# Le poset des hyperarbres

Bérénice Oger

Institut Camille Jordan (Lyon)

Jeudi 28 février 2013

# Historique

| | | | |
|---|---|---|---|
| Années 1980 | $\longrightarrow$ | Claude Berge, | Hypergraphes |
| 1996 | $\longrightarrow$ | McCullough et Miller, | poset de Whitehead |
| $2001 - 2007$ | $\longrightarrow$ | McCammond et Meier, | poset des hyperarbres |
| | $\hookrightarrow$ | 2004 : | $(n-1)^{n-2}$ |
| 2007 | $\longrightarrow$ | Chapoton, | polynôme caractéristique et conjecture |

**Problème :**

L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur PreLie(n-1) est-elle la même que sur l'unique groupe d'homologie du poset des hyperarbres sur $n$ sommets ?

# Sommaire


1. Des espèces au poset des hyperarbres
2. L'homologie du poset des hyperarbres
3. Du poset des hyperarbres aux arbres enracinés

# Plan

1 Des espèces au poset des hyperarbres

# Qu'est-ce qu'une espèce ?

**Définition**

*Une espèce* $\mathrm{F}$ *est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. À un ensemble fini* $I$*, l'espèce* $\mathrm{F}$ *associe un ensemble fini* $\mathrm{F}(I)$ *indépendant de la nature de* $I$*.*

# Qu'est-ce qu'une espèce ?

**Définition**

*Une espèce* $\mathrm{F}$ *est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. À un ensemble fini* $I$*, l'espèce* $\mathrm{F}$ *associe un ensemble fini* $\mathrm{F}(I)$ *indépendant de la nature de* $I$*.*

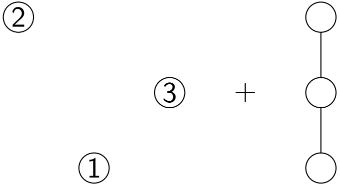
Espèce = plan de construction, avec invariance de l'ensemble d'arrivée par ré-étiquetage

# Qu'est-ce qu'une espèce ?

**Définition**

*Une espèce* F *est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. À un ensemble fini* $I$*, l'espèce* F *associe un ensemble fini* $\mathrm{F}(I)$ *indépendant de la nature de* $I$*.*

Espèce = plan de construction, avec invariance de l'ensemble d'arrivée par ré-étiquetage

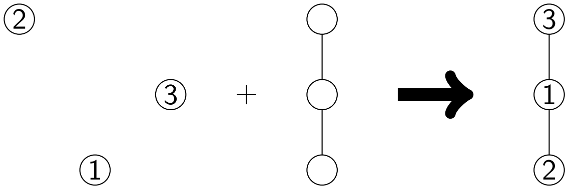


# Qu'est-ce qu'une espèce ?

## Définition

*Une espèce* F *est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. À un ensemble fini $I$, l'espèce* F *associe un ensemble fini* F$(I)$ *indépendant de la nature de $I$.*

Espèce $=$ plan de construction, avec invariance de l'ensemble d'arrivée par ré-étiquetage



# Qu'est-ce qu'une espèce ?

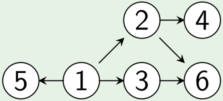
## Définition

*Une espèce* F *est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. À un ensemble fini* $I$*, l'espèce* F *associe un ensemble fini* $\mathrm{F}(I)$ *indépendant de la nature de* $I$*.*

## Contre-exemples

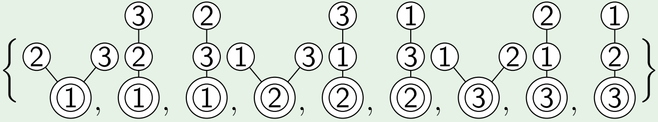
Les ensembles ci-dessous ne sont **pas** les images d'un ensemble par une espèce :

- $\{(1,\mathbf{3},2),(2,1,\mathbf{3}),(2,\mathbf{3},1)(3,1,\mathbf{2})\}$(ensemble des permutations de $\{1,2,3\}$ avec exactement 1 élément plus grand que l'élément précédent)
- (graphe de divisibilité de $\{1,2,3,4,5,6\}$)



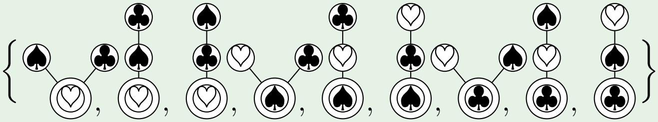
## Exemples

Les ensembles ci-dessous sont des images par des espèces de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

- $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ (espèce des listes sur $\{1, 2, 3\}$)
- $\{\{1, 2, 3\}\}$ (espèce des ensembles non vides Comm)
-  (espèce des arbres enracinés PreLie)

## Exemples

Les ensembles ci-dessous sont des images par des espèces de l'ensemble $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$.

