{\mathcal{P}}(t)$, de degré n , à coefficients rationnels tel que :*

$$Ehr_{\mathcal{P}}(n) = \#\{n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d\} \text{ pour tout } n \geq 1,$$

$$Ehr_{\mathcal{P}}(-n) = (-1)^{\#\mathcal{P}} \#\{n\mathcal{P}^\circ \cap \mathbb{Z}^d\} \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ (loi de réciprocité),}$$

$$Ehr_{\mathcal{P}}(0) = 1.$$

Ce polynôme est le polynôme d'Ehrhart, noté $Ehr_{\mathcal{P}}(n)$.

Démonstration. D'après [Bri02].

Nous ramenons le problème à celui d'un simplexe, de sommets s_0, \dots, s_d . En effet, tout polytope entier peut être subdivisé en simplexes entiers.

Notons Π le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$ formé des points $\sum_{i=0}^d t_i(s_i, 1)$ avec $0 \leq t_i < 1$.

Alors les couples (m, n) tels que $m \in n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$ sont ceux de la forme :

$$(m, n) = (m_0, n_0) + \sum_{i=0}^d x_i(s_i, 1)$$

où $(m_0, n_0) \in \Pi$ et $x_i \in \mathbb{N}$.

Le nombre de points à coordonnées entières dans $n\mathcal{P}$ est alors le coefficient de z^n dans la série formelle suivante :

$$F_{\mathcal{P}}(z) = \sum_{(m_0, n_0) \in \Pi} z^{n_0} \sum_{x_0, \dots, x_d \geq 0} z^{x_0 + \dots + x_d}.$$

Comme $0 \leq n_0 \leq d$, pour tout $(m_0, n_0) \in \Pi$ et $m_0 = 0$ quand $n_0 = 0$, il existe $(\delta_1, \dots, \delta_d)$ tel que :

$$F_{\mathcal{P}}(z) = (1 + \delta_1 z + \dots + \delta_d z^d)(1 - z)^{-d-1}.$$

Un développement en série donne :

$$\#(n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d) = \binom{n+d}{d} + \delta_1 \binom{n+d-1}{d} + \dots + \delta_d \binom{n}{d}.$$

$\#(n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d)$ est donc une fonction polynomiale qui prend la valeur 1 en 0. Un raisonnement similaire utilisant Π' , le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$ formé des points $\sum_{i=0}^d t_i(s_i, 1)$ avec $0 < t_i \leq 1$, donne le résultat pour $\#(n\mathcal{P}^\circ \cap \mathbb{Z}^d)$. □

1.2.2. Description des coefficients.

Certains coefficients du polynôme d'Ehrhart peuvent être décrits simplement :

Proposition 1.3. Ecrivant $Ehr_{\mathcal{P}}(n) = a_0 + \dots + a_d n^d$, on obtient :

$$a_d = Vol_d(\mathcal{P}).$$

Démonstration. D'après [Bri02].

$n^{-d} Ehr_{\mathcal{P}}(n)$ est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_{\mathcal{P}} dx = Vol_d(\mathcal{P})$$

d'où $a_d = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-d} Ehr_{\mathcal{P}}(n) = Vol_d(\mathcal{P})$. □

1.2.3. Formule de Pick.

La formule 1.1 permet de relier le volume d'un polygone de \mathbb{R}^2 avec le nombre de points à coordonnées entières situés sur les bords et à l'intérieur du polygone.

En dimension 2, nous pouvons poser :

$$Ehr_{\mathcal{P}}(n) = a + bn + cn^2.$$

Par définition du polynôme d'Ehrhart, celui-ci vérifie les égalités suivantes :

$$Ehr_{\mathcal{P}}(0) = 1, Ehr_{\mathcal{P}}(1) = \#\{\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d\} \text{ et } Ehr_{\mathcal{P}}(-1) = \#\{\mathcal{P}^\circ \cap \mathbb{Z}^d\}.$$

Comme $Ehr_{\mathcal{P}}(1) = 1 + b + c$ et $Ehr_{\mathcal{P}}(-1) = 1 - b + c$, nous pouvons alors exprimer b et c en fonction des évaluations du polynôme d'Ehrhart en 1 et -1 :

$$b = \frac{Ehr_{\mathcal{P}}(1) - Ehr_{\mathcal{P}}(-1)}{2},$$

$$c = \frac{Ehr_{\mathcal{P}}(1) + Ehr_{\mathcal{P}}(-1) - 2}{2}.$$

Or, d'après la proposition 1.3, le coefficient dominant vérifie : $c = Vol(\mathcal{P})$.
D'où la proposition suivante :

Proposition 1.4 (Formule de Pick). En dimension 2, le volume du polytope s'exprime :

$$(1.1) \quad Vol(\mathcal{P}) = p_{int} + \frac{p_{bord}}{2} - 1$$

où $p_{int} = \#\{\mathcal{P}^\circ \cap \mathbb{Z}^d\}$ désigne le nombre de points à l'intérieur du polytope et $p_{bord} = \#\{\partial\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d\}$ désigne le nombre de points à sa frontière.

1.3. Calcul du polynôme d'Ehrhart.

Dans ce paragraphe, nous calculerons les polynômes d'Ehrhart de deux types différents de polytopes à sommets entiers : les pyramides et les simplexes.

1.3.1. Calcul du polynôme d'Ehrhart d'une pyramide.

Nous considérons la pyramide Pyr_n de \mathbb{R}^n , de base l'hypercube dans \mathbb{R}^{n-1} définie par l'ensemble d'inégalités suivant $\{(x_1, \dots, x_n) | 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1, \forall 2 \leq i \leq n\}$.

Nous exprimerons le polynôme d'Ehrhart d'une pyramide en fonction d'autres polynômes : les polynômes de Bernoulli.

Définition 1.5. Il existe une et une seule famille $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que :

- $B_0 = 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n = nB_{n-1}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(t) dt = 0$.

Ces polynômes sont les Polynômes de Bernoulli.

Nous admettons le résultat suivant :

Lemme 1.6. Les deux séries suivantes sont égales :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} x^n = \frac{x}{e^x - 1} e^{tx}$$

Ce résultat permet de démontrer le lemme suivant :

Lemme 1.7. Pour $n \geq 1$, les polynômes de Bernoulli vérifient l'égalité suivante : $B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}$.

Démonstration. Pour démontrer l'égalité du lemme, nous montrerons l'égalité entre deux séries associées à chacun de ses membres :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t+1) - B_n(t)}{n!} x^n = \frac{xe^{x(t+1)} - xe^{tx}}{e^x - 1} = xe^{tx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} x^n.$$

Nous obtenons ainsi le résultat voulu en identifiant les coefficients de x^n dans chacun des membres. \square

L'expression du polynôme d'Ehrhart d'une pyramide est ainsi donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.8. Le polynôme d'Ehrhart d'une pyramide a l'expression suivante :

$$Ehr_{Pyr_n}(t) = \sum_{k=0}^t (k+1)^{n-1} = \frac{1}{n} (B_n(t+2) - B_n(1)).$$

Démonstration. Montrer le théorème revient à calculer

$$\#\{0 \leq x_1 \leq x_i \leq 1, \forall 2 \leq i \leq n\}.$$

Une fois fixé $x_1 = k$, nous obtenons l'hypercube de dimension $n - 1$ grossi $t - k$ fois d'où la première égalité.

En utilisant le lemme 1.7, nous obtenons le second résultat :

$$Ehr_{Pyr_n}(t) = \sum_{k=1}^{t+1} \frac{B_n(k+1) - B_n(k)}{n} = \frac{B_n(t+2) - B_n(1)}{n}. \quad \square$$

1.3.2. Calcul du polynôme d'Ehrhart d'un simplexe.

Pour tout $n \geq 1$, nous considérons le simplexe Δ_n de \mathbb{R}^n défini par l'ensemble d'inégalités suivant : $\Delta_n = \#\{(m_1, \dots, m_n) : m_1 + \dots + m_n \leq 1\}$.

L'expression du polynôme d'Ehrhart du simplexe Δ_n est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.9. *Pour tout $n \geq 1$, le polynôme d'Ehrhart du simplexe Δ_n s'exprime :*

$$Ehr_{\Delta_n}(t) = \binom{n+t}{n}.$$

Démonstration. Le simplexe Δ_n peut être écrit comme :

$$\Delta_n = \#\{(m_1, \dots, m_{n+1}) : m_1 + \dots + m_{n+1} = 1\}.$$

Pour $n = 1$, il y a exactement $t + 1$ points entiers dans le simplexe Δ_1 grossi t fois, à savoir les points de coordonnée à valeur dans l'ensemble $\{0, \dots, t\}$.

Pour $n > 1$, comme $Ehr_{\Delta_n}(t) = \sum_{k=0}^t Ehr_{\Delta_{n-1}}(k)$, par hypothèse de récurrence, nous obtenons :

$$Ehr_{\Delta_n}(t) = \sum_{k=0}^t \binom{n-1+k}{n-1} = \binom{n+t}{n}.$$

□

Nous renvoyons à [Bec] pour plus de détails sur les polynômes d'Ehrhart et leur calcul.

Les polytopes et les polynômes d'Ehrhart définis dans cette section peuvent être associés à des arbres enracinés définis en 2.1.2.

Les polynômes d'Ehrhart sont au coeur du théorème 3.5 d'expression des coefficients de L de la section 3.1, page 15.

2. ARBRES ENRACINÉS ET GROUPE DES SÉRIES EN ARBRES

Nous définissons dans un premier temps les arbres enracinés puis le groupe des séries indexées par des arbres enracinés.

2.1. Arbres enracinés.

2.1.1. Définitions.

Définition 2.1. Un arbre enraciné est un graphe

- connexe,
- simplement connexe,
- possédant un sommet distingué que l'on appelle *racine*.

Si T est un arbre enraciné, il induit un ordre partiel \leq_T sur l'ensemble de ses sommets : $s \leq_T s'$ si et seulement si il existe un chemin de la racine à s' passant par s .

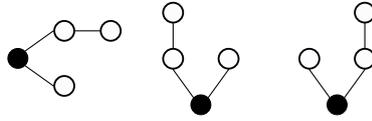
Si de plus s et s' sont reliés par une arête, s est appelé le *père* de s' et s' , un *fil* de s .

La racine est le seul sommet sans père.

Les feuilles sont les sommets sans fils.

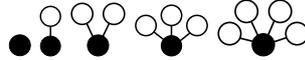
Les arbres enracinés seront implicitement orientés comme suit : chaque arête entre deux sommets sera orientée du fils vers le père.

Nous représenterons les arbres enracinés verticalement avec leur racine en bas ou horizontalement avec leur racine à gauche. La racine est représentée par un disque noir. Notons que les trois schémas suivants représentent le même arbre enraciné :



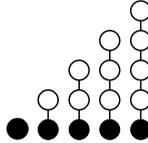
Nous donnons ci-dessous l'exemple de deux familles d'arbres enracinés : les *corolles* et les *chaînes*.

Définition 2.2. Une *corolle* est un arbre enraciné dont seule la racine a des fils. On appelle C_n la corolle à n sommets.



Ci-dessus de gauche à droite : C_1 , C_2 , C_3 , C_4 et C_5 .

Définition 2.3. Une *chaîne* est un arbre enraciné dont tous les sommets ont au plus un fils. On note S_n , la chaîne à n sommets.



Ci-dessus de gauche à droite : S_1 , S_2 , S_3 , S_4 et S_5 .

La notion de *forêt* définie ci-dessous permet de généraliser la notion d'arbre :

Définition 2.4. Une *forêt* est un ensemble d'arbres. Une forêt d'arbres enracinés est un ensemble d'arbres enracinés.

Dans ce qui suit, sauf mention du contraire, les forêts seront des forêts d'arbres enracinés.

Un arbre peut donc être considéré comme une forêt d'un seul arbre.

Nous pouvons facilement établir la fonction suivante, injective de l'ensemble des forêts dans l'ensemble des arbres :

Définition 2.5. La fonction B_+ de l'ensemble des forêts d'arbres enracinés à valeurs dans l'ensemble des arbres enracinés est définie comme suit : Si $\{t_1, \dots, t_n\}$ est l'ensemble des arbres constituant la forêt \mathcal{F} , $B_+(\mathcal{F})$ est l'arbre obtenu en reliant les racines de t_1, \dots, t_n à un nouveau sommet r qui devient racine.

Exemples : C_1 et S_1 sont l'arbre \bullet .

On peut définir la corolle C_n comme étant $B_+(\bullet, \dots, \bullet)$ où \bullet apparaît $n - 1$ fois pour $n \geq 2$.

On peut définir S_n récursivement comme suit : $S_{n+1} = B_+(S_n)$ pour $n \geq 1$.

Rappelons l'existence des deux groupes suivants qui sont des groupes de séries indexées par les entiers naturels :

Définition 2.6. Le groupe G_{mult} est formé de l'ensemble des séries de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, où a_n appartient à \mathbb{C} , muni de la multiplication \times entre les séries, décrite ci-dessous :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \times \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_p b_q x^{p+q} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^n a_p \cdot b_{n-p} \right) x^n.$$

Définition 2.7. Le groupe G_{comp} est formé de l'ensemble des séries de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, où a_n appartient à \mathbb{C} , muni de la composition \circ_G entre les séries, décrite ci-dessous :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \circ_G \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \right)^p$$

où $(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n)^p = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \times \dots \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n}_p$, avec \times , la multiplication du groupe G_{mult} .

Il existe un lien entre ces deux groupes de séries et le groupe des séries en arbres défini ci-dessous :

Définition 2.8. Le *groupe des séries en arbres* G_{arbre} est constitué de l'ensemble des séries formelles indexées par des arbres enracinés de la forme $\sum_T a_T T$, où a_T appartient à \mathbb{C} .

