Hyperarbres décorés et code de Prüfer

B. Oger
Institut Camille Jordan
43 boulevard du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne, France
oger@math.univ-lyon1.fr

Résumé - *Nous introduisons une nouvelle sorte d'arbres, appelés* arbres en boîtes*, pour dénombrer des variations d'hyperarbres, dits* décorés*, où les arêtes sont munies d'une structure additionnelle. Par une bijection utilisant un code de Prüfer, nous dénombrons les arbres en boîtes, ce qui nous permet d'obtenir des expressions explicites des séries génératrices des hyperarbres décorés.*

Mots clés - Hyperarbres, Espèces, Code de Prüfer

1 Introduction

La notion d'hypergraphes a été introduite dans les années 1980 par C. Berge dans le livre [1]. C'est une généralisation de la notion de graphes où les arêtes ne sont plus seulement des paires de sommets, mais des ensembles de cardinal au moins deux. Un hyperarbre est un hypergraphe connexe et sans cycle.
Dans les travaux de C. Jensen, J. McCammond et J. Meier, des hyperarbres pondérés apparaissent pour le calcul de la caractéristique d'Euler d'un sous-groupe du groupe des automorphismes du groupe libre. De plus, d'autres sortes d'hyperarbres pondérés apparaissent lors de l'étude de l'homologie d'un poset sur les hyperarbres. Ces exemples poussent à l'étude générale d'hyperarbres dont les arêtes sont munies d'une structure additionnelle.
Nous rappelons la définition des espèces et des hyperarbres dans la première partie pour arriver à une définition des hyperarbres décorés, que nous dénombrons dans la deuxième partie à l'aide des arbres en boîtes.

2 Des espèces aux hyperarbres décorés

2.1 Hypergraphes et hyperarbres

Nous rappelons d'abord les notions d'hypergraphes et d'hyperarbres :

Definition 1 *Un* hypergraphe (sur un ensemble V) *est un couple* (V, E) *où* V *est un ensemble fini (ensemble de sommets) et* E *est un ensemble de parties de cardinal au moins* 2 *de* V *(ensemble d'arêtes).*

Nous nous intéressons à un type particulier d'hypergraphes : les hyperarbres, définis à partir de la notion suivante de marche.

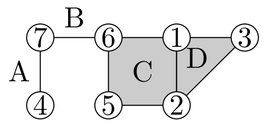

Figure 1 – Un exemple d'hypergraphe. Il y a plusieurs marches de 4 à 2, comme $(4, A, 7, B, 6, C, 2)$ et $(4, A, 7, B, 6, C, 1, D, 2)$.

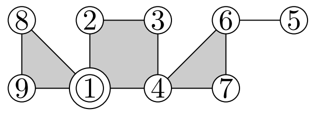

Figure 2 – Un hyperarbre enraciné en 1.

Definition 2 *Soit $H = (V, E)$ un hypergraphe, v et w deux sommets de H. Une* marche de v à w dans H *est une suite alternée de sommets et d'arêtes*

$$(v = v_1, e_1, v_2, \ldots, e_n, v_{n+1} = w)$$

où pour tout i de $\{1, \ldots, n+1\}$, $v_i \in V$, $e_i \in E$ et pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$, $\{v_i, v_{i+1}\} \subseteq e_i$.

Definition 3 *Un* hyperarbre *est un hypergraphe non vide H tel que, entre tout couple de sommets (v, w) de H, il existe une et une seule marche dont toutes les arêtes soient distinctes. Si l'ensemble de sommets V est l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, alors H est appelé* hyperarbre sur n sommets.

Comme pour les arbres, il est plus aisé de compter une version pointée des hyperarbres. Pour cela, nous introduisons la variation suivante :

Definition 4 *Un* hyperarbre enraciné *est un hyperarbre H avec un sommet distingué s de H. L'hyperarbre H est alors dit* enraciné en s *et s est appelée la* racine *de H.*

2.2 Hyperarbres décorés par des espèces

Nous rappelons la définition des espèces, introduites dans les années 1980 par A. Joyal.

Definition 5 *Une* espèce $\mathbb{F}$ *est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. À un ensemble fini I, l'espèce $\mathbb{F}$ associe un ensemble fini $\mathbb{F}(I)$ indépendent de la nature de I.*

Exemples :
- L'application qui a un ensemble fini I associe l'ensemble des ordres totaux sur I est une espèce, appelée l'espèce des listes et notée $\mathbb{L}$.
- L'application qui a un ensemble fini I associe l'ensemble $\{I\}$ est une espèce, appelée l'espèce des ensembles et notée $\mathbb{E}$.
- L'application qui a un ensemble fini I associe l'ensemble des cycles sur I est une espèce, appelée l'espèce des cycles et notée $\mathbb{C}$.