- $\{(\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit), (\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit), (\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit), (\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit), (\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit), (\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit)\}$ (espèce des listes sur $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$)
- $\{\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}\}$ (espèce des ensembles non vides Comm)
-  (espèce des arbres enracinés PreLie)

# Opérations sur les espèces

## Proposition

Soient $F$ et $G$, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées dessus :

- $(F + G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)

# Opérations sur les espèces

## Proposition

Soient $F$ et $G$, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées dessus :

- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)

## Exemple : produit par l'espèce des singletons

Soit $F$ une espèce et $X$, l'espèce des singletons :

$$X(V) = V \text{ si } |V| = 1, \emptyset \text{ sinon.}$$

Le produit est donné par :

$$X \times F(I) = \sum_{i \in I} \{i\} \times F(I - \{i\}).$$

# Opérations sur les espèces

## Proposition

Soient $F$ et $G$, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées dessus :

- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)

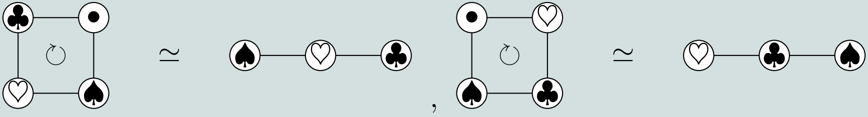
# Opérations sur les espèces

## Proposition

Soient $F$ et $G$, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées dessus :

- $(F + G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)

## Exemple : dérivée de l'espèce des cycles pour $I = \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$



# Opérations sur les espèces

## Proposition

Soient $F$ et $G$, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées dessus :

- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)
- $(F \circ G)(I) = \bigsqcup_{\pi \in \mathcal{P}(I)} F(\pi) \times \prod_{J \in \pi} G(J)$, (substitution) où $\mathcal{P}(I)$ décrit l'ensemble des partitions de $I$.

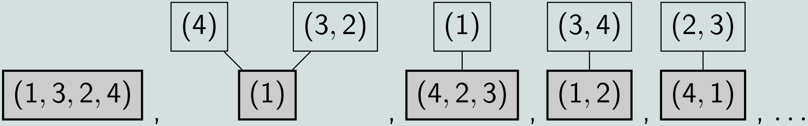
# Opérations sur les espèces

## Proposition

Soient $F$ et $G$, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées dessus :

- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)
- $(F \circ G)(I) = \bigsqcup_{\pi \in \mathcal{P}(I)} F(\pi) \times \prod_{J \in \pi} G(J)$, (substitution) où $\mathcal{P}(I)$ décrit l'ensemble des partitions de $I$.

## Exemple de substitution : Arbres enracinés de listes sur $I = \{1, 2, 3, 4\}$



## Définition

*À une espèce $F$, on associe sa série génératrice :*

$$C_F(x) = \sum_{n\geq 0} \#F(\{1,\dots,n\})\frac{x^n}{n!}.$$

## Exemples de séries génératrices :

- La série génératrice de l'espèce des listes est $C_{\text{Assoc}} = \frac{1}{1-x}$.
- La série génératrice de l'espèce des ensembles non vides est $C_{\text{Comm}} = \exp(x) - 1$.
- La série génératrice de l'espèce singleton est $C_{\text{X}} = x$.
- La série génératrice de l'espèce des arbres enracinés est $C_{\text{PreLie}} = \sum_{n\geq 0} n^{n-1}\frac{x^n}{n!}$.

# Opérations sur les séries génératrices

## Proposition

Soit $F$ et $G$ deux espèces. Leurs séries génératrices vérifient :

- $C_{F'} = C'_F$,
- $C_{F+G} = C_F + C_G$,
- $C_{F\times G} = C_F \times C_G$,
- $C_{F\circ G} = C_F \circ C_G$.