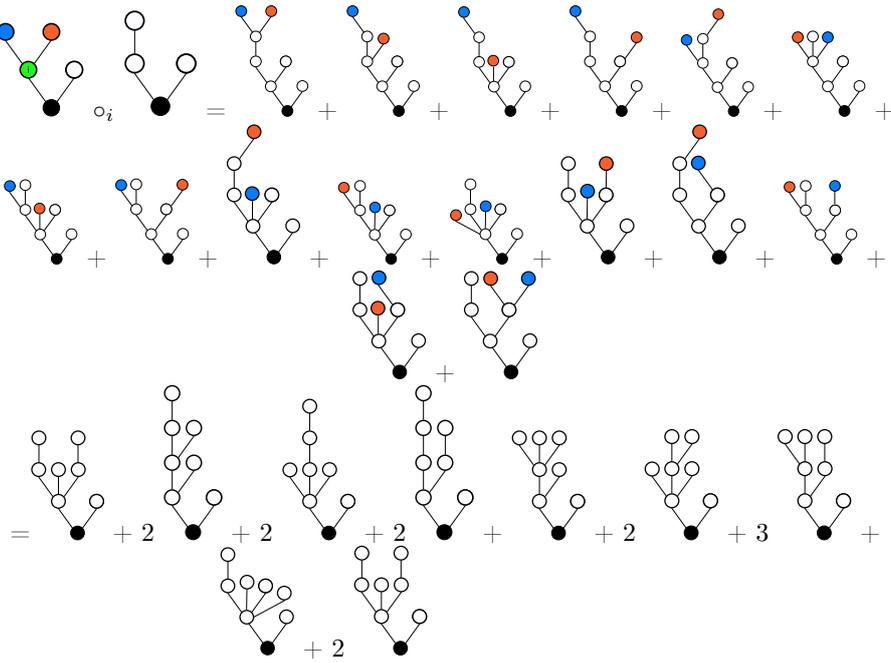
La composition est associative, linéaire à gauche. De plus, si x est homogène de degré n , de sommets étiquetés v_1, \dots, v_n , et $y = \sum_{k \geq 1} y_k$, alors

$$x \circ y = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}^n} (\dots ((x \circ_1 y_{k_1}) \circ_2 y_{k_2}) \dots \circ_n y_{k_n})$$

où $x \circ_i y_{k_i}$ est l'opération qui consiste à mettre l'arbre y_{k_i} dans le sommet v_i de x , pour tout i entre 1 et n .

Plus formellement l'opération $x \circ_i y_{k_i}$ revient à supprimer le sommet v_i , à relier son père p à la racine de y_{k_i} qui devient fils de p et à sommer sur toutes les possibilités qu'il y a de relier chaque fils de v_i à un sommet de y_{k_i} .

Voici un exemple de composition sur le ième sommet d'un arbre (en vert sur le premier schéma) :



Nous nous abstenons de montrer que la loi \circ est bien une loi de groupe associative et linéaire à gauche, toutes les vérifications d'usage découlant de la structure de l'opérade, introduite au paragraphe 5.1, dont est issu ce groupe.

Nous pouvons établir un lien entre les trois groupes définis précédemment. En effet, G_{arbre} se projette sur G_{comp} et sur G_{mult} via les deux morphismes de groupe suivants, qui sont linéaires :

$$\begin{aligned} \pi_c : G_{arbre} &\rightarrow G_{mult} \\ C_n &\mapsto x^{n-1} \\ T \neq C_n &\mapsto 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_s : G_{arbre} &\rightarrow G_{comp} \\ S_n &\mapsto x^n \\ T \neq S_n &\mapsto 0 \end{aligned}$$

2.1.2. Polytope et polynôme d'Ehrhart associés à un arbre enraciné.

Nous avons vu que l'arbre T induisait un ordre partiel sur l'ensemble de ses sommets. Cet ordre permet de définir un polytope.

Soit T , un arbre à d sommets. On lui associe le polytope K_T de \mathbb{R}^d , ensemble des points de coordonnées $(x_s)_{s \in \text{Som}(T)}$, vérifiant pour tous sommets s et $s' : 0 \leq x_s \leq 1$ et $x_s \leq x_{s'}$ si et seulement si $s \leq_T s'$ (voir le paragraphe 1.1 pour un rappel de la définition d'un polytope).

Ainsi, par exemple, le polytope associé à S_n est le simplexe Δ_n et le polytope associé à C_n est Pyr_n , la pyramide dont la base est un hypercube de dimension $n-1$.

Dès lors, on appelle polynôme d'Ehrhart (1.2) associé à T le polynôme d'Ehrhart de K_T .

Exemples : Le polynôme d'Ehrhart associé à la corolle C_n est celui associé à la pyramide Pyr_n , calculé au paragraphe 1.3.1, donc nous avons :

$$(2.1) \quad Ehr_{C_n}(t) = \sum_{k=0}^t (k+1)^{n-1} = \frac{1}{n} (B_n(t+2) - B_n(1)).$$

Le polynôme d'Ehrhart associé à la chaîne S_n est celui du simplexe Δ_n , calculé au paragraphe 1.3.2, donc nous avons :

$$(2.2) \quad Ehr_{S_n}(t) = \binom{n+t}{n}.$$

Remarque : Pour calculer le polynôme d'Ehrhart d'un polytope \mathcal{P} , il est parfois plus facile de considérer la série suivante associée au polynôme d'Ehrhart $Ehr_{\mathcal{P}}(t)$, que nous nommerons *Série d'Ehrhart* :

$$F_{\mathcal{P}}(z) = \sum_{n \geq 0} Ehr_{\mathcal{P}}(n) z^n.$$

Cette série a déjà été utilisée dans la preuve du théorème d'existence des polyômes d'Ehrhart, au point 1.2.1.

Connaissant la série d'Ehrhart d'un polytope \mathcal{P} , le polynôme d'Ehrhart de \mathcal{P} est donné par la formule suivante :

$$Ehr_{\mathcal{P}}(n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} F_{\mathcal{P}}(0).$$

Lien entre la série d'Ehrhart d'un arbre et les séries d'Ehrhart de ses branches.

Soit T un arbre et (a_1, \dots, a_k) la forêt de ses branches. Nous avons alors $T = B_+(a_1, \dots, a_k)$, et l'expression de la série d'Ehrhart de T est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.9. *Le lien entre la série d'Ehrhart d'un arbre et les séries d'Ehrhart de ses branches est :*

$$F_T(z) = \frac{1}{1-z} F_{\mathcal{H}}(z),$$

où \mathcal{H} représente le polytope de dimension $\sum_{i=1}^k \#a_i$, de coordonnées $(x_1, \dots, x_{\sum_{i=1}^k \#a_i})$ dont la restriction aux coordonnées $(x_{\sum_{i=1}^j \#a_i+1}, \dots, x_{\sum_{i=1}^{j+1} \#a_i})$ est le polytope $K_{a_{j+1}}$.

Démonstration. Pour prouver ce théorème, remarquons que

$$Ehr_T(n) = \sum_{p=0}^n Ehr_{a_1}(p) \times \dots \times Ehr_{a_k}(p).$$

Cette égalité est obtenue en sommant sur les valeurs possibles de la coordonnée du polytope K_T associée à la racine de T : il y a $Ehr_{a_1}(n-p) \times \dots \times Ehr_{a_k}(n-p)$ points à coordonnées entières, dans et sur les bords du polytope grossi n fois, dont la coordonnée associée à la racine prend la valeur p .

Par définition, nous obtenons donc avec ce qui précède :

$$F_T(z) = \sum_{n \geq 0} Ehr_T(n) z^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{p=0}^n Ehr_{a_1}(p) \times \dots \times Ehr_{a_k}(p) z^n$$

d'où :

$$F_T(z) = \sum_{p=0}^{\infty} Ehr_{a_1}(p) \times \dots \times Ehr_{a_k}(p) \sum_{n=p}^{\infty} z^n = \sum_{p=0}^{\infty} Ehr_{a_1}(p) \times \dots \times Ehr_{a_k}(p) \frac{z^p}{1-z}.$$

Reconnaissant la série d'Ehrhart de \mathcal{H} , nous obtenons le résultat voulu. \square

Les polynômes d'Ehrhart comme polynômes à valeurs entières.

Définition 2.10. Un *polynôme à valeurs entières* est un polynôme qui associe un entier à tout entier.

Nous admettrons que pour tout polynôme \mathfrak{P} à valeurs entières, il existe des coefficients entiers (c_1, \dots, c_d) tels que, pour tout entier n , $\mathfrak{P}(n) = \sum_{k=0}^d c_k \binom{n}{k}$.

Le but de ce paragraphe est d'établir une méthode pour déterminer les c_k .

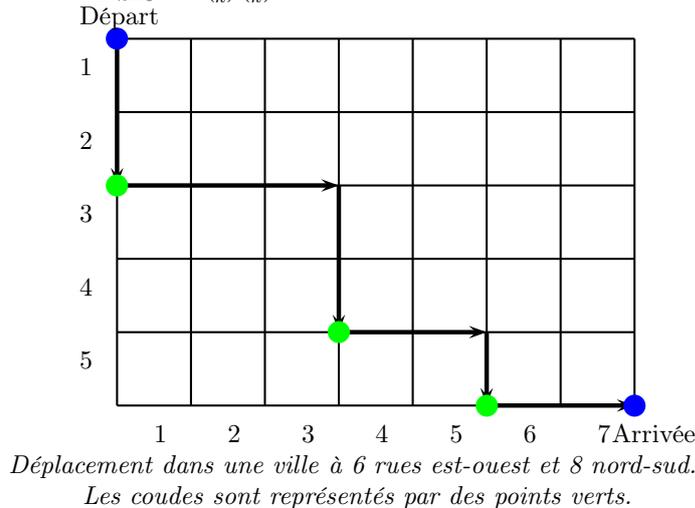
Commençons par l'étude du cas simple des polynômes d'Ehrhart des chaînes :

Théorème 2.11. *Le polynôme d'Ehrhart de la chaîne à d sommets admet la décomposition suivante : $Ehr_{S_d}(n) = \binom{n+d}{n} = \sum_{k=0}^{\min(d,n)} \binom{d}{k} \binom{n}{k}$.*

Démonstration. Nous donnerons une preuve combinatoire élégante de ce théorème. Considérons une ville avec $d+1$ rues parallèles à l'axe est-ouest et $n+1$ rues parallèles à l'axe nord-sud. Le nombre de façons d'aller de l'intersection la plus au nord-ouest vers celle située la plus au sud-est en n'empruntant que des rues et en se déplaçant toujours vers l'est ou le sud, peut être calculé de deux manières différentes.

Il est assez immédiat que pour arriver à bon port, il faut et il suffit d'aller au sud à d intersections et à l'est à $n+d$ intersections. Le parcours est alors complètement déterminé par les intersections où l'on décide d'aller au sud. Il y a donc $\binom{n+d}{d}$ parcours possibles.

Nous pouvons aussi observer le nombre de coudes effectués par la trajectoire, c'est-à-dire le nombre de fois où la trajectoire tourne vers l'est après avoir été au sud. Il y en a au maximum $\min(d, n)$ puisque chaque coude impose que la trajectoire soit allée à au moins une intersection vers le sud, puis à au moins une intersection vers l'est. Il reste à choisir quand ont lieu ces coudes, c'est-à-dire placer k coudes dans la liste des d déplacements vers le sud et dans la liste des n déplacements vers l'est : il y a donc $\sum_{k=0}^{\min(d,n)} \binom{d}{k} \binom{n}{k}$ parcours possibles.



\square

Exprimons maintenant la série d'Ehrhart de l'arbre T en fonction des c_k :

$$F_T(z) = \sum_{n \geq 0} Ehr_T(n) z^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\#T} c_k \binom{n}{k} z^n = \sum_{k=0}^{\#T} c_k \sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} z^n.$$

Donnons une autre expression du membre suivant :

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} z^n = \frac{z^k}{k!} \times \left(\sum_{n \geq 0} z^n \right)^{(k)} = \frac{z^k}{k!} \left(\frac{1}{1-z} \right)^{(k)} = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}.$$

La série d'Ehrhart s'écrit alors :

$$F_T(z) = \sum_{k=0}^{\#T} c_k \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}} = \frac{1}{(1-z)^{\#T+1}} \left[\sum_{k=0}^{\#T} c_k \sum_{p=0}^{d-k} (-1)^p z^{p+k} \binom{d-k}{p} \right].$$

D'où le résultat suivant qui permet de déterminer les c_k en mettant $F_T(z)$ sous forme de fraction rationnelle :

$$(2.3) \quad F_T(z) = \frac{1}{(1-z)^{\#T+1}} \left[\sum_{p=0}^{\#T} \left(\sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{d-k}{p-k} c_k \right) z^p \right].$$

Calculons grâce à cette formule les coefficients pour la décomposition du polynôme d'Ehrhart d'une chaîne à d sommets.

La série d'Ehrhart d'une chaîne à d sommets est la suivante :

$$F_{S_n}(z) = \sum_{n \geq 0} \binom{n+d}{d} z^n = \frac{1}{d!} \left(\frac{1}{1-z} \right)^{(d)} = \frac{1}{(1-z)^{d+1}}.$$

D'après ce qui précède, nous avons donc $c_0 = 1$ et pour tout $p > 0$, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{d-k}{p-k} c_k = 0.$$

Nous pouvons alors retrouver par récurrence l'expression des c_k démontrée au théorème 2.11. Notons qu'en remplaçant les c_k nous obtenons l'identité suivante, pour $p > 0$:

$$\sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{d-k}{p-k} \binom{d}{k} = 0.$$

2.2. Séries en arbres particulières.

Nous nous intéresserons en particulier à deux éléments du groupe des séries en arbres : l'exponentielle*, noté E , et le logarithme*, noté L .