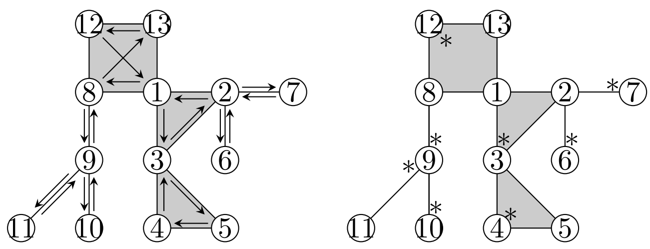

FIGURE 3 – Deux décorations du même hyperarbre H : par l'espèce des cycles (à gauche) et des ensembles pointés (à droite).

– L'application qui a un ensemble fini I associe l'ensemble I est une espèce, appelée l'espèce des ensembles pointés et notée $\mathbb{P}$.

Nous pouvons maintenant définir les hyperarbres décorés par une espèce.

Definition 6 *Etant donnée une espèce $\mathbb{F}$, un* hyperarbre (resp. enraciné) décoré *est obtenu à partir d'un hyperarbre (resp. enraciné) H en choisissant pour chaque arête e de H un élément de $\mathbb{F}(V_e)$, où V_e est l'ensemble des sommets de l'arête e.*

On note $\mathcal{H}_{\mathbb{F}}(n)$ l'ensemble des hyperarbres sur n sommets décorés par l'espèce $\mathbb{F}$, et $\mathcal{H}^p_{\mathbb{F}}(n)$ l'ensemble des hyperarbres sur n sommets enracinés décorés par l'espèce $\mathbb{F}$. Les séries génératrices associées sont :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{F}} := \sum_{n\geq 2} \#\mathcal{H}_{\mathbb{F}}(n)\frac{t^n}{n!} \text{ et } \mathcal{S}^p_{\mathbb{F}} := \sum_{n\geq 2} \#\mathcal{H}^p_{\mathbb{F}}(n)\frac{t^n}{n!}.$$

Il existe une définition équivalente des hyperarbres enracinés décorés, utilisant la notion de dérivation des espèces :

Definition 7 *Soit F une espèce. La dérivée de F est l'espèce définie par :*

$$F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\}).$$

Exemples :

– La dérivée de l'espèce des cycles $\mathbb{C}$ est l'espèce des listes $\mathbb{L}$.
– La dérivée de l'espèce des ensembles $\mathbb{E}$ est elle-même.
– La dérivée de l'espèce des ensembles pointés $\mathbb{P}$ est l'espèce $\mathbb{P}'$ telle que, pour tout ensemble fini I, l'ensemble $\mathbb{P}'(I)$ est l'ensemble $\mathbb{E}(I) \cup \mathbb{P}(I)$.

Toute arête d'un hyperarbre enraciné possède un sommet privilégié, le plus proche de la racine, que nous appelons *pétiole* de l'arête. L'utilisation des pétioles de l'hyperarbre permet de donner une définition équivalente d'un hyperarbre enraciné décoré comme suit :

Definition 8 *Soient H, un hyperarbre enraciné et $\mathbb{F}$, une espèce. Un hyperarbre décoré enraciné est obtenu à partir de H en choisissant pour chaque arête e de H un élément de l'ensemble $\mathbb{F}'\left(V^l_e\right)$, où V^l_e est l'ensemble des sommets de e différents de la pétiole.*

Les hyperarbres décorés enracinés et non enracinés sont reliés par la proposition suivante :

Proposition 1 *Les séries génératrices des hyperarbres et hyperarbres enracinés vérifient :*

$$\mathcal{S}^p_{\mathbb{F}}(t) = t * \mathcal{S}'_{\mathbb{F}}.$$

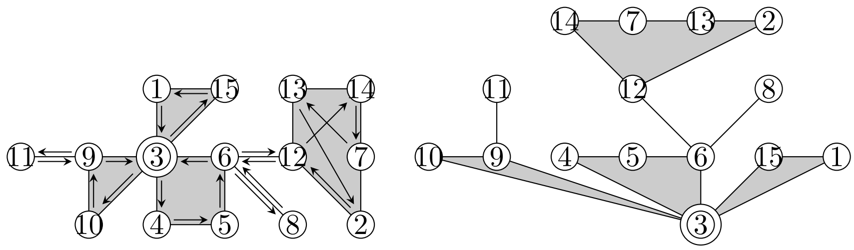

FIGURE 4 – Hyperarbre enraciné décoré par l'espèce des cycles. Les arêtes sont décorées par des cycles à gauche et les arêtes privées de leur pétiole sont décorées par des listes à droite.