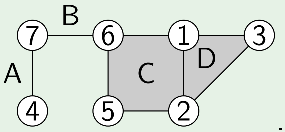
# Hypergraphes et hyperarbres

## Définition ([Ber89])

*Un hypergraphe (sur un ensemble $V$) est un couple $(V, E)$ où :*

- *$V$ est un ensemble fini, (sommets)*
- *$E$ est un sous-ensemble de l'ensemble des parties de $V$, $\mathcal{P}(V)$. (arêtes)*

## Exemple d'hypergraphe sur $[1; 7]$



# Marche sur un hypergraphe

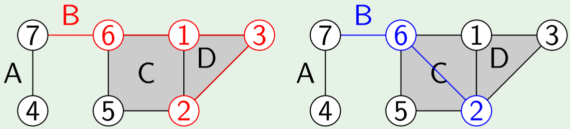
## Définition

*Soit $H = (V, E)$ un hypergraphe.*
*Une marche d'un sommet ou d'une arête $d$ vers un sommet ou une arête $f$ de $H$ est une suite alternée de sommets et d'arêtes, commençant par $d$ et terminant par $f$ :*

$$(d, \ldots, e_i, v_i, e_{i+1}, \ldots, f)$$

*où pour tout $i$, $v_i \in V$, $e_i \in E$ et $\{v_i, v_{i+1}\} \subseteq e_i$. La longueur de la marche est le nombre de sommets et d'arêtes de la marche.*

## Exemples de marches



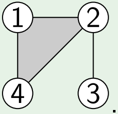
# Hyperarbres

## Définition

*Un hyperarbre est un hypergraphe non trivial $H$ tel que, pour toute paire de sommets distincts $v$ et $w$ de $H$,*

- *il existe une marche de $v$ à $w$ dans $H$ avec des arêtes disjointes $e_i$ ( $H$ est connexe),*
- *cette marche est unique ($H$ n'a pas de cycles).*

## Exemple d'hyperarbre



# Le poset des hyperarbres

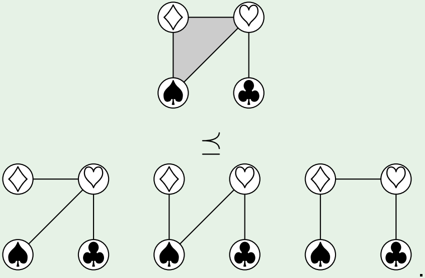
## Définition

*Soit $I$ un ensemble fini de cardinal $n$, $S$ et $T$ deux hyperarbres sur $I$.*

$$S \preceq T \iff \text{Toute arête de } S \text{ est l'union d'arêtes de } T.$$

*On note $S \prec T$ si $S \preceq T$ et $S \neq T$.*

## Exemple pour les hyperarbres sur quatre sommets



- Graduation par le nombre d'arêtes,
- Existence d'un unique minimum $\hat{0}$,
- $\mathrm{HT(I)}$ = poset des hyperarbres sur $I$,
- $\mathrm{HT_n}$ = poset des hyperarbres sur $[1, n]$.

# Plan

2. L'homologie du poset des hyperarbres

## Homologie du poset

A chaque poset, on peut associer une homologie.

### Définition

*Une k-chaîne stricte d'hyperarbres sur* $I$ *est un k-uplet* $(a_1, \ldots, a_k)$*, où les* $a_i$ *sont des hyperarbres sur* $I$ *différents du minimum* $\hat{0}$ *et* $a_i \prec a_{i+1}$*.*

# Homologie du poset

A chaque poset, on peut associer une homologie.

## Définition

*Une $k$-chaîne stricte d'hyperarbres sur $I$ est un $k$-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$, où les $a_i$ sont des hyperarbres sur $I$ différents du minimum $\hat{0}$ et $a_i \prec a_{i+1}$.*

Soit $C_k$, l'espace vectoriel engendré par les $k+1$-chaînes strictes. On pose $C_{-1} = \mathbb{C}.e$. On munit l'ensemble $(C_k)_{k \geq -1}$ des bords :

$$\partial_k(a_1 \prec \ldots \prec a_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i (a_1 \prec \ldots \prec \hat{a_i} \prec \ldots \prec a_{k+1}),$$

$(a_1 \prec \ldots \prec a_{k+1}) \in C_k$.