2.2.1. Séries exponentielles.

Pour définir la série exponentielle, nous avons besoin de l'opérateur d'ajout d'un sommet à un arbre :

Définition 2.12. On définit l'opérateur $\bullet \curvearrowright$ de l'ensemble des arbres enracinés dans lui-même, qui à un arbre T associe la somme de toutes les façons de lui ajouter un sommet.

Exemples :

$$\begin{aligned} \bullet \curvearrowright \bullet &= \bullet \circlearrowleft, \\ \bullet \curvearrowright \bullet \circlearrowleft &= \bullet \circlearrowleft \circlearrowleft + \bullet \circlearrowleft \circlearrowleft \circlearrowleft. \end{aligned}$$

A partir de cet opérateur, nous définissons l'exponentielle* :

Définition 2.13. On appelle *série exponentielle** la série suivante :

$$E = \bullet + \frac{\bullet \curvearrowright \bullet}{2} + \frac{\bullet \curvearrowright (\bullet \curvearrowright \bullet)}{3!} + \dots + \frac{(\bullet \curvearrowright)^n \bullet}{(n+1)!} + \dots$$

où $(\bullet \curvearrowright)^n$ consiste en n applications successives de $\bullet \curvearrowright$.

$$E = \sum_{n \geq 1} E_n \times \frac{1}{n!}$$

où $E_n = \sum_{T, \#T=n} \text{CM}_T \times T$.

Les CM_T sont appelés coefficients de Connes-Moscovici.

Pour obtenir une description des coefficients de Connes-Moscovici, nous devons introduire la factorielle d'un arbre :

Définition 2.14. La *factorielle* d'un arbre T est définie récursivement comme suit :

$$\begin{aligned} \bullet! &= 1 \\ T! &= \#T \times \prod_{j=1}^k T_j! \end{aligned}$$

où $T = B_+(T_1, \dots, T_k)$.

Alors, une expression des coefficients de Connes-Moscovici est donnée par le théorème suivant, redémontré dans la partie 3.5, au point 3.5 :

Théorème 2.15. Les coefficients de Connes-Moscovici vérifient l'égalité suivante :

$$\text{CM}_T = \frac{n!}{\# \text{Aut}(T) \times T!}$$

Démonstration. Nous donnerons deux preuves différentes de ce théorème : l'une faisant intervenir une formule assez étonnante, d'après l'article [BK99], et l'autre plus efficace.

1ère preuve : Soit T un arbre. On met des lettres sur les sommets de T , appelant les n feuilles de T (a_1, \dots, a_n) .

– Le nombre de numérotations croissantes pour l'ordre partiel induit par T sur ses sommets est $\text{CM}(T) \times \# \text{Aut}(T)$.

Pour chaque numérotation, il n'y a qu'un sommet avec le numéro maximum.

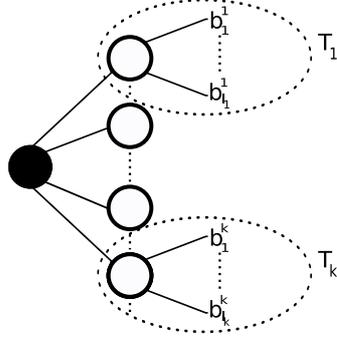
Ce sommet s'avérant être une feuille, la feuille a_j , on peut l'enlever et on appelle f_j^T l'arbre obtenu en enlevant la feuille a_j . On obtient :

$$\text{CM}(T) \times \# \text{Aut}(T) = \sum_{j=1}^n \text{CM}(f_j^T) \# \text{Aut}(f_j^T).$$

– Montrons par récurrence sur le nombre de feuille de T que, reprenant les notations du point précédent, si $T = B_+(T_1, \dots, T_k)$,

$$\prod_{l=1}^k \frac{1}{T_l!} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{f_j^T!}.$$

- Pour $\#T = 1$, la proposition est vraie si on adopte la convention que la factorielle de l'arbre vide est 1.
- Pour $\#T = 2$, $k = 1$, $n = 1$ et $\#T_1 = \#f_1^T = 1$ donc $\prod_{l=1}^1 \frac{1}{1} = \sum_{j=1}^1 \frac{1}{1}$.
- Supposons cela vrai pour $\#T < n$. Soit T un arbre tel que $\#T = n$. On appelle (T_1, \dots, T_k) les branches de T et $(b_1^i, \dots, b_{l_i}^i)$ les branches de T_i .



Posant $f_{j,i}^T = B_+(T_1, \dots, T_{i-1}, f_j^{T_i}, T_{i+1}, \dots, T_k)$, c'est à dire l'arbre obtenu à partir de T en enlevant la j ème feuille de la i ème branche, on obtient :

$$f_{j,i}^{T!} = f_j^{T_i!} (\#T - 1) \prod_{l \neq i} T_l!$$

Soulignons la différence entre $f_{j,i}^T$, l'arbre obtenu à partir de T en enlevant la j ème feuille de la i ème branche, et $f_j^{T_i}$, l'arbre obtenu à partir de T_i en enlevant la j ème feuille.

D'où :

$$\prod_{p=1}^k \frac{1}{T_p!} = \sum_{i=1}^k \frac{\#T_i}{(\#T - 1) \prod_{p=1}^k T_p!}$$

$$\prod_{p=1}^k \frac{1}{T_p!} = \sum_{i=1}^k \frac{\#T_i}{\prod_{q=i}^{l_i} b_q^i! \#T_i (\#T - 1) \prod_{j \neq i} T_j!}$$

Par hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\prod_{p=1}^k \frac{1}{T_p!} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{f_j^{T_i} (\#T - 1) \prod_{j \neq i} T_j!}$$

$$\prod_{p=1}^k \frac{1}{T_p!} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{f_{j,i}^T}$$

– Montrons par récurrence que :

$$\text{CM}(T) \# \text{Aut}(T) = \frac{(\#T)!}{T!}$$

- Pour $\#T = 1$, $\text{CM}(T) = 1$, $\# \text{Aut}(T) = 1$, $T! = \#T! = 1$ donc la formule est vérifiée.
- Supposons que ce soit vrai pour $\#T < n$ et soit T un arbre tel que $\#T = n$. On a alors :

$$\text{CM}(T) \# \text{Aut}(T) = \sum_{j=1}^n \text{CM}(f_j^T) \# \text{Aut}(f_j^T) = \sum_{j=1}^n \frac{(n-1)!}{f_j!} = \frac{(n-1)!}{\prod_{l=1}^k b_l!}$$

d'où le résultat.

2ème preuve : Posons $\text{CM}(T)\#Aut(T) = D(T)$. Ce nombre est le nombre de numérotations croissantes possibles d'une copie T^{ind} de T dont les sommets sont indexés par des lettres.

Si $T = B_+(T_1, \dots, T_k)$, numérotter T^{ind} de manière croissante revient à :

- * Choisir quels nombres placer dans chaque branche (la racine est 1),
- * Numérotter chacun des T_i^{ind} de manière croissante avec ces nombres,

donc $D(T) = \frac{(n-1)!}{n_1! \dots n_k!} D(T_1) \times \dots \times D(T_k)$.

On montre alors la formule par récurrence :

- Pour $\#T = 1$, $\text{CM}(T) = 1$, $\#Aut(T) = 1$, $T! = (\#T)! = 1$ donc la formule est vérifiée.
- Supposons la formule vraie pour $\#T < n$. Si $\#T = n$,

$$D(T) = \frac{(n-1)!}{n_1! \dots n_k!} D(T_1) \times \dots \times D(T_k) = \frac{(n-1)!}{T_1! \dots T_k!} = \frac{n!}{T!}.$$

□

Corollaire 2.16. On a :

$$\text{CM}_T = \frac{n!}{\#Aut(T)} \times \text{Vol}(K_T).$$

Démonstration.

$$\text{Vol}(K_T) = \int_{K_T} 1 \prod_{s \in \text{Som}(T)} dx_s = \int_{0 \leq x_s \leq 1, x_s \leq x'_s \text{ si } s \leq_T s'} 1 \prod_{s \in \text{Som}(T)} dx_s$$

Montrons par récurrence sur $\#T$ que $\text{Vol}(K_T) = \frac{1}{T!}$.

- Pour $\#T = 1$, $\text{Vol}(K_T) = 1$.
- Supposons cela vrai pour $\#T < n$. Soit T tel que $\#T = n$, $T = B_+(T_1, \dots, T_k)$, et r sa racine.

$$\text{Vol}(K_T) = \int_{0 \leq x_r \leq 1} \int_{x_r \leq x_s \leq 1, x_s \leq x'_s \text{ si } s \leq_T s'} 1 \prod_{s \in \text{Som}(T) - r} dx_s dx_r.$$

Un changement de variables donne :

$$\text{Vol}(K_T) = \left[\frac{-1}{\#T} (1 - x_r)^{\#T} \right]_0^1 \times \text{Vol}(K_{T_1}) \times \dots \times \text{Vol}(K_{T_k}),$$

donc

$$\text{Vol}(K_T) = \frac{1}{\#T \times T_1! \dots T_k!} = \frac{1}{T!}.$$

□

2.2.2. Série Logarithme*.

La série dont nous étudierons les coefficients est la série suivante :

Définition 2.17. On définit le logarithme* comme l'inverse de l'exponentielle* dans le groupe des séries en arbres.

3. CALCUL DES COEFFICIENTS DU LOGARITHME*

Dans cette section, nous donnerons une preuve du théorème d'expression des coefficients de L dans le cas des corolles et des chaînes puis dans le cas général. Ensuite, nous spécialiserons la formule obtenue pour différentes valeurs de t et obtiendrons ainsi une nouvelle preuve du théorème 2.16, ainsi que d'autres résultats.

3.1. Suspension et théorème d'expressions des coefficients de L .

Pour prouver le théorème d'expression des coefficients de L , nous devons introduire la notion suivante :

Définition 3.1. Nous appellerons *suspension* l'application \mathcal{S}_t du groupe des séries formelles en arbres dans lui-même, définie comme suit : $\sum_T a_T T \mapsto \sum_T t^{\#T-1} a_T T$.

Lemme 3.2. \mathcal{S}_t est un morphisme de groupes.

La preuve de ce lemme résulte immédiatement des définitions.

La suspension permet une généralisation de l'exponentielle* :

Définition 3.3. On définit : $E_t = \mathcal{S}_t(E) = \sum_{n \geq 1} E_n \frac{t^{n-1}}{n!}$ où $E_n = \sum_{T, \#T=n} \text{CM}_T \times T$.

Remarquons que E_1 n'est autre que E , l'exponentielle*.

Enfin, le théorème d'expression des coefficients de L consiste en l'expression des coefficients de la série suivante :

Définition 3.4. On définit : $P(t) = E_t \circ L = \sum_T \frac{P_T(t)T}{\#Aut(T)}$.

Cette série donne alors les coefficients de L par le théorème suivant, de Zhao et Wright [WZ] :

Théorème 3.5 (Expression des coefficients de L).

$$P_T(t) \times t = (-1)^{\#T} \text{Ehr}_{K_T}(-t-1)$$

Posant $L = \sum_T \frac{L_T T}{\#Aut(T)}$, on obtient donc :

$$L_T = P_T(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-1)^{\#T} \text{Ehr}_{K_T}(-t-1)}{t}$$

3.2. Preuve du théorème d'expression des coefficients de L pour les corolles.

Démontrons le théorème 3.5 dans le cas des corolles.

Pour cela, il suffit de montrer l'égalité entre les projections de ses deux membres sur G_{mult} par la projection π_c introduite au paragraphe 2.1.1.

D'après le corollaire 2.12, on calcule que

$$\text{CM}(C_n) = 1,$$

donc, comme seule la projection des corolles n'est pas triviale, nous obtenons :

$$\pi_c(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{CM}(C_{n+1})}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}$$

d'où par inversion :

$$\pi_c(L) = \frac{x}{e^x - 1},$$

et, en utilisant la suspension :

$$\pi_c(E_t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xt)^{n-1}}{n!} = \frac{e^{xt} - 1}{xt},$$

D'où, en multipliant $\pi_c(E_t)$ et $\pi_c(L)$:

$$\pi_c(tE_t \times L) = \frac{e^{xt-1}}{e^x - 1}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Ehr}_{Pyr_n}(-t-1) (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(-t+1) - B_n(1)}{n} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(-t+1)}{n!} (-x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1)}{n!} (-x^n) \right) \end{aligned}$$

Le lemme 1.6 permet de conclure car, on obtient alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} Ehr_{P_{yr_n}}(-t-1)(-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1 - e^{xt}}{1 - e^x}$$

d'où l'égalité voulue.

3.3. Preuve du théorème d'expression des coefficients de L pour les chaînes.

Démontrons le théorème 3.5 dans le cas des chaînes.

Pour cela, il suffit de montrer l'égalité entre les projections de ses deux membres sur G_{comp} par la projection π_s introduite au paragraphe 2.1.1.

D'après le corollaire 2. 12, on calcule que

$$\text{CM}(S_n) = 1$$

donc, comme seule la projection des chaînes n'est pas triviale, nous obtenons :

$$\pi_s(E_t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{CM}(S_n)}{n!} x^n t^{n-1} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} = \frac{e^{tx} - 1}{t}$$

et, par inversion :

$$\pi_s(L) = \log(1 + x).$$

D'où, en composant $\pi_s(E_t)$ et $\pi_s(L)$:

$$\pi_s(tE_t \circ L) = (1 + x)^t - 1$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} Ehr_{\Delta_n}(-t-1)(-1)^n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n-t-1}{n} (-x)^n \\ &= \frac{1}{(1+x)^{-t}} - 1. \end{aligned}$$

3.4. Preuve du théorème d'expression des coefficients de L dans le cas général.

Démontrons le théorème 3.5 dans le cas général.