3 Dénombrement des hyperarbres décorés à l'aide des arbres en boîtes

3.1 Arbres en boîtes

Considérons le quadruplet (L, V, R, E), où
- L est un ensemble fini, appelé ensemble d'*étiquettes*,
- V est une partition de L dont les parts sont appelées *sommets*,
- R est un sommet de V appelé *racine*,
- E est une application de $V - \{R\}$ dans L dont les couples $(v, E(v))$ sont appelés *arêtes*, pour tout sommet v.

Nous notons $\tilde{E}$, l'application de $V - \{R\}$ dans V qui associe à un sommet v associe le sommet v' contenant l'étiquette $E(v)$. Le couple $\left(V, \tilde{E}\right)$ est alors un graphe orienté, dont les sommets sont étiquetés par des sous-ensembles disjoints de L.

Definition 9 *Un quadruplet (L, V, R, E) est un* arbre en boîtes *si et seulement si le graphe $\left(V, \tilde{E}\right)$ est un arbre, enraciné en R, avec ses arêtes orientées vers la racine.*
Une étiquette l est le parent *d'un sommet v si $E(v) = l$.*

3.2 Lien entre hyperarbres décorés et arbres en boîtes

Proposition 2 *[3] Soit $\mathbb{F}$ une espèce, tout hyperarbre enraciné à k arêtes et n sommets, décorés par $\mathbb{F}$, peut se décomposer en un triplet $(r, \mathbf{S}, BT)$ où :*
- *r est la racine de l'hyperarbre,*
- *$\mathbf{S}$ est un ensemble de k ensembles sur $n-1$ sommets avec une $\mathbb{F}'$-structure sur chacun d'eux,*
- *et BT est un arbre en boîtes sur $k+1$ sommets dont la racine est étiquetée par r et tous les autres sommets sont étiquetés par l'un des k ensembles décrits au point précédent.*

3.3 Dénombrement les arbres en boîtes

Nous utilisons une variation de l'algorithme classique appelé "code de Prüfer" pour dénombrer les arbres en boîtes.

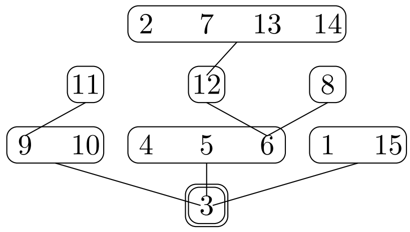

FIGURE 5 – arbre en boîtes associé, avec la racine 3 et l'ensemble de listes $\{(15,1), (14,7,13,2), (4,5,6), (8), (10,9), (11), (12)\}$ à l'hyperarbre de la figure 4.

Théorème 1 (Dénombrement des arbres en boîtes) *Soient k un entier naturel non nul, L un ensemble fini de cardinal n et V une partition de L en $k+1$ parties $p_0, p_1, \dots, p_k$, où chaque p_i est de cardinal n_i. Le nombre $N_{p_0;p_1,\dots,p_k}$ d'arbres en boîtes sur $k+1$ sommets, de racine p_0 et dont les k autres sommets sont étiquetés par l'un des autres p_i vérifie :*