# Homologie du poset

A chaque poset, on peut associer une homologie.

**Définition**

*Une $k$-chaîne stricte d'hyperarbres sur $I$ est un $k$-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$, où les $a_i$ sont des hyperarbres sur $I$ différents du minimum $\hat{0}$ et $a_i \prec a_{i+1}$.*

Soit $C_k$, l'espace vectoriel engendré par les $k+1$-chaînes strictes. On pose $C_{-1} = \mathbb{C}.e$. On munit l'ensemble $(C_k)_{k \geq -1}$ des bords :

$$\partial_k(a_1 \prec \ldots \prec a_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i (a_1 \prec \ldots \prec \hat{a_i} \prec \ldots \prec a_{k+1}),$$

$(a_1 \prec \ldots \prec a_{k+1}) \in C_k$.

On définit l'homologie du poset par :

$$\tilde{H}_j = ker \partial_j / im \partial_{j+1}.$$

**Théorème ([MM04])**

*Il y a un seul groupe d'homologie réduite non nul, le groupe $\tilde{H}_{n-3}$, où $n = \#I$.*

## Théorème ([MM04])

*Il y a un seul groupe d'homologie réduite non nul, le groupe $\tilde{H}_{n-3}$, où $n = \#I$.*

## Corollaire

*Le caractère de l'action du groupe symétrique sur $\tilde{H}_{n-3}$ est donné en fonction des caractères des actions du groupe symétrique sur $C_k$ par :*

$$\chi_{\tilde{H}_{n-3}} = (-1)^{n-3} \sum_{k=-1}^{n-3} (-1)^k \chi_{C_k}, \text{ où } n = \#I.$$

# Compter les chaînes strictes à l'aide de chaînes larges

Soit $I$ un ensemble de cardinal $n$.

### Définition

*Une $k$-chaîne large d'hyperarbres sur $I$ est un $k$-uplet $(a_1, \dots, a_k)$, où les $a_i$ sont des hyperarbres sur $I$ et $a_i \preceq a_{i+1}$.*

# Compter les chaînes strictes à l'aide de chaînes larges

Soit $I$ un ensemble de cardinal $n$.

**Définition**

*Une $k$-chaîne large d'hyperarbres sur $I$ est un $k$-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$, où les $a_i$ sont des hyperarbres sur $I$ et $a_i \preceq a_{i+1}$.*

Soit $M_{k,s}$ l'ensemble des mots sur $\{0, 1\}$ de longueur $k$, contenant $s$ lettres "1". L'espèce $\mathcal{M}_{k,s}$ est définie par :

$$\begin{cases} \emptyset & \mapsto & M_{k,s}, \\ V \neq \emptyset & \mapsto & \emptyset. \end{cases}$$

## Proposition

Les espèces $\mathcal{H}_k$ des $k$-chaînes larges et $\mathcal{HS}_i$ des $i$-chaînes strictes sont reliées par :

$$\mathcal{H}_k \cong \sum_{i \geq 0} \mathcal{HS}_i \times \mathcal{M}_{k,i}.$$

## Démonstration.

$$\begin{tikzcd} & \boxed{(a_{i_1}, \dots, a_{i_s})} \\ \boxed{(a_1, \dots, a_k)} \arrow[ur, "\text{Elimination des répétitions}"] \arrow[dr, "u_j = 0 \text{ si } a_j = a_{j-1},\ 1 \text{ sinon}"'] & \\ & \boxed{(u_1, \dots, u_k)} \end{tikzcd}$$

en posant $a_0 = \hat{0}$. □

La proposition précédente donne, pour tout entier naturel $k$ :

$$\chi_k = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{k}{i} \chi_i^s.$$

La proposition précédente donne, pour tout entier naturel $k$ :

$$\chi_k = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{k}{i} \chi_i^s.$$

$\chi_k$ est donc un polynome $P(k)$ en $k$ qui donne, évalué en $-1$, le caractère voulu :

## Corollaire

$$\chi_{\tilde{H}_{n-3}} = (-1)^n P(-1) =: (-1)^n \chi_{-1}$$

Dans ce qui suit, sauf mention contraire, les hyperarbres seront sur $\{1, \ldots, n\}$.