Dans un abus de notation, nous noterons $\exp(tL) = \sum_{n \geq 0} \frac{(tL)^n}{n!}$.

Nous introduisons de plus l'opérateur de différence Δ défini par la formule :

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t),$$

pour toute fonction f .

Tout polynôme P est uniquement déterminé par la donnée de $P(0)$ et de $\Delta P(t)$, pour $t \in [0; \deg(P)]$. En effet, un polynôme de degré n est déterminé par $n+1$ valeurs, que l'on peut calculer à partir de $P(0)$ et de $\Delta P(t)$.

Pour montrer l'égalité, nous montrerons alors l'égalité des deux membres en 0, ainsi que de leurs images par l'opérateur de différence pour des entiers positifs.

Nous noterons $(B(t))_T$ le coefficient de l'arbre T dans la série $B(t)$.

Posons $A(t) = t \times E_t \circ L$ et $B(t) = \sum_T \frac{(-1)^{\#T} Ehr_{K_T}(-t-1)}{\#Aut(T)} \times T$.

* Nous avons d'une part :

$$A(t) = t \times \sum_{n \geq 1} \frac{L(\curvearrowright L)^{n-1} t^{n-1}}{n!} = L \curvearrowright \sum_{n \geq 1} \frac{L^{n-1} t^n}{n!} = L \curvearrowright \left(\frac{\exp(tL) - 1}{L} \right)$$

$$\text{Alors } \Delta A(t) = A(t+1) - A(t) = L \curvearrowright \left(\frac{\exp((t+1)L) - \exp(tL)}{L} \right)$$

$$\Delta A(t) = L \curvearrowright \left(\frac{\exp(L) - 1}{L} \right) \exp(tL) = (\exp(L) - 1)A(t) + L \curvearrowright \left(\frac{\exp(L) - 1}{L} \right)$$

d'où $\Delta A(t) = (\exp(L) - 1)A(t) + \bullet$ et $A(0) = 0$.

* Le polytope K_T est inclus dans l'hypercube $[0, 1]^{\#T}$ donc il ne peut y avoir aucun point à coordonnées entières à l'intérieur de K_T .

Par conséquent, $Ehr_{K_T}(-1) = 0$ pour tout T donc $B(0) = 0$ et la limite en 0 de $\frac{(-1)^{\#T} Ehr_{K_T}(-t-1)}{t}$ est bien définie (ce qui donne l'expression des coefficients de L)

d'où $A(0) = B(0)$.

→ Si $\Delta B(t) = (\exp(L) - 1)B(t) + \bullet$, c'est-à-dire si $B(t+1) = \exp(L)B(t) + \bullet$, nous obtiendrons par récurrence l'égalité voulue.

Le lemme suivant, qui sera démontré dans la section 7.5, donne l'expression exacte de la formule qu'il faut montrer :

Lemme 3.6.

$$\exp(L)B(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} B(t) \curvearrowright \underbrace{\bullet \dots \bullet}_n = \sum_T \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{\#T}}{\#Aut(T)n!} Ehr_{K_T}(-t-1)(T_n(T))$$

où $T_n(T)$ est l'ensemble des arbres obtenus en rajoutant simultanément n sommets à T .

Nous devons donc montrer l'égalité suivante :

$$\sum_T \frac{(-1)^{\#T} Ehr_{K_T}(-t-2)}{\#Aut(T)} T = \sum_T \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{\#T}}{\#Aut(T)n!} Ehr_{K_T}(-t-1)(T_n(T)) + \bullet$$

* Pour l'arbre \bullet , $\frac{(-1)^{\#T} Ehr_{K_T}(-t-1)}{\#Aut(T)} = t$ et $\frac{(-1)^{\#T} Ehr_{K_T}(-t-2)}{\#Aut(T)} = t+1$ donc la formule est vérifiée.

Dorénavant, les arbres considérés seront différents de \bullet .

* Montrons la formule pour les chaînes S_n , $n \geq 2$:
 - $(B(t+1))_{S_n} = (-1)^n \binom{n-t-2}{n} = \binom{t+2-n+n-1}{n} = \binom{t+1}{n}$
 - $(\exp(L)B(t) + \bullet)_{S_n} = (B(t))_{S_n} + (B(t))_{S_{n-1}} = \binom{t}{n} + \binom{t}{n-1} = \binom{t+1}{n}$
 donc $(B(t+1))_{S_n} = (\exp(L)B(t) + \bullet)_{S_n}$ pour $n \geq 2$.

* Montrons la formule pour les corolles C_n , $n \geq 2$:

$$(B(t+1))_{C_n} = \frac{\#\{0 < x_1 < x_i < t+1, i \in [2, n]\}}{(n-1)!}$$

En comparant x_i avec t et ce pour tout i , on obtient :

$$(B(t+1))_{C_n} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\binom{n-1}{j} \#\{0 < x_1 < x_i < t, i \in [2, n-j]\}}{(n-1)!} + \frac{\#\{0 < x_1 < t\}}{(n-1)!}$$

En effet, quand exactement j feuilles sont égales à t , les $n-j$ autres sont strictement plus petites que t et il y a $\binom{n}{j}$ façons de choisir ces j feuilles.

$$(B(t+1))_{C_n} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(B(t))_{C_{n-j}}}{j!} + \frac{(B(t))_{\bullet}}{(n-1)!} = (\exp(L)B(t) + \bullet)_{C_n}$$

donc $(B(t+1))_{C_n} = (\exp(L)B(t) + \bullet)_{C_n}$ pour $n \geq 2$.

* Soit T un arbre, numérotons ses feuilles de 1 à n et posons T' l'arbre obtenu en enlevant toutes les feuilles de T . On note x_i la coordonnée de K_T associée à la feuille i .

$$- (B(t+1))_T = \frac{\#\{(t+1)K_T \cap \mathbb{Z}^{\#T}\}}{\#Aut(T)}$$

Comparons comme dans la démonstration pour les corolles les x_i et t : si j feuilles de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ des feuilles sont égales à t , on obtient, notant \tilde{T} l'arbre obtenu en supprimant ces j feuilles à T :

$$\#\{(t+1)K_T \cap \mathbb{Z}^{\#T}\} = (-1)^{\tilde{T}} Ehr_{\tilde{T}}(-t-1)$$

d'où l'égalité suivante :

$$(B(t+1))_T = \sum_{j=0}^n \sum_{\{a_1, \dots, a_j\} \subset \{1, \dots, n\}} \sum_{\tilde{T}=T' \cup \{a_1, \dots, a_j\}} \frac{(-1)^{\tilde{T}} Ehr_{\tilde{T}}(-t-1)}{\#Aut(T)}$$

$$(B(t+1))_T = \sum_{(\tilde{T}, j): T=\tilde{T}+j} \frac{(-1)^{\tilde{T}} Ehr_{\tilde{T}}(-t-1)}{\#Aut(T)} \times n_T^s(\tilde{T})$$

où $T = \tilde{T} + j$ signifie que T peut être obtenu en ajoutant j feuilles à \tilde{T} et $n_T^s(\tilde{T})$ est le nombre de façon d'obtenir \tilde{T} en supprimant des feuilles à T .

- Gardant la même notation $T = \tilde{T} + j$ si T peut être obtenu en ajoutant j feuilles à \tilde{T} , on obtient d'autre part :

$$(\exp(L)B(t) + \bullet)_T = \sum_{(\tilde{T}, j): T=\tilde{T}+j} \frac{(-1)^{\tilde{T}} Ehr_{\tilde{T}}(-t-1)}{\#Aut(\tilde{T}) \times n!} \times n_T^a(\tilde{T})$$

où $n_T^a(\tilde{T})$ est le nombre de façon d'obtenir T en ajoutant des feuilles à \tilde{T} .

- * Il reste donc à montrer l'égalité suivante :

$$n_T^s(\tilde{T}) \times \#Aut(\tilde{T}) \times n! = n_T^a(\tilde{T}) \times \#Aut(T)$$

Soient T et \tilde{T} des arbres. Indexons les sommets de T par des lettres $(a_1, \dots, a_{\#T})$, ceux de \tilde{T} par $(b_1, \dots, b_{\#\tilde{T}})$ et ceux de $\underbrace{\bullet \dots \bullet}_n$, la forêt constituée de n fois l'arbre

à un sommet \bullet , par $(c_1, \dots, c_{\#T-\#\tilde{T}})$.

On considère l'ensemble suivant, pour $n = \#T - \#\tilde{T}$:

$$\text{Bij}(T, \tilde{T}, n) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi : \{a_1, \dots, a_{\#T}\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_{\#\tilde{T}}\} \sqcup \{c_1, \dots, c_{\#T-\#\tilde{T}}\} \\ -\varphi \text{ soit une bijection,} \\ -\varphi^{-1}(c_i) \text{ soit une feuille pour tout } i, \\ -\alpha \text{ et } \beta \text{ soient les extrémités d'une arête de } T, \text{ d'image} \\ \text{dans } \{b_1, \dots, b_{\#\tilde{T}}\} \text{ si et seulement si } \varphi(\alpha) \text{ et } \varphi(\beta) \\ \text{sont les extrémités d'une arête de } \tilde{T}. \end{array} \right\}$$

- Faisons agir le groupe d'automorphismes de T sur $\text{Bij}(T, \tilde{T}, n)$ par composition à droite : cette action est libre.

En effet, s'il existe $\psi \in Aut(T)$ et $\varphi \in \text{Bij}(T, \tilde{T}, n)$ tels que $\varphi \circ \psi = \varphi$, alors si $\psi \neq 1_{Aut(T)}$, il existe $(a_i, a_j) \in T^2$, $a_i \neq a_j$ tels que $\psi(a_i) = a_j$ et $\varphi \circ \psi(a_i) = \varphi(a_i)$ donc $\varphi(a_j) = \varphi(a_i)$, ce qui contredit l'injectivité de φ .

- Comme cette action est libre, on a :

$$(3.1) \quad \#\text{Bij}(T, \tilde{T}, n) = \#Aut(T) \times \#\text{Bij}(T, \tilde{T}, n)/Aut(T)$$

Quotienter par $Aut(T)$ revient à supprimer l'étiquetage des sommets de T . Se donner $\varphi \in (\text{Bij}(T, \tilde{T}, n)/Aut(T))$ revient à étiqueter T avec $\{b_1, \dots, b_{\#\tilde{T}}\} \sqcup \{c_1, \dots, c_{\#T-\#\tilde{T}}\}$ en étiquetant $\varphi^{-1}(b_i)$ par b_i et $\varphi^{-1}(c_i)$ par c_i .

$\varphi^{-1}(\{b_1, \dots, b_{\#\tilde{T}}\})$ est alors isomorphe à \tilde{T} et étiqueter T revient à choisir comment ajouter n feuilles à \tilde{T} pour obtenir T ,

donc $\#\text{Bij}(T, \tilde{T}, n)/Aut(T) = n_T^a(\tilde{T})$,

d'où

$$(3.2) \quad \# \text{Bij}(T, \tilde{T}, n) = \# \text{Aut}(T) \times n_T^a(\tilde{T}).$$

– Faisons agir le groupe d'automorphismes de $\tilde{T} \sqcup \overbrace{\bullet \dots \bullet}^n$ sur $\text{Bij}(T, \tilde{T}, n)$ par composition à gauche : cette action est libre.

En effet, s'il existe $\psi \in \text{Aut}(\tilde{T}) \times \mathfrak{S}_n$ et $\varphi \in \text{Bij}(T, \tilde{T}, n)$ tels que $\psi \circ \varphi = \varphi$, alors si $\psi \neq 1_{\text{Aut}(\tilde{T}) \times \mathfrak{S}_n}$, il existe $((b_i, c_l), (b_j, c_m)) \in (\tilde{T} \times \mathfrak{S}_n)^2$, $(b_i, c_l) \neq (b_j, c_m)$ tels que $\psi(b_i, c_l) = (b_j, c_m)$. Posant alors $b'_i = \varphi^{-1}(b_i)$ et $c'_l = \varphi^{-1}(c_l)$, nous obtenons alors : $\psi(\varphi(b'_i), \varphi(c'_l)) = (\varphi(b'_i), \varphi(c'_l))$ donc $\psi(b_i, c_l) = (b_i, c_l)$ et $\psi(b_i, c_l) = (b_j, c_m)$, ce qui est absurde.

– Comme cette action est libre, on a :

$$(3.3) \quad \# \text{Bij}(T, \tilde{T}, n) = \# \text{Aut}(\tilde{T}) \times n! \times \#(\text{Bij}(T, \tilde{T}, n) / \text{Aut}(\tilde{T}) \times \mathfrak{S}_n)$$

Quotienter par $\text{Aut}(\tilde{T}) \times \mathfrak{S}_n$ revient à supprimer l'étiquetage des sommets

de \tilde{T} et de ceux de la forêt $\overbrace{\bullet \dots \bullet}^n$. Se donner $\varphi \in \text{Bij}(T, \tilde{T}, n) / \text{Aut}(\tilde{T}) \times \mathfrak{S}_n$ revient à étiqueter \tilde{T} et $\overbrace{\bullet \dots \bullet}^n$ avec $\{a_1, \dots, a_{\#T}\}$ en étiquetant $\varphi(a_i)$ par

a_i .

Choisir quels $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_n}\}$ vont étiqueter $\overbrace{\bullet \dots \bullet}^n$ revient à choisir quelles

feuilles supprimer à T pour obtenir \tilde{T}

donc $\# \text{Bij}(T, \tilde{T}, n) / \text{Aut}(\tilde{T}) \times \mathfrak{S}_n = n_T^s(\tilde{T})$

d'où

$$(3.4) \quad \# \text{Bij}(T, \tilde{T}, n) = \# \text{Aut}(\tilde{T}) \times n! \times n_T^s(\tilde{T}).$$

On obtient alors

$$n_T^s(\tilde{T}) \times \# \text{Aut}(\tilde{T}) \times n! = n_T^a(\tilde{T}) \times \# \text{Aut}(T),$$

ce qui montre l'égalité voulue.