$$N_{p_0;p_1,\dots,p_k} = n_0 \times n^{k-1}.$$

Preuve :: Etant donnés $p_0, p_1, \dots, p_k$ et un arbre en boîtes A, on définit récursivement un mot associé à l'arbre, de $L^{k-1} \times p_0$. Si l'arbre a deux sommets, le mot associé est le sommet de la racine étiquetée par p_0 auquel est attaché le sommet étiqueté par p_1. L'ensemble des mots possibles est donc l'ensemble p_0. Si $k \geq 2$, l'arbre en boîtes A a au moins une feuille différente de la racine. On considère p_{i_1} la feuille ayant la plus petite étiquette. Notant w le mot de $L^{k-2} \times p_0$ associé à l'arbre en boîtes obtenu en coupant p_{i_1} dans A, le mot associé à A sera le mot $E(p_{i_1})w$ de $L^{k-1} \times p_0$.
Etant donnés $p_0, p_1, \dots, p_k$ et un mot $w_1 w_2 \dots w_k$ de $L^{k-1} \times p_0$, on reconstruit un arbre en boîtes et on montre que cette construction est la réciproque de la précédente par récurrence. Si $k = 1$, il n'y a qu'un sommet à relier à la racine et le mot est une étiquette de la racine : on relie le sommet à cette étiquette w_1. On obtient alors un graphe enraciné sur deux sommets à une arête : c'est donc bien un arbre en boîtes. De plus, cette construction est l'inverse de la construction précédente. Soit $k \geq 2$, telle que la proposition soit vraie pour $k-1$. Considérons l'ensemble p_{e_j} des p_i dont aucune des étiquettes n'apparaît dans le mot. Ces p_{e_j} formeront les feuilles de l'arbre. Supposons que p_{e_1} possède la plus petite étiquette parmi les p_{e_j}. Alors, la donnée de $\{p_i\}_{i=0}^{k} - p_{e_1}$ et de $w_2 \dots w_k$ donne un arbre en boîtes de racine p_0. Reliant p_{e_1} à w_1 dans cet arbre, on obtient toujours un arbre en boîtes puisque l'arbre reste connexe et qu'on ne crée pas de cycles. De plus, p_{e_1} est la feuille avec la plus petite étiquette.
La construction est donc une bijection entre l'ensemble des arbres en boîtes sur $k+1$ sommets et l'ensemble des mots sur $L^{k-1} \times p_0$. $\square$
Soit $E_{\mathbb{F}}(k, n)$ le nombre d'ensembles de k ensembles sur n sommets avec une $\mathbb{F}'$-structure sur chacun d'eux. Par convention, $E_{\mathbb{F}}(1,1)$ vaut 1.
Nous obtenons alors :

Théorème 2 *Etant donnée une espèce $\mathbb{F}$, les séries génératrices des hyperarbres décorés et des hyperarbres décorés enracinés s'expriment :*

$$\mathcal{S}^p_{\mathbb{F}}(x) = x + \sum_{n \geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} E_{\mathbb{F}}(k, n-1)\, n^k \frac{x^n}{n!}, \tag{1}$$

et

$$\mathcal{S}_{\mathbb{F}}(x) = x + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1} E_{\mathbb{F}}(k, n-1)\, n^{k-1}\frac{x^n}{n!}. \tag{2}$$

Preuve :: D'après la bijection de la section précédente, le nombre d'arbres enracinés sur k arêtes et n sommets est donné par :

$$\left(\mathcal{S}^p_{\mathbb{F}}\right)_{n,k} = n \times E_{\mathbb{F}}(k, n-1)\, n^{k-1},$$

où il y a n façons de choisir la racine, $E_{\mathbb{F}}(k, n-1)$ façons de faire un ensemble de k ensembles sur les $n-1$ autres sommets avec une $\mathbb{F}'$-structure sur chacun d'eux et $1 \times n^{k-1}$ façons de les agencer en un arbre en boîtes à racine fixée. □

Exemples

- Soit $\mathbb{L}$ l'espèce des listes. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k listes est $\binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!}$. La série génératrice des hyperarbres décorés par l'espèce des cycles, dont la dérivée est l'espèce des listes, est donc :

$$\mathcal{S}^p_{\mathbb{L}}(x) = x + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1}\frac{(n-1)!}{k!} n^k \frac{x^n}{n!}.$$

- Soit $\mathbb{P}$ l'espèce des ensembles pointés. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k ensembles pointés est $\binom{n}{k} \times k^{n-k}$. La série génératrice des hyperarbres décorés par l'espèce dont la dérivée est l'espèce des ensembles pointés est donc :

$$\mathcal{S}^p_{\mathbb{P}}(x) = x + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} k^{n-1-k} n^k \frac{x^n}{n!}.$$

- Soit $\mathbb{E}$ l'espèce des ensembles. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k ensembles est $S(n,k)$, un nombre de Stirling de seconde espèce. La série génératrice des hyperarbres décorés par l'espèce des ensembles, dont la dérivée est elle-même, est donc :

$$\mathcal{S}^p_{\mathbb{E}}(x) = x + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)\, n^k \frac{x^n}{n!}.$$

  Ces hyperarbres décorés sont en bijection avec les hyperarbres non décorés. Cette formule a été prouvée pour la première fois par I. Gessel et L. Kalikow dans l'article [2].

Références

[1] C. Berge (1989), *Hypergraphs*, North-Holland Mathematical Library, North-Holland Publishing Co..

[2] I. Gessel et L. Kalikov (2005), Hypergraphs and a functional equation of Bouwkamp and de Bruijn, *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, **vol. 110** p. 275–289.

[3] B. Oger(2013), Decorated hypertrees, *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, **vol. 120** Issue 7.