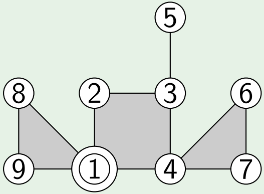
# Hyperarbres pointés

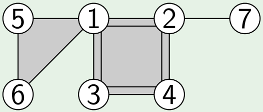
## Définition

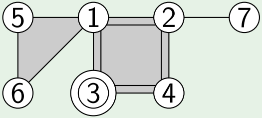
*Soit un hyperarbre $H$ sur $I$. $H$ est dit :*

- *enraciné en un sommet $s$ si un sommet $s$ de $H$ est distingué,*
- *pointé en une arête $a$ si une arête $a$ de $H$ est distinguée,*
- *pointé en un drapeau $s \in a$ si une arête $a$ de $H$ et un sommet $s$ de $a$ sont distingués.*

## Exemples d'hyperarbres pointés



## Proposition : Principe de dissymétrie

Les espèces pointées et non pointées d'hyperarbres sont reliées par :

$$\mathcal{H} + \mathcal{H}^{pa} = \mathcal{H}^{p} + \mathcal{H}^{a}.$$

Preuve ici

On note respectivement $\mathcal{H}_k$, l'espèce des $k$-chaînes larges d'hyperarbres et $\mathcal{H}_k^{pa}$, $\mathcal{H}_k^{p}$ et $\mathcal{H}_k^{a}$ les espèces des $k$-chaînes larges d'hyperarbres dont le minimum est pointé en un sommet et une arête, enraciné en un sommet ou pointé en une arête.

## Corollaire ([Oge12])

*Les espèces des $k$-chaînes larges d'hyperarbres sont reliées par :*

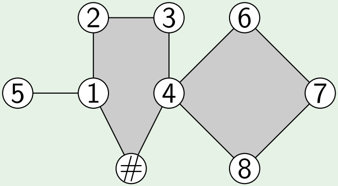
$$\mathcal{H}_k + \mathcal{H}_k^{pa} = \mathcal{H}_k^{p} + \mathcal{H}_k^{a}.$$

# Une dernière sorte d'hyperarbres

## Définition

*Un hyperarbre creux sur $n$ sommets ($n \geq 1$) est un hyperarbre sur l'ensemble $\{\#, 1, \ldots, n\}$, tel que le sommet étiqueté par $\#$, appelé le creux, appartienne à une et une seule arête.*

## Un exemple d'hyperarbre creux




On note $\mathcal{H}_k^{cm}$, l'espèce des $k$-chaînes d'hyperarbres dont le minimum est un hyperarbre creux à une seule arête et $\mathcal{H}_k^c$, l'espèce des $k$-chaînes d'hyperarbres dont le minimum est un hyperarbre creux.

# Relations entre les espèces d'hyperarbres

## Théorème

*Les espèces $\mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k^p$, $\mathcal{H}_k^c$ et $\mathcal{H}_k^{cm}$ vérifient :*

$$\mathcal{H}_k^p = X \times \mathcal{H}_k' \tag{1}$$

$$\mathcal{H}_k^p = X \times \mathrm{Comm} \circ \mathcal{H}_k^c + X, \tag{2}$$

$$\mathcal{H}_k^c = \mathcal{H}_k^{cm} \circ \mathcal{H}_k^p, \tag{3}$$

$$\mathcal{H}_k^{cm} = \mathrm{Comm} \circ \mathcal{H}_{k-1}^c. \tag{4}$$

# Relations entre les espèces d'hyperarbres

## Théorème

*Les espèces $\mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k^p$, $\mathcal{H}_k^c$ et $\mathcal{H}_k^{cm}$ vérifient :*