3.5. Spécialisation du théorème pour certaines valeurs de t .

Etudions, pour différentes valeurs de t , la formule

$$E_t \circ L = \sum_T \frac{(-1)^{\#T} \text{Ehr}_T(-t-1)}{\# \text{Aut}(T) \times t} T.$$

Comme S_t est un morphisme de groupes, l'inverse de $E_t \circ L$ est $E \circ L_t$.

– Pour $t = 0$, $E_0 \circ L = L = \sum_T \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-1)^{\#T} \text{Ehr}_T(-t-1)}{\# \text{Aut}(T) \times t} T$ et $E \circ L_0 = E$. Ceci donne une expression de L et remontre que l'inverse de L est E .

– Pour $t = -1$, $E_{-1} \circ L = \sum_T \frac{(-1)^{\#T-1}}{\# \text{Aut}(T)} T$ car pour tout arbre T , $\text{Ehr}_T(0) = 1$ par définition du polynôme d'Ehrhart.

De plus, $E \circ L_{-1} = \sum_T \frac{T}{\# \text{Aut}(T)}$. On a donc la relation suivante :

$$\left(\sum_T \frac{T}{\# \text{Aut}(T)} \right)^{-1} = \sum_T \frac{(-1)^{\#T-1}}{\# \text{Aut}(T)} T.$$

– Pour $t = 1$, $\text{Ehr}_T(-2)$ n'est non nul que si T n'a qu'un seul sommet. On obtient : $E_1 \circ L = E \circ L = \bullet$ et $(E \circ L)^{-1} = E \circ L_1 = E \circ L = \bullet$, d'où

$$(\bullet)^{-1} = \bullet.$$

- Pour $t \rightarrow +\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} E \circ L_{\frac{1}{t}} = \sum_T \frac{Vol(K_T)}{\#Aut(T)} T$ or $\lim_{t \rightarrow +\infty} E \circ L_{\frac{1}{t}} = E$ donc $E = \sum_T \frac{Vol(K_T)}{\#Aut(T)} T$. Rappelant que $E = \sum_T \frac{CM(T)}{n!} T$, on obtient la formule suivante, démontrée au 2.16, corollaire du 2.15 :

$$(3.5) \quad CM_T = \frac{n!}{\#Aut(T)} \times Vol(K_T).$$

4. ANNULATION DU COEFFICIENT DE CERTAINS ARBRES DANS L

Le théorème 3.5 démontré au point 3.1 montre que le coefficient d'un arbre T dans L est nul si et seulement si t^2 divise $Ehr_{K_T}(-t-1)$.

Le théorème suivant est une des deux implications d'une conjecture de F. Chapoton, l'autre implication se révélant être plus délicate à démontrer :

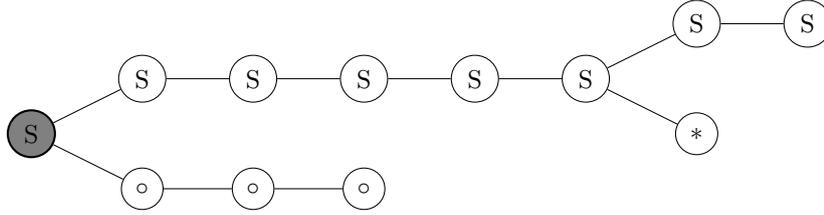
Théorème 4.1. *Pour tout nombre $n \geq 2$ non premier, il existe un arbre à n sommets dont le coefficient dans L est nul.*

Démonstration. Si n n'est pas premier et est différent de 1, il existe $k \geq 1$ et $l \geq 2$ tels que $n = (k+1)l$.

Nous exhibons alors un exemple d'arbre, noté $T_{k,l}$, à $(k+1)l$ sommets dont le polynôme d'Ehrhart est divisible par t^2 :

Il s'agit de l'arbre formé à partir d'une chaîne S de kl sommets sur laquelle nous greffons, au niveau de la racine, une chaîne de $l-1$ sommets \odot et un autre sommet \otimes sur le $k(l-1)$ ème sommet de S en partant de sa racine.

□



Ci-dessus, $T_{k=2, l=4}$.

Calculons de différentes manières le polynôme d'Ehrhart de cet arbre donné dans le théorème suivant :

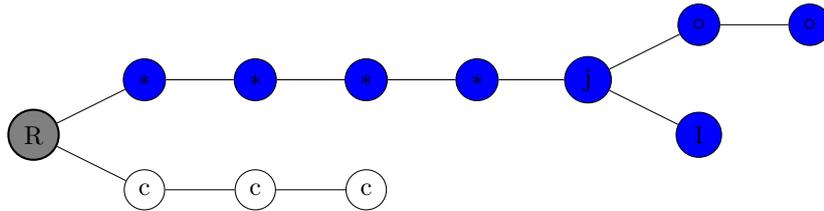
Théorème 4.2. *Le polynôme d'Ehrhart $P(t)$ de l'arbre $T_{k,l}$ donné en exemple est :*

$$\binom{t+kl}{t} \binom{t+l}{t}.$$

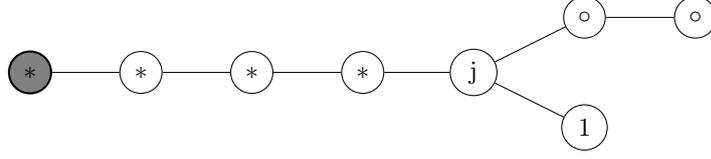
4.1. Calcul du polynôme d'Ehrhart de l'arbre $T_{k,l}$ à l'aide de Maple.

Il est à noter que le calcul utilisant les séries hypergéométriques ne s'est révélé efficace que dans des cas restreints.

Nous effectuons dans un premier temps les calculs grâce au logiciel de calcul formel Maple. Nous calculons d'abord le polynôme d'Ehrhart d'un sous-arbre de $T_{k,l}$, représenté en bleu sur la figure ci-dessous, puis celui de $T_{k,l}$.



1ère étape : Calculons le polynôme d'Ehrhart de l'arbre suivant, noté $Y_{k,l}$ ayant k sommets \odot et $k(l-1)-2$ sommets \otimes :



Nous faisons varier les valeurs de coordonnée possible pour le sommet j dans le polytope associé grossi t fois, et la noterons j . Les sommets \otimes forment une chaîne de longueur $k(l-1)-2$ donc leur contribution au polynôme d'Ehrhart de l'arbre $Y_{k,l}$ est $\binom{j+k(l-1)-2}{j}$. Les sommets \odot forment une chaîne de longueur k donc leur contribution est $\binom{t-j+k}{k}$. Enfin, la contribution du dernier sommet est $t-j+1$.

```
> si := sum(binomial(t-j+k,k)*(t-j+1)*binomial(j+k*(l-1)-2,k*(l-1)-2),
j=0..t);
```

$$\frac{(t+kl-1)!(kt+kl+t)}{(kl)! \times kl \times t!}$$

```
> convert(si,binomial);
```

$$\frac{(kt+kl+t) \text{binomial}(t-1+kl,t)}{kl}$$

2ème étape : Calculons le polynôme d'Ehrhart de l'arbre $T_{k,l}$ donné en exemple dans la preuve.

Pour cela, nous sommes sur toutes les valeurs possibles j que prend la coordonnée de la racine. Nous reconnaissons alors d'une part l'arbre $Y_{k,l}$ étudié précédemment, dont la contribution est $\frac{(k(t-j+l)+t-j)\binom{t-j-1+kl}{t-j}}{kl}$ et d'autre part une chaîne à $l-1$ sommets, de contribution $\binom{t-j+l-1}{l-1}$.

```
> sf := sum((k*(t-j+1)+t-j)*binomial(t-1-j+k*l,k*l-1)*
binomial(t-j+1-1,l-1)/(k*l), j=0..t);
```

$$\frac{(-t-kl)(-t-l)((l+t)k+t) \text{binomial}(t-1+kl,kl-1) \text{binomial}(t+l-1,l-1)}{(-kt-kl-t)l^2k}$$

```
> simplify(sf);
```

$$\frac{(t+kl)(l+t) \text{binomial}(t-1+kl,kl-1) \text{binomial}(t+l-1,l-1)}{kl^2}$$

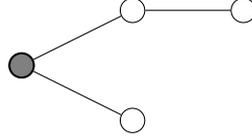
En transformant un peu, nous obtenons :

$$sf = \binom{t+kl}{t} \binom{t+l}{t}.$$

4.2. Calcul du polynôme d'Ehrhart de l'arbre $T_{k,l}$ avec une méthode combinatoire.

Soit $V_{k,l}$ l'arbre formé d'une chaîne à k sommets auquel on rajoute une chaîne à l sommets à la racine.

Nous avons alors $V_{k,l} = V_{l+1,k-1}$, $V_{1,l}$ est la chaîne S_{l+1} , $V_{2,1}$ est la corolle C_3 et $V_{3,1}$ est représenté ci-dessous :



Notons que le polynôme d'Ehrhart d'un arbre peut s'étendre par linéarité pour définir le polynôme d'Ehrhart d'une somme :

Pour tous arbres T et T' , $Ehr(\emptyset) = 0$, $Ehr(T + T') = Ehr(T) + Ehr(T')$ et $Ehr(T, \mathcal{F}) = Ehr(T)Ehr(\mathcal{F})$.

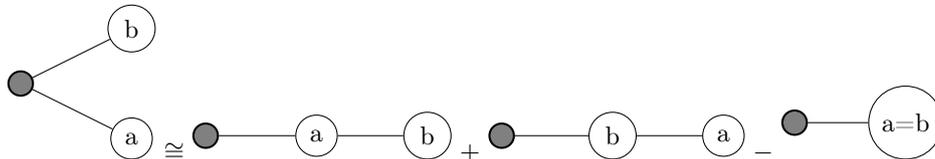
Dans ce qui suit, nous écrivons comme des égalités entre sommes d'arbres, notées \cong , les égalités entre polynômes d'Ehrhart.

Le lemme suivant permet de transformer l'arbre $T_{k,l}$ en une somme d'arbres dont le polynôme d'Ehrhart est le même :

Lemme 4.3. Il y a égalité des polynômes d'Ehrhart de chacun des membres de l'égalité suivante : $V_{k+1,1} \cong -kS_{k+1} + (k+1)S_{k+2}$.

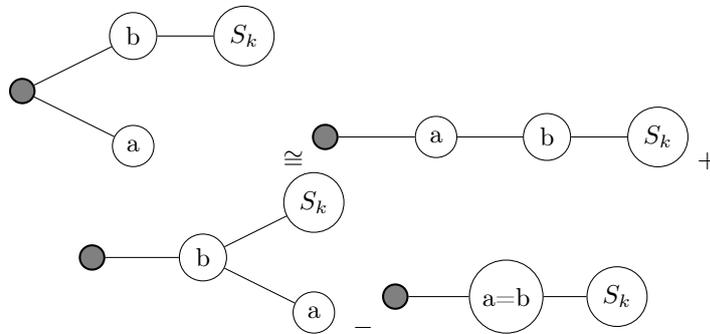
Démonstration. Il y a deux preuves possibles : par récurrence en comparant les valeurs des sommets à l'extrémité des deux chaînes ou en calculant directement les polynômes d'Ehrhart. Nous n'exposerons ici que la première preuve plus originale :

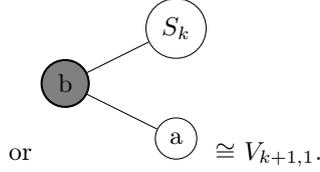
Pour $k = 1$, $V_{2,1} = C_3$



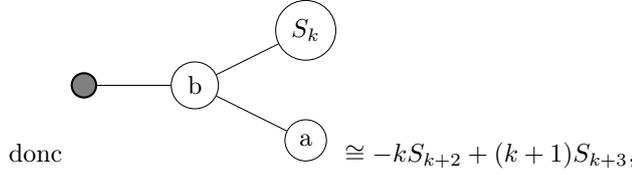
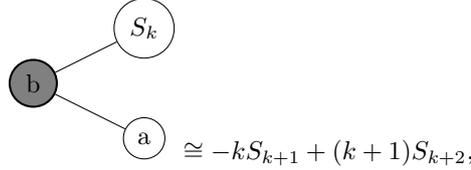
Pour vérifier l'hérédité, nous noterons S_k la chaîne S_k .

Supposons la propriété vraie au rang k . On obtient alors la série d'égalités suivante :





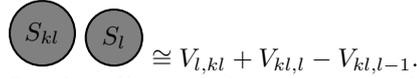
Appliquant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons :



puisque le calcul des polynômes d'Ehrhart des arbres de part et d'autre de la congruence s'effectue en sommant les mêmes polynômes,
 d'où $V_{k+2,1} = S_{k+3} - S_{k+2} + (k+1)S_{k+3} - kS_{k+2} = (k+2)S_{k+3} - (k+1)S_{k+2}$
 d'où le lemme. \square

Nous pouvons maintenant donner une deuxième démonstration du théorème 4.2.

Démonstration. Remarquons d'abord que $\binom{t+kl}{t} \binom{t+l}{t}$ est le polynôme d'Ehrhart de la forêt constituée de S_{kl} et S_l . En comparant les deux racines de ces arbres, nous obtenons :



De plus, d'après le lemme, en remplaçant l'expression de $V_{k,1}$, on obtient :

$$P(t) = Ehr((k+1)V_{l,kl} - kV_{l,kl-1})(t).$$

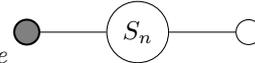
Comparant les deux expressions obtenues ci-dessus, nous observons que le théorème découle de l'égalité suivante : $kV_{l,kl} - (k-1)V_{l,kl-1} = V_{kl,l}$.

Montrons cette égalité :

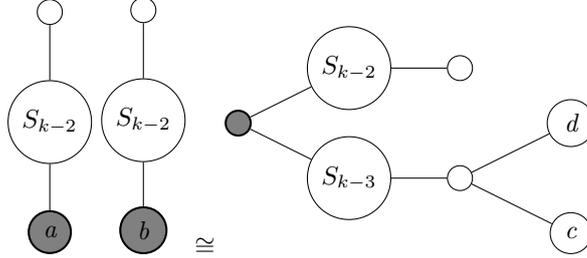
$$\begin{aligned} Ehr(kV_{l,kl} - (k-1)V_{l,kl-1})(t) &= \sum_{j=0}^t k \binom{j+l-1}{j} \binom{j+kl}{j} - (k-1) \binom{j+kl-1}{j} \binom{j+l-1}{j} \\ &= \sum_{j=0}^t \binom{j+l}{j} \left[\frac{lk}{j+l} \binom{j+kl}{j} - \frac{l(k-1)}{j+l} \binom{j+kl-1}{j} \right] \\ &= \sum_{j=0}^t \binom{j+l}{j} \binom{j+kl-1}{j} \left[\frac{j+kl-kl+l}{j+l} \right] \\ &= \sum_{j=0}^t \binom{j+l}{j} \binom{j+kl-1}{j} = Ehr(V_{kl,l})(t) \end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue. \square

4.2.1. *Autres exemples.* Le théorème suivant, généralisation d'un théorème de D. Thurston, décrit une autre famille d'arbres dont le coefficient dans le logarithme s'annule :



Théorème 4.4. Rappelant que la chaîne à $n+2$ sommets est notée S_n et que la relation \cong équivaut à l'égalité des polynômes d'Ehrhart, nous avons la relation suivante, pour $k \geq 2$:



Démonstration. La preuve consiste à comparer les sommets a et b d'une part et les sommets c et d d'autre part. \square

5. DE L'OPÉRADE PRÉ-LIE AU GROUPE DES SÉRIES EN ARBRES ET À L'ALGÈBRE PRÉ-LIE ASSOCIÉE

Dans cette section et les suivantes, k représente le corps de référence, de caractéristique 0 sur lequel nous construirons les objets algébriques, sauf mention contraire. Si G est un groupe, $G_{\mathfrak{S}_n}$ désignera le quotient de G sous l'action de \mathfrak{S}_n .

5.1. L'opérateur pré-Lie.

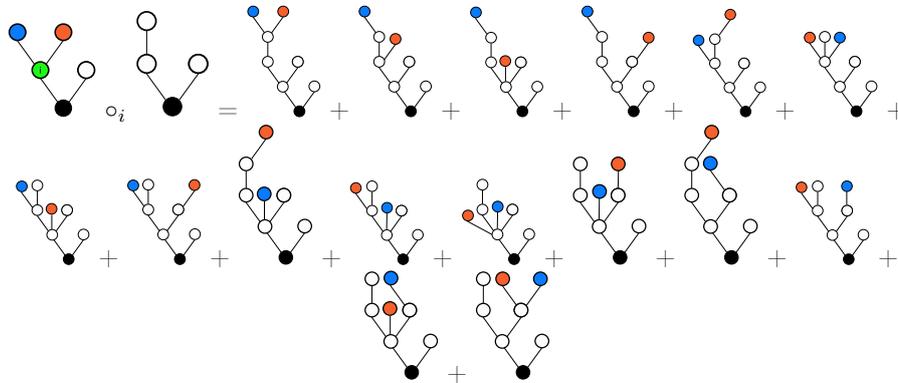
Définition 5.1. On appelle *arbre enraciné sur un ensemble I* , la donnée d'un arbre T à $\#I$ sommets et d'une application injective de I dans $V(T)$.

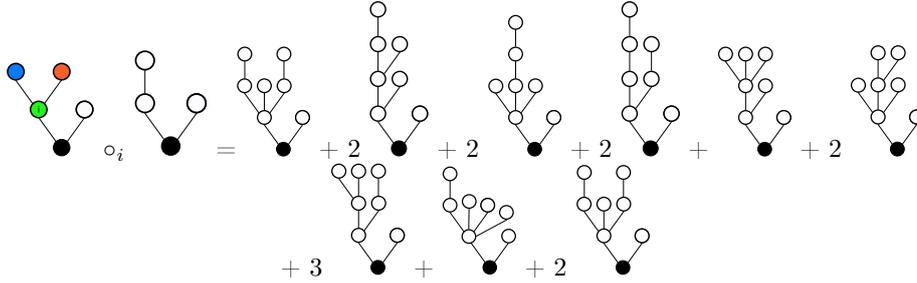
L'opérateur pré-Lie a été introduite par F. Chapoton et M. Livernet. Elle est définie ci-dessous.

Définition 5.2. L'opérateur pré-Lie est la donnée :

- pour tout ensemble I , de l'ensemble $PreLie(I)$ des arbres enracinés sur I ,
- des lois de composition linéaire \circ_i de $Vect(PreLie(I)) \times Vect(PreLie(J))$ dans $Vect(PreLie(I - \{i\} \cup J))$ définies pour tous ensembles I et J : pour $x \in PreLie(I)$ et $y \in PreLie(J)$ l'opération $x \circ_i y$ revient à supprimer le sommet image de i , à relier son père p à la racine de y qui devient fils de p et à sommer sur toutes les possibilités qu'il y a de relier un fils de i à un sommet de y .
- d'une unité pour la loi \circ_i , l'unique arbre sur $\{i\}$ pour tout singleton $\{i\}$.

Voici un exemple de composition sur le ième sommet d'un arbre (en vert sur le premier schéma) :





Nous renvoyons à l'article [Cha08a] pour plus de détails sur les opérades.

5.2. Lien avec le groupe des séries en arbre.

A partir de l'opérade pré-Lie, nous pouvons construire le groupe des séries en arbres.

En effet, l'ensemble suivant $\hat{\mathcal{P}} = \prod_{n \geq 0} PreLie(\{1, \dots, n\})_{\mathfrak{S}_n}$ n'est autre que l'ensemble des séries indexées par des arbres, et la loi \circ est donnée par la relation suivante à partir des lois de compositions \circ_i : pour tous x et y dans $\hat{\mathcal{P}}$, $y = \sum_{k \geq 1} y_k$,

$$x \circ y = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}^n} (\dots((x \circ_{k_1} y_{k_1}) \circ_{k_2} y_{k_2}) \dots \circ_n y_{k_n}).$$

5.3. Algèbre pré-Lie.

Comme précédemment, nous introduirons le concept d'algèbre pré-Lie, puis nous exhiberons une construction d'une algèbre pré-Lie à partir de l'opérade pré-Lie.

Définition 5.3. Une algèbre pré-Lie sur un corps k est un k -espace vectoriel \mathcal{V} muni d'une loi de composition binaire \frown satisfaisant :

$$(a \frown b) \frown c - a \frown (b \frown c) = (b \frown a) \frown c - b \frown (a \frown c).$$

L'opération binaire définie comme suit est un crochet de Lie qui fait de \mathcal{V} une algèbre de Lie :

$$(5.1) \quad [x, y] = x \frown y - y \frown x,$$

pour tout x et y de \mathcal{V} .

A partir de l'opérade pré-Lie, nous pouvons construire une algèbre pré-Lie. En effet, l'ensemble $\bigoplus_{n \geq 0} PreLie(\{1, \dots, n\})_{\mathfrak{S}_n}$, muni de l'opération suivante :

$$x \frown y = \sum_{i=1}^n x \circ_i y,$$

pour x dans $PreLie(n)$ et y dans $PreLie(m)$, pour tous entiers n et m , a une structure d'algèbre pré-Lie héritée de la structure d'opérade de l'opérade pré-Lie.

Nous renvoyons à [Man] pour plus de détails sur les algèbres pré-Lie.

De cette algèbre pré-Lie, nous construisons une algèbre de Lie \mathcal{L}_{OPL} dont le crochet est donné par la formule (5.1).

6. DES ALGÈBRES DE LIE AUX ALGÈBRES DE HOPF

Dans cette section, nous établissons le lien entre algèbre de Lie et algèbre de Hopf.

6.1. Algèbres de Lie.

Définition 6.1. Une *algèbre de Lie* est un k -espace vectoriel \mathcal{E} , muni d'une opération binaire bilinéaire, appelée *crochet de Lie*, qui vérifie, pour tous $a, b, c \in \mathcal{E}$:

- (1) $[a, a] = 0$ (anticommutativité),
- (2) $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$ (identité de Jacobi).

Exemple : $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Q})$, l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{Q} , forme une algèbre de Lie munie du crochet de Lie :

$$[M, N] = MN - NM.$$

6.2. Algèbres de Hopf.

La plupart des définitions de cette section sont adaptées de l'article [Car06], auquel nous renvoyons pour plus d'informations sur les algèbres de Hopf.

Définition 6.2. Une *algèbre* est un triplet $(\mathcal{A}, m_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}})$ où \mathcal{A} est un k -espace vectoriel muni d'un produit $m_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ et d'une unité $\eta_{\mathcal{A}} : k \rightarrow \mathcal{A}$ telle que $m_{\mathcal{A}} \circ (\eta_{\mathcal{A}}, id_{\mathcal{A}})$ soit la projection sur le second facteur et $m_{\mathcal{A}} \circ (id_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}})$ soit la projection sur le premier facteur.

Définition 6.3. Une *cogèbre* est un triplet $(\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \varepsilon_{\mathcal{C}})$ où \mathcal{C} est un k -espace vectoriel, le coproduit $\Delta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est coassociatif, c'est-à-dire

$$(\Delta_{\mathcal{C}} \otimes id_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}} = (id_{\mathcal{C}} \otimes \Delta_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}},$$

et $\varepsilon_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow k$ est la counité telle que $(\varepsilon_{\mathcal{C}} \otimes id_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}}$ soit l'injection de \mathcal{C} dans $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ et $(id_{\mathcal{C}} \otimes \varepsilon_{\mathcal{C}}) \circ \Delta_{\mathcal{C}}$ soit l'injection de \mathcal{C} dans $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$.

Définition 6.4. Une *bigèbre* est un k -espace vectoriel \mathcal{B} muni d'une structure d'algèbre et d'une structure de cogèbre compatibles, c'est-à-dire que le produit m et le coproduit Δ satisfont la relation $\Delta \circ m = (m \otimes m) \circ \sigma_{23} \circ (\Delta \otimes \Delta)$ où $\sigma_{23}(a, b, c, d) = (a, c, b, d)$ pour tous a, b, c, d de \mathcal{B} .

Définition 6.5. Une *algèbre de Hopf* est un uplet $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ tel que

- $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ soit une bigèbre, c'est-à-dire tel que (\mathcal{H}, m, η) soit une algèbre, $(\mathcal{H}, \Delta, \varepsilon)$ soit une cogèbre,
- m et Δ soient compatibles.

Il faut de plus que l'antipode $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ satisfasse les relations suivantes, pour g dans \mathcal{H} :

$$(6.1) \quad S(g) = g^{-1},$$

$$(6.2) \quad m \circ (S \otimes id_{\mathcal{H}}) \circ \Delta = m \circ (id_{\mathcal{H}} \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon.$$

Il est à noter que toute bigèbre graduée, c'est-à-dire dont l'espace vectoriel sous-jacent est gradué, de la forme $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}^n$, avec un produit et un coproduit compatibles avec la graduation, possède naturellement une structure d'algèbre de Hopf.

Le lien que nous donnerons entre les algèbres de Lie et les algèbres de Hopf se fait dans le cas particulier d'une *algèbre de Hopf cocommutative* :

Définition 6.6. Une algèbre de Hopf \mathcal{H} est *cocommutative* si le coproduit Δ vérifie : $\sigma \circ \Delta = \Delta$ où σ est l'application linéaire $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ telle que $\sigma(c \otimes d) = d \otimes c$ pour tous c et d de \mathcal{H} .

6.3. Théorèmes de Poincaré-Birkhoff-Witt et Milnor-Moore.

Nous pouvons établir un lien entre les deux objets algébriques définis précédemment via deux théorèmes : le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt et le théorème de Milnor-Moore. Nous considérerons dans cette section un espace vectoriel \mathfrak{g} sur un corps k de caractéristique nulle.

Avant d'énoncer ces théorèmes, nous devons introduire les notions suivantes :

Définition 6.7. L'algèbre tensorielle T de l'espace vectoriel \mathfrak{g} est définie comme :

$$T = T^0 \oplus T^1 \oplus \dots \oplus T^n \oplus \dots$$

où $T^n = \underbrace{\mathfrak{g} \otimes \dots \otimes \mathfrak{g}}_n$, $T^0 = k.1$ et $T^1 = \mathfrak{g}$.

Le produit est alors défini comme la multiplication des tenseurs :

si $v = v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in T^n$ et $w = w_1 \otimes \dots \otimes w_m \in T^m$, leur produit est l'élément $v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_m$ de T^{n+m} .

A partir de l'algèbre tensorielle, nous construisons une autre algèbre : l'algèbre enveloppante.

Définition 6.8. L'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} , notée $U(\mathfrak{g})$ est l'algèbre associative T/J , quotient de l'algèbre tensorielle T par l'idéal bilatère J de T engendré par les tenseurs :

$$x \otimes y - y \otimes x - x \times y + y \times x$$

où x et y sont des éléments de \mathfrak{g} .