$$\mathcal{H}_k^p = X \times \mathcal{H}_k' \tag{1}$$

$$\mathcal{H}_k^p = X \times \mathrm{Comm} \circ \mathcal{H}_k^c + X, \tag{2}$$

$$\mathcal{H}_k^c = \mathcal{H}_k^{cm} \circ \mathcal{H}_k^p, \tag{3}$$

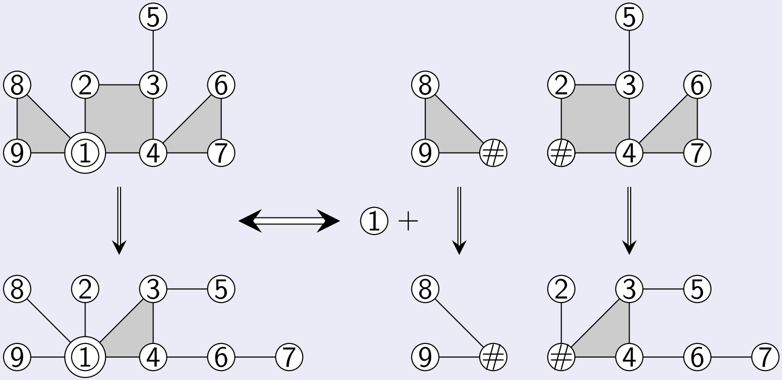
$$\mathcal{H}_k^{cm} = \mathrm{Comm} \circ \mathcal{H}_{k-1}^c. \tag{4}$$

## Démonstration.

1. Pointer une espèce revient à faire le produit de l'espèce singleton $X$ et de sa dérivée,
2. On sépare la racine et chacune des arêtes la contenant, laissant des creux là où était la racine,

# Suite de la démonstration.

$$\mathcal{H}_k^p = X \times \mathrm{Comm} \circ \mathcal{H}_k^c + X,$$



Fin de la preuve

# Dimension de l'homologie

## Proposition

Les séries génératrices des espèces $\mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k^p$, $\mathcal{H}_k^c$ et $\mathcal{H}_k^{cm}$ vérifient :

$$\mathcal{C}_k^p = x \cdot \exp\left(\frac{\mathcal{C}_{k-1}^p \circ \mathcal{C}_k^p}{\mathcal{C}_k^p} - 1\right), \tag{5}$$

$$\mathcal{C}_k^a = (\mathcal{C}_{k-1} - x)(\mathcal{C}_k^p), \tag{6}$$

$$\mathcal{C}_k^{pa} = (\mathcal{C}_{k-1}^p - x)(\mathcal{C}_k^p), \tag{7}$$

$$x \cdot \mathcal{C}_k' = \mathcal{C}_k^p, \tag{8}$$

$$\mathcal{C}_k + \mathcal{C}_k^{pa} = \mathcal{C}_k^p + \mathcal{C}_k^a. \tag{9}$$

### Lemme

Les séries génératrices des espèces $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_0^p$ sont données par :

$$\mathcal{C}_0 = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1,$$

$$\mathcal{C}_0^p = xe^x.$$

## Lemme

Les séries génératrices des espèces $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_0^p$ sont données par :

$$\mathcal{C}_0 = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1,$$

$$\mathcal{C}_0^p = xe^x.$$

Ces valeurs avec les équations de la proposition précédente donnent :

## Théorème ([MM04])

*La dimension du seul groupe d'homologie non trivial du poset des hyperarbres est* $(n-1)^{n-2}$.

Cette dimension est la dimension de l'espace vectoriel PreLie(n-1) qui a pour base l'ensemble des arbres enracinés sur $n-1$ sommets.

1. Cette dimension est la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{PreLie}(n-1)$ qui a pour base l'ensemble des arbres enracinés sur $n-1$ sommets. L'opérade (espèce vérifiant des propriétés complémentaires de composition) dont les espaces vectoriels sous-jacents sont les $\mathrm{PreLie}(n)$ est PreLie.
2. Cette opérade est anti-cyclique (cf. [Cha05]) : on peut munir l'espace vectoriel $\mathrm{PreLie}(n-1)$ d'une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ qui étend celle de $\mathfrak{S}_{n-1}$.
3. De plus, il y a une action de $\mathfrak{S}_n$ sur l'unique groupe d'homologie du poset des hyperarbres sur $n$ sommets.

**Question**

L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur PreLie(n-1) est-elle la même que sur l'unique groupe d'homologie du poset des hyperarbres sur $n$ sommets ?