L'application composée σ des applications canoniques $\mathfrak{g} \rightarrow T \rightarrow U(\mathfrak{g})$ s'appelle application canonique de \mathfrak{g} dans $U(\mathfrak{g})$ et vérifie pour tous x et y dans \mathfrak{g} :

$$\sigma(x)\sigma(y) - \sigma(y)\sigma(x) = \sigma(x \times y - y \times x).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, que nous admettrons :

Théorème 6.9 (Poincaré-Birkhoff-Witt). *L'application canonique σ de \mathfrak{g} dans $U(\mathfrak{g})$ est injective.*

De plus, si (x_1, \dots, x_n) est une base de l'espace vectoriel \mathfrak{g} , alors les $x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_n^{\nu_n}$, où $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{N}$, forment une base de $U(\mathfrak{g})$.

Enfin, le théorème de Milnor-Moore énonce un résultat un peu plus fort que le théorème 6.9, liant les algèbres de Lie aux algèbres de Hopf cocommutatives :

Théorème 6.10 (Milnor-Moore). *Le foncteur $L \mapsto U(L)$ est une équivalence entre la catégorie des algèbres de Lie et celle des algèbres de Hopf cocommutatives. Ce qui veut dire que tout algèbre de Hopf cocommutative est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie ; plus précisément, tout algèbre de Hopf cocommutative est l'algèbre enveloppante de ses primitifs, définis comme l'ensemble des éléments a tels que $\Delta(a) = 1 \otimes a + a \otimes 1$ pour Δ le coproduit de l'algèbre de Hopf et 1, l'élément neutre de la multiplication.*

Nous renvoyons aux livres [Dix74], [Hum72] et [D.Q] pour plus d'informations sur les algèbres enveloppantes et les théorèmes de Poincaré-Birkhoff-Witt et Milnor-Moore et à [OG05] et [LR09] pour le lien entre une algèbre pré-Lie et une algèbre de Hopf.

7. LIEN AVEC LES ALGÈBRES DE HOPF DE CONNES-KREIMER ET GROSSMAN-LARSON

Les descriptions des algèbres de Hopf de Connes-Kreimer et Grossman-Larson ont été adaptées des articles [Pan] et [GL89].

7.1. Algèbre de Hopf de Connes-Kreimer.

L'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer, notée \mathcal{H}_{CK} a été introduite à la fin des années 1990 par Connes et Kreimer dans la continuité des travaux de Kreimer sur la renormalisation en théorie quantique des champs. Pour en donner une description, nous devons d'abord définir les notions suivantes.

Définition 7.1. Une *coupe élémentaire* d'un arbre T est la suppression d'une et une seule arête de T . Une *coupe admissible* c est un ensemble de coupes élémentaires tel que tout chemin d'un sommet de T à la racine contienne au plus une coupe élémentaire. Nous obtenons alors une forêt d'arbres. Nous noterons alors $R^c(T)$ l'arbre de la forêt contenant la racine et $P^c(T)$ la forêt constituée des arbres restants.

Nous noterons $\#c$, le nombre de coupes élémentaires constituant une coupe admissible c .

L'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer sur k est alors l'algèbre des séries indexées par des arbres enracinés, finis, non vides, à coefficients dans k , ou plus formellement, l'algèbre des polynômes sur k en une infinité d'indéterminées, où à chaque indéterminée correspond un arbre enraciné non vide, et un seul. Nous noterons alors T l'indéterminée associée à l'arbre T , et de manière générale \mathcal{F} le monôme associé à la forêt \mathcal{F} .

L'unité de cette algèbre sera notée 1. Elle correspond à l'arbre vide.

Le coproduit Δ est donné par :

$$\begin{aligned}\Delta(1) &= 1 \otimes 1, \\ \Delta(T) &= 1 \otimes T + T \otimes 1 + \sum_{c|\#c \geq 1} P^c(T) \otimes R^c(T),\end{aligned}$$

pour tout arbre $T \neq e$.

La counité est donnée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon(1) &= 1, \\ \varepsilon(T) &= 0,\end{aligned}$$

pour tout arbre enraciné $T \neq e$.

L'antipode est donné par la formule de récurrence :

$$\begin{aligned}S(1) &= 1, \\ S(T) &= -T - \sum_{c|\#c \geq 1} S(P^c(T))R^c(T).\end{aligned}$$

7.2. Algèbre de Hopf de Grossman-Larson.

Nous introduisons de même le dual de l'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer : l'algèbre de Hopf de Grossman-Larson, introduite par Grossman et Larson à la fin des années 1980.

Une base de cette algèbre est l'ensemble des forêts d'arbres enracinés.

L'unité est 1, la forêt vide.

La multiplication est définie sur les éléments de la base comme suit :

si $\mathcal{F}_1 = (s_1, \dots, s_r)$ et \mathcal{F}_2 sont des forêts d'arbres enracinés, $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2$ est la somme de toutes les manières possibles de relier chacune des racines des arbres s_1, \dots, s_r à un sommet d'un arbre de \mathcal{F}_2 , ou bien de ne pas la relier, deux racines pouvant être attachées éventuellement au même sommet. Notons que ce produit n'est pas commutatif.

Le coproduit Δ est donné par :

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1,$$

$$\Delta(T) = \sum_{p=0}^n \sum_{\{i_1, \dots, i_p\} \sqcup \{j_1, \dots, j_{n-p}\} = \{1, \dots, n\}} (s_{i_1}, \dots, s_{i_p}) \otimes (s_{j_1}, \dots, s_{j_{n-p}}),$$

pour toute forêt non vide $\mathcal{F} = (s_1, \dots, s_r)$, en posant $(s_{i_1}, s_{i_0}) = (s_{j_1}, s_{j_0}) = 1$.

Le coproduit Δ est cocommutatif.

La counité est donnée par les formules suivantes :

$$\varepsilon(1) = 1,$$

$$\varepsilon(\mathcal{F}) = 0,$$

pour toute forêt d'arbres enracinés $\mathcal{F} \neq 1$.

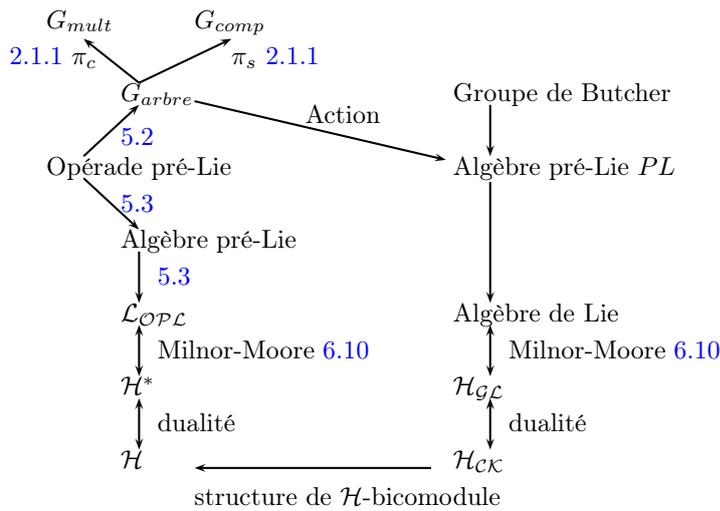
De plus, $\mathcal{H}_{\mathcal{GL}}$ est une bigèbre graduée, dont la composante $\mathcal{H}_{\mathcal{GL}_n}$ de degré n a pour base les forêts à n sommets. En tant que bigèbre graduée cocommutative, $\mathcal{H}_{\mathcal{GL}}$ est naturellement munie d'une structure d'algèbre de Hopf dont nous n'explicitons pas l'antipode.

D'après le théorème de Milnor-Moore 6.10, $\mathcal{H}_{\mathcal{GL}}$ est alors l'algèbre enveloppante de ses éléments primitifs, $\mathcal{H}_{\mathcal{GL}} \cong U(P(\mathcal{H}_{\mathcal{GL}}))$, où l'ensemble des éléments primitifs $P(\mathcal{H}_{\mathcal{GL}})$ est défini comme l'ensemble suivant $P(\mathcal{H}_{\mathcal{GL}}) = \{a \in \mathcal{H}_{\mathcal{GL}} \mid \Delta(a) = 1 \otimes a + a \otimes 1\}$, qui peut être vu comme l'algèbre de Lie engendrée par les arbres enracinés ayant au moins un sommet, nous noterons PL , l'algèbre pré-Lie associée.

L'algèbre de Hopf de Grossman-Larson peut être identifiée avec l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie du groupe de Butcher, étudié en analyse numérique pour l'étude d'équations différentielles ordinaires non linéaires en utilisant la méthode de Runge-Kutta.

7.3. Lien avec le groupe des séries en arbre.

Le schéma suivant récapitule les interactions existantes entre les différents objets définis précédemment, les numéros à côté des flèches indiquent les paragraphes où sont décrits ces interactions :

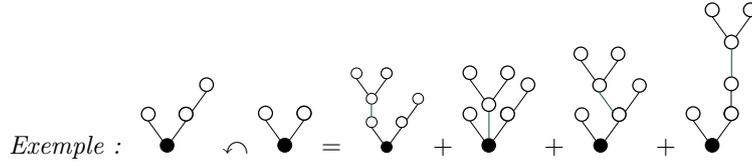


Il est montré dans l'article [CEFM09] que l'algèbre \mathcal{H}_{CK} possède une structure de \mathcal{H} bicomodule. Nous renvoyons à cet article pour plus d'informations sur cette structure.

Par le théorème de Milnor-Moore, nous pouvons associer une algèbre de Lie à l'algèbre de Hopf de Grossman-Larson \mathcal{H}_{GL} .

A cette algèbre de Lie est associée l'algèbre pré-Lie libre à un générateur, notée PL , qui a pour espace sous-jacent l'espace vectoriel gradué $PL = \bigoplus_{n \geq 1} PL_n$ où PL_n est l'espace engendré par les arbres non étiquetés, non plans, enracinés de degré n où le degré d'un arbre est le nombre de ses sommets.

Le produit pré-Lie $T \frown T'$ d'un arbre T avec un arbre T' est la somme de tous les arbres obtenus en ajoutant une arête entre la racine de T' et un des sommets de T . La racine de l'arbre obtenu est alors la racine de T .



Le groupe G_{arbre} agit sur l'algèbre pré-Lie PL , ou plus précisément, sur l'espace vectoriel complété $\hat{PL} = \prod_{n \geq 1} PL_n$, muni de la loi \frown de PL . Pour décrire cette action, nous admettons que tout arbre enraciné de degré au moins un admet une écriture n'utilisant que \bullet , \frown , $+$ et $-$.

Par exemple, $\overset{\circ}{\bullet} = \bullet \frown \bullet$, $\overset{\circ}{\bullet} = (\bullet \frown \bullet) \frown \bullet - \bullet \frown (\bullet \frown \bullet)$.

Soit g un élément de G_{arbre} , l'action de g sur \hat{PL} est alors définie récursivement comme suit, pour tous x et y de PL :

$$g \bullet = g$$

$$g.(x \frown y) = g.x \frown g.y.$$

C'est ainsi que nous pouvons relier le groupe G_{arbre} et les algèbres de Hopf \mathcal{H}_{CK} et \mathcal{H}_{GL} : G_{arbre} agit sur l'algèbre pré-Lie dont l'algèbre de Lie associée est l'algèbre de Lie des primitifs de l'algèbre de Hopf de Grossman-Larson \mathcal{H}_{GL} .

7.4. Calcul direct des coefficients de L .

Les algèbres de Hopf introduites précédemment permettent un calcul direct, quoique laborieux, des coefficients de L .

Considérons l'algèbre de Hopf \mathcal{H} , définie dans [CEFM09], dual de l'algèbre de Hopf enveloppante de l'algèbre de Lie \mathcal{L}_{OPL} issue de l'opérateur pré-Lie.

\mathcal{H} est le k -espace vectoriel généré par les forêts d'arbres enracinés contenant au moins une arête, et par l'arbre \bullet , l'unité.

Pour définir le coproduit, nous devons introduire la notion de sous-arbre et de sous-forêt :

Définition 7.2. Un *sous-arbre* d'un arbre T est un arbre dont tous les sommets et toutes les arêtes sont des sommets et des arêtes de T .

Une *sous-forêt* d'un arbre T est la forêt triviale \bullet ou un ensemble (T_1, \dots, T_n) de sous-arbres de T deux à deux disjoints, chacun contenant au moins une arête. Plus précisément, deux sous-arbres d'une sous-forêt ne peuvent pas avoir de sommets communs.

Nous noterons $SF(T)$ l'ensemble des sous-forêts de T , y compris les sous-forêts T et \bullet .

Nous rappelons que le coproduit Δ de cette algèbre de Hopf est défini par la formule suivante :

$$\Delta(T) = \sum_{s \in SF(T)} s \otimes T/s$$

où T/s est l'arbre obtenu en contractant toutes les composantes connexes de la sous-forêt s sur un sommet.

Exemples :

$$\begin{aligned} \Delta(\bullet) &= \bullet \otimes \bullet \\ \Delta(C_n) &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} C_p \otimes C_{n-p}, n \geq 0. \\ \Delta(\overset{\circ}{\bullet}) &= \bullet \otimes \overset{\circ}{\bullet} + \overset{\circ}{\bullet} \otimes \bullet \\ \Delta(\overset{\circ}{\overset{\circ}{\bullet}}) &= \bullet \otimes \overset{\circ}{\overset{\circ}{\bullet}} + 2 \times \overset{\circ}{\bullet} \otimes \overset{\circ}{\bullet} + \overset{\circ}{\overset{\circ}{\bullet}} \otimes \bullet \end{aligned}$$

Nous pouvons voir E (resp. L) comme un caractère de \mathcal{H} , c'est-à-dire une application de \mathcal{H} dans \mathbb{C} , en l'identifiant à l'application qui à un arbre T de \mathcal{H} associe le coefficient de T dans E (resp. dans L). L'application $m_{\mathbb{C}} \circ (E \otimes L) \circ \Delta$ est alors l'application qui à un arbre T de \mathcal{H} associe le coefficient de T dans $E \circ L$, c'est-à-dire l'application qui vaut 1 pour l'arbre \bullet et 0 partout ailleurs.