# Plan

3. Du poset des hyperarbres aux arbres enracinés

## Définition

*L' indice cyclique d'une espèce $F$ est la série formelle en une infinité de variables $\mathfrak{p} = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$ definie par :*

$$Z_F(\mathfrak{p}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left( \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} F^\sigma p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} p_3^{\sigma_3} \ldots \right),$$

- *avec $F^\sigma$, le nombre de $F$-structures fixées par l'action de $\sigma$,*
- *et $\sigma_i$, le nombre de cycles de longueur $i$ dans la décomposition en cycles disjoints de $\sigma$.*

## Exemples

- L'indice cyclique de l'espèce des listes est $Z_{\mathrm{Assoc}} = \frac{1}{1-p_1}$.
- L'indice cyclique de l'espèce des ensembles non vides est $Z_{\mathrm{Comm}} = \exp(\sum_{k\geq 1} \frac{p_k}{k}) - 1$.
- L'indice cyclique de l'espèce singleton est $Z_{\mathrm{X}} = p_1$.

# Opérations

Les opérations sur les espèces se traduisent en opérations sur l'indice cyclique :

## Proposition

*Soient $F$ et $G$ deux espèces. Leurs indices cycliques vérifient :*

$$\begin{aligned} Z_{F+G} &= Z_F + Z_G, & Z_{F\times G} &= Z_F \times Z_G, \\ Z_{F\circ G} &= Z_F \circ Z_G, & Z_{F'} &= \frac{\partial Z_F}{\partial p_1}. \end{aligned}$$

## Définition

*La suspension $\Sigma$ d'une fonction symétrique $f(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ est définie par :*

$$\Sigma f = -f(-p_1, -p_2, -p_3, \ldots) = -f \circ -p_1.$$

Utilisant les relations sur les espèces établies précédemment :

## Proposition

Les séries $Z_k$, $Z_k^p$, $Z_k^a$ et $Z_k^{pa}$ satisfont les relations suivantes :

$$Z_k + Z_k^{pa} = Z_k^p + Z_k^a, \tag{10}$$

$$Z_k^p = p_1 + p_1 \times \mathrm{Comm} \circ \left( \frac{Z_{k-1}^p \circ Z_k^p - Z_k^p}{Z_k^p} \right), \tag{11}$$

$$Z_k^a + Z_k^p = Z_{k-1} \circ Z_k^p, \tag{12}$$

$$Z_k^{pa} + Z_k^p = Z_{k-1}^p \circ Z_k^p, \tag{13}$$

et

$$p_1 \frac{\partial Z_k}{\partial p_1} = Z_k^p. \tag{14}$$

## Théorème ([Oge12], conjecture de [Cha07])

*L'indice cyclique* $Z_{-1}$*, qui donne le caractère de l'action* $\mathfrak{S}_n$ *sur* $\tilde{H}_{n-3}$*, est reliée à l'indice cyclique* $M$ *associée à la structure anti-cyclique de* PreLie *par :*

$$Z_{-1} = p_1 - \Sigma M. \tag{15}$$

*L'indice cyclique* $Z^p_{-1}$ *est donné par :*

$$Z^p_{-1} = p_1 \left( \Sigma\, \mathrm{PreLie} + 1 \right). \tag{16}$$

## Théorème ([Oge12], conjecture de [Cha07])

*L'indice cyclique* $Z_{-1}$*, qui donne le caractère de l'action* $\mathfrak{S}_n$ *sur* $\tilde{H}_{n-3}$*, est reliée à l'indice cyclique* $M$ *associée à la structure anti-cyclique de* PreLie *par :*

$$Z_{-1} = p_1 - \Sigma M. \tag{15}$$

*L'indice cyclique* $Z_{-1}^p$ *est donné par :*

$$Z_{-1}^p = p_1 \left(\Sigma \,\mathrm{PreLie} + 1\right). \tag{16}$$

## Démonstration.

Esquisse de la preuve

1. Calcul de $Z_0 = \mathrm{Comm}$ et de $Z_0^p = p_1 + p_1 \times \mathrm{Comm}$
2. Que l'on replace dans l'expression de $Z_0^p$ en fonction de lui-même et de $Z_{-1}^p$

$$Z_0^p = p_1 + p_1 \times \mathrm{Comm} \circ \left( \frac{Z_{-1}^p \circ Z_0^p - Z_0^p}{Z_0^p} \right),$$