Ceci permet de calculer explicitement les coefficients de L les uns après les autres, néanmoins, pour connaître le coefficient d'un arbre T dans L , il faut connaître le coefficient de cet arbre dans E ainsi que les coefficients des arbres qui apparaissent dans son coproduit dans E et dans L .

Nous donnons ci-dessous des exemples de calcul dans des cas simples :

- Dans le cas de l'arbre \bullet , nous obtenons : $E(\bullet) \times L(\bullet) = 1$,
or $E(\bullet) = 1$
d'où $L(\bullet) = 1$.
- Dans le cas de l'arbre $\overset{\circ}{\bullet}$, avec le coproduit calculé à l'exemple ci-dessus, nous obtenons : $E(\bullet) \times L(\overset{\circ}{\bullet}) + E(\overset{\circ}{\bullet}) \times L(\bullet) = 0$,
or $L(\bullet) = E(\bullet) = 1$ et $E(\overset{\circ}{\bullet}) = \frac{1}{2}$
donc $L(\overset{\circ}{\bullet}) = -\frac{1}{2}$.

7.5. Calcul de $\exp(L)$.

Montrons le lemme 3.6 de l'article [Cha08b] que nous rappelons ci-dessous :

Lemme 7.3.

$$\exp(L)B(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} B(t) \curvearrowright \underbrace{\bullet \dots \bullet}_n = \sum_T \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{\#T}}{\#Aut(T)n!} Ehr_{K_T}(-t-1)(T_n(T))$$

où $T_n(T)$ est l'ensemble des arbres obtenus en rajoutant simultanément n sommets à T .

Démonstration. Le lemme revient à montrer que $\exp(L) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \overbrace{\bullet \dots \bullet}^n$, car nous aurions alors $\exp(L)B(t) = B(t) \curvearrowright \exp(L) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} B(t) \curvearrowright \underbrace{\bullet \dots \bullet}_n$.

Pour cela, nous introduisons la notion suivante :

Définition 7.4. L'ensemble des éléments *de type groupe* (*group-like* en anglais) d'une algèbre de Hopf \mathcal{H} , noté $gpl(\mathcal{H})$, est l'ensemble suivant :

$$gpl(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{H} \mid \Delta(x) = x \otimes x\}.$$

exp vérifie la propriété suivante :

Lemme 7.5. exp est une bijection de $\hat{P}L$ dans l'ensemble des éléments de type groupe de $\mathcal{H}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}$ qui ont un terme constant égal à 1.

Démonstration. Montrons que l'image de $\hat{P}L$ par exp est bien incluse dans l'ensemble des éléments de type groupe de $\mathcal{H}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}$ qui ont un terme constant égal à 1.

Soit T , un élément de $\hat{P}L$, nous avons alors par définition :

$$(7.1) \quad \exp(T) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \overbrace{T \dots T}^n = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \overbrace{T \dots T}^n$$

donc le coproduit de $\exp(T)$ est le suivant :

$$\begin{aligned} \Delta(\exp(T)) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \overbrace{T \dots T}^k \otimes \overbrace{T \dots T}^{n-k} \\ \Delta(\exp(T)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \overbrace{T \dots T}^k \otimes \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} \overbrace{T \dots T}^{n-k} = \exp(T) \otimes \exp(T). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'image de $\hat{P}L$ par exp est bien incluse dans l'ensemble des éléments de type groupe de $\mathcal{H}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}$ qui ont un terme constant égal à 1.

De plus, sur cet ensemble, nous pouvons définir la fonction log suivante :

$$\log(1+x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-x)^n}{n}.$$

Nous admettrons que cette fonction est bien l'inverse de exp. \square

$E : T \mapsto \frac{\exp(T)-1}{T}$ est alors une injection de $\hat{P}L$ dans lui-même. En particulier, $E \circ \exp^{-1}(\exp(L)) = E \circ L = \bullet$ donc $\exp(L)$ sera l'unique $S \in \text{gpl}(\mathcal{H}_{\mathcal{G}\mathcal{L}})$, de terme constant égal à 1 tel que $E \circ \exp(S) = \bullet$.

Soit $S' = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \overbrace{\bullet \dots \bullet}^n$. Montrons que cet élément est dans $\text{gpl}(\mathcal{H}_{\mathcal{G}\mathcal{L}})$. Pour cela, nous calculons son coproduit :

$$\Delta(S') = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \overbrace{\bullet \dots \bullet}^k \otimes \overbrace{\bullet \dots \bullet}^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \overbrace{\bullet \dots \bullet}^k \otimes \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \overbrace{\bullet \dots \bullet}^n = S' \otimes S'.$$

donc S' est dans $\text{gpl}(\mathcal{H}_{\mathcal{G}\mathcal{L}})$, de terme constant égal à 1.

Montrons que $E \circ \exp(S') = \bullet$. Pour cela, nous admettrons le lemme suivant, démontré dans [Cha08b]

Lemme 7.6. L'application $E \circ \exp^{-1}$ est la restriction de la projection canonique de $\mathcal{H}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}$ sur $\hat{P}L$. L'image d'une forêt d'au moins deux arbres est alors 0.

Utilisant le lemme 7.6, nous calculons que $E \circ \exp(S') = \bullet$.

Par conséquent, $\exp(L) = S'$, d'où

$$(7.2) \quad \exp(L) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \overbrace{\bullet \dots \bullet}^n.$$

\square

APPENDICE : CALCUL DES PREMIERS COEFFICIENTS DE E ET DE L

Nous rappelons les formules vérifiées par E :

$$E = \sum_{n \geq 1} \sum_{T, \#T=n} CM_T \times \frac{T}{n!} = \sum_{T \in \mathcal{T}} E_T T,$$

où $CM_T = \frac{n!}{\#Aut(T) \times T!}$ et $E_T = \frac{1}{\#Aut(T) \times T!}$,

et $T!$ est défini par récurrence comme suit :

$\bullet! = 1$, $T! = \#T \times \prod_{j=1}^k T_j!$ où $T = B_+(T_1, \dots, T_k)$.

De même, posant $L = \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{L_T}{\#Aut(T)} T$, le théorème 3.5 donne :

$$L_T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-1)^{\#T} Ehr_{K_T}(-t-1)}{t}.$$

Calculons les coefficients des arbres de degré inférieur à 5 dans les séries L et E :

T	$\#Aut(T)$	$T!$	CM_T	E_T	$Ehr_{K_T}(t)$	L_T	$\frac{L_T}{\#Aut(T)}$
	1	1	1	1	$t + 1$	1	1
	1	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(t + 2)(t + 1)$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
	1	6	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}(t + 3)(t + 2)(t + 1)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	2	3	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}(2t + 3)(t + 2)(t + 1)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
	1	24	1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4!}(t + 4)(t + 3)(t + 2)(t + 1)$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{4}$
	2	12	1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}(t + 3)(t + 2)^2(t + 1)$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{12}$
	1	8	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}(3t + 4)(t + 3)(t + 2)(t + 1)$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{-1}{12}$
	6	4	1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}(t + 2)^2(t + 1)^2$	0	0

T	$Ehr_{\kappa_T}(t)$
	$\frac{1}{5!}(t+5)(t+4)(t+3)(t+2)(t+1)$
	$\frac{1}{120}(2t+5)(t+4)(t+3)(t+2)(t+1)$
	$\frac{1}{120}(3t+5)(t+4)(t+3)(t+2)(t+1)$
	$\frac{1}{120}(4t+5)(t+4)(t+3)(t+2)(t+1)$
	$\frac{1}{60}(3t^2+12t+10)(t+3)(t+2)(t+1)$
	$\frac{1}{60}(3t^2+12t+10)(t+3)(t+2)(t+1)$
	$\frac{1}{120}(8t^2+27t+20)(t+3)(t+2)(t+1)$
	$\frac{1}{120}(12t^2+33t+20)(t+3)(t+2)(t+1)$
	$\frac{1}{30}(3t^2+9t+5)(2t+3)(t+2)(t+1)$
C_n	$\sum_{k=0}^t (k+1)^{n-1}$
S_n	$\binom{n+t}{n}$

T	$\#Aut(T)$	$T!$	CM_T	E_T	L_T	$\frac{L_T}{\#Aut(T)}$
	1	120	1	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
	2	60	1	$\frac{1}{120}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{40}$
	1	40	3	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
	1	30	4	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
	2	20	3	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$
	6	20	1	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{180}$
	2	15	4	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{120}$
	2	10	6	$\frac{1}{30}$	$\frac{-1}{60}$	$\frac{-1}{120}$
	24	5	1	$\frac{1}{120}$	$\frac{-1}{30}$	$\frac{-1}{720}$
C_n	$(n-1)!$	n	1	$\frac{1}{n!}$		
S_n	1	$n!$	1	$\frac{1}{n!}$	$\frac{(-1)^{n-1}}{n}$	$\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

RÉFÉRENCES

- [Bec] M. Beck. Discrete volume computations for polytopes : An invitation to Ehrhart theory. *math.sfsu.edu/beck*. Undergraduate Connecticut Valley Colloquium, Amherst College, 2006.
- [BK99] D.J. Broadhurst and D. Kreimer. Renormalization automated by Hopf algebra. *J.Symb.Comput.* 27, 1999. arXiv : hep-th/9810087.
- [Bri02] Michel Brion. Polytopes convexes entiers (1996). *Où en sont les mathématiques ?*, 2002. Jean-Michel Kantor, Vuibert.
- [Car06] P. Cartier. A primer of Hopf algebras. *Prépublication de l'IHES*, 2006.
- [CEFM09] D. Calaque, K. Ebrahimi-Fard, and D. Manchon. Two interacting Hopf algebras of trees, a Hopf algebraic approach to composition and substitution of B-series. *Adv. in Appl. Math.*, 2009.
- [Cha08a] F. Chapoton. Operads and algebraic combinatorics of trees. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 58, 2008. Article B58c.
- [Cha08b] F. Chapoton. A rooted-trees q-series lifting a one-parameter family of lie idempotents. *arXiv : 0807.1830*, 2008.
- [Dix74] J. Dixmier. *Algèbres enveloppantes*. Cahiers scientifiques (Gauthiers Villars), 1974.
- [D.Q] D.Quillen.
- [GL89] R. Grossman and R.G. Larson. Hopf-algebraic structures of families of trees. *J. Algebra*, 126, 1989. arXiv : 0711.3877.
- [Hum72] J.E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and Representation Theory*. Graduate Texts in Mathematics, vol.9 (Springer), 1972.
- [LR09] J.-L. Loday and M. Ronco. Combinatorial Hopf algebras. 2009. arXiv : 0810.0435.
- [Man] D. Manchon. A short survey on pre-Lie algebras. <http://math.univ-bpclermont.fr/~manchon/biblio/ESI-prelie2009.pdf>.
- [OG05] J-M Oudom and D. Guin. Sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre pré-Lie. *Elsevier, Science direct*, janvier 2005.
- [Pan] F. Panaite. Relating the Connes-Kreimer and Grossman-Larson Hopf algebras built on rooted trees. arXiv : math.QA/0003074.
- [WZ] D. Wright and W. Zhao. D-log and formal flow analytic isomorphisms of N-space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(8).

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Notations et conventions	2
1. Polytopes et Polynôme d'Ehrhart	2
1.1. Polytopes	2
1.2. Polynôme d'Ehrhart	2
1.3. Calcul du polynôme d'Ehrhart	4
2. Arbres enracinés et groupe des séries en arbres	5
2.1. Arbres enracinés	5
2.2. Séries en arbres particulières	11
3. Calcul des coefficients du logarithme*	14
3.1. Suspension et théorème d'expressions des coefficients de L	15
3.2. Preuve du théorème d'expression des coefficients de L pour les corolles	15
3.3. Preuve du théorème d'expression des coefficients de L pour les chaînes	16
3.4. Preuve du théorème d'expression des coefficients de L dans le cas général	16
3.5. Spécialisation du théorème pour certaines valeurs de t	19
4. Annulation du coefficient de certains arbres dans L	20
4.1. Calcul du polynôme d'Ehrhart de l'arbre $T_{k,l}$ à l'aide de Maple	20
4.2. Calcul du polynôme d'Ehrhart de l'arbre $T_{k,l}$ avec une méthode combinatoire	22
5. De l'opérade pré-Lie au groupe des séries en arbres et à l'algèbre pré-Lie associée	24
5.1. L'opérade pré-Lie	24
5.2. Lien avec le groupe des séries en arbre	25
5.3. Algèbre pré-Lie	25
6. Des algèbres de Lie aux algèbres de Hopf	25
6.1. Algèbres de Lie	26
6.2. Algèbres de Hopf	26
6.3. Théorèmes de Poincaré-Birkhoff-Witt et Milnor-Moore	27
7. Lien avec les algèbres de Hopf de Connes-Kreimer et Grossman-Larson	27
7.1. Algèbre de Hopf de Connes-Kreimer	28
7.2. Algèbre de Hopf de Grossman-Larson	28
7.3. Lien avec le groupe des séries en arbre	29
7.4. Calcul direct des coefficients de L	30
7.5. Calcul de $\exp(L)$	31
Appendice : Calcul des premiers coefficients de E et de L	33
Références	35
Remerciements	37

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier très vivement monsieur Frédéric Chapoton, mon maître de stage, qui m'a proposé ce sujet d'étude passionnant et m'a guidée tout au long de mon stage.

J'aimerais également remercier monsieur Frank Wagner pour sa patience, sa diligence et sa perspicacité.