## Suite de la preuve.

3. Comme $\Sigma\,\mathrm{PreLie} \circ Z_0^p = Z_0^p \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie} = p_1$, d'après [Cha07], on obtient :
$$Z_{-1}^p = p_1\left(\Sigma\,\mathrm{PreLie} + 1\right).$$
4. Le principe de dissymétrie associé aux expressions obtenues donne :
$$\mathrm{Comm} + Z_{-1}^p \circ Z_0^p - Z_0^p = Z_0^p + Z_{-1} \circ Z_0^p - Z_0^p.$$
d'où
$$\mathrm{Comm} \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie} + p_1\left(\Sigma\,\mathrm{PreLie} + 1\right) - p_1 = p_1 + Z_{-1} - p_1.$$
5. On conclut grâce à l'égalité de [Cha05, equation 50] :
$$\Sigma M - 1 = -p_1\left(-1 + \Sigma\,\mathrm{PreLie} + \frac{1}{\Sigma\,\mathrm{PreLie}}\right).$$

□

Merci de votre attention !

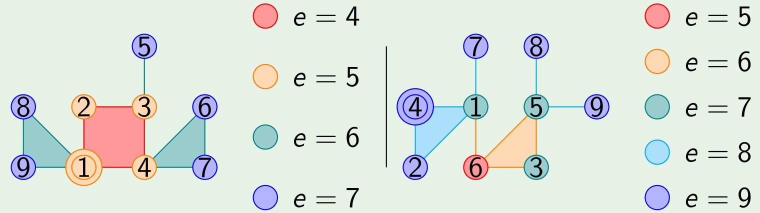
[Oge12] Bérénice Oger *Action of the symmetric groups on the homology of the hypertree posets*. A paraître dans the Journal of Algebraic Combinatorics.

# Excentricité

## Définition

*Excentricité L'excentricité d'un sommet ou d'une arête est le nombre maximal de sommet sur une marche sans répétitions jusqu'à un autre sommet.*
*Le centre d'un hyperarbre quelconque est le sommet ou l'arête d'excentricité minimale.*

## Exemple d'excentricités

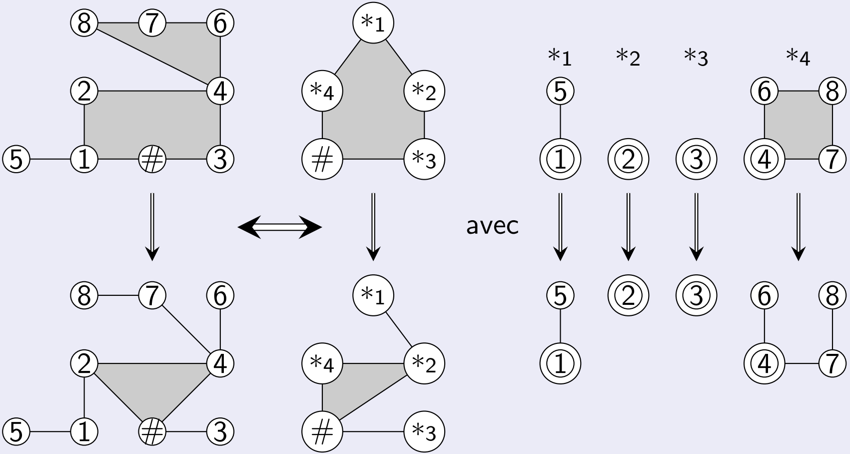


# et fin !

3. Cas creux :

$$\mathcal{H}_k^c = \mathcal{H}_k^{cm} \circ \mathcal{H}_k^p, \qquad (17)$$

$$\mathcal{H}_k^{cm} = \mathrm{Comm} \circ \mathcal{H}_{k-1}^c. \qquad (18)$$



# Bibliographie I


Claude Berge :
*Hypergraphs*, volume 45 de *North-Holland Mathematical Library*.
North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.
Combinatorics of finite sets, Translated from the French.

Frédéric Chapoton :
On some anticyclic operads.
*Algebr. Geom. Topol.*, 5:53–69 (electronic), 2005.

Frédéric Chapoton :
Hyperarbres, arbres enracinés et partitions pointées.
*Homology, Homotopy Appl.*, 9(1):193–212, 2007.
http://www.intlpress.com/hha/v9/n1/.

# Bibliographie II


Jon McCammond et John Meier :
The hypertree poset and the $l^2$-Betti numbers of the motion group of the trivial link.
*Math. Ann.*, 328(4):633–652, 2004.

BÃ©rÃ©nice Oger :
Action of the symmetric groups on the homology of the hypertree posets.
*Submitted*, 2012.
http://arxiv.org/abs/1202.3871.