Posets de partitions semi-pointées

Bérénice Delcroix-Oger

Institut Camille Jordan (Lyon)

Strasbourg, 15 Février 2015

Sommaire

Sommaire

Quelques rapides rappels d'hier !

- poset = partially ordered set

Quelques rapides rappels d'hier !

- poset = partially ordered set

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \{1\}\{2\}\{3\} \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\{1\}\{2, 3\} \arrow[dr, no head] & \{2\}\{1, 3\} \arrow[d, no head] & \{3\}\{1, 2\} \arrow[dl, no head] \\
 & \{1, 2, 3\} &
\end{tikzcd}$$

-

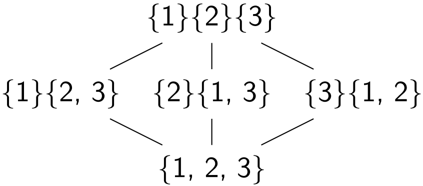
Fonction de Möbius et caractéristique d'Euler

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\begin{aligned} \mu(x,x) &= 1, & \forall x \in P \\ \mu(x,y) &= -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), & \forall x < y \in P. \end{aligned}$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$



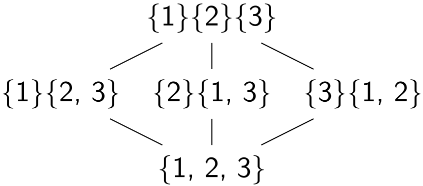
Fonction de Möbius et caractéristique d'Euler

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\mu(x,x) = 1, \qquad \forall x \in P$$
$$\mu(x,y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), \qquad \forall x < y \in P.$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$



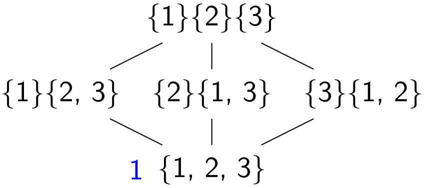
Fonction de Möbius et caractéristique d'Euler

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\begin{aligned}
\mu(x,x) &= 1, && \forall x \in P\\
\mu(x,y) &= -\sum_{x\leq z<y} \mu(x,z), && \forall x < y \in P.
\end{aligned}$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0},\hat{1})$



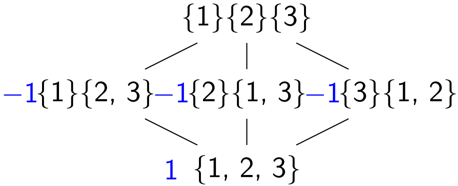
Fonction de Möbius et caractéristique d'Euler

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\begin{aligned} \mu(x,x) &= 1, & \forall x \in P \\ \mu(x,y) &= -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), & \forall x < y \in P. \end{aligned}$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$



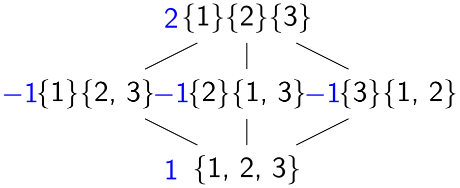
Fonction de Möbius et caractéristique d'Euler

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\begin{aligned} \mu(x,x) &= 1, && \forall x \in P \\ \mu(x,y) &= -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), && \forall x < y \in P. \end{aligned}$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$



Fonction de Möbius et caractéristique d'Euler

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\begin{aligned} \mu(x,x) &= 1, && \forall x \in P \\ \mu(x,y) &= -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), && \forall x < y \in P. \end{aligned}$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$

Nombre de Möbius $\rightarrow$ 2 $\{1\}\{2\}\{3\}$

-1 $\{1\}\{2, 3\}$ -1 $\{2\}\{1, 3\}$ -1 $\{3\}\{1, 2\}$

1 $\{1, 2, 3\}$

Homologie du poset

A chaque poset P, on peut associer une homologie.

Définition

Une k-chaîne stricte de P est un k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$ *tel que* $a_i < a_{i+1}$, $\forall i$.

Homologie du poset

A chaque poset P, on peut associer une homologie.

Définition

Une k-chaîne stricte de P est un k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$ tel que $a_i < a_{i+1}$, $\forall i$.

Soit C_k, l'espace vectoriel engendré par les $k+1$-chaînes strictes. On pose $C_{-1} = \mathbb{C}.e$. On munit l'ensemble $(C_k)_{k \geq -1}$ des bords :

$$\partial_k(a_1 \prec \ldots \prec a_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i (a_1 \prec \ldots \prec \hat{a}_i \prec \ldots \prec a_k),$$

$(a_1 \prec \ldots \prec a_{k+1}) \in C_k$. On a : $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$.

Homologie du poset

A chaque poset P, on peut associer une homologie.

Définition

Une k-chaîne stricte de P est un k-uplet $(a_1, \dots, a_k)$ tel que $a_i < a_{i+1}$, $\forall i$.

Soit C_k, l'espace vectoriel engendré par les $k+1$-chaînes strictes. On pose $C_{-1} = \mathbb{C}.e$. On munit l'ensemble $(C_k)_{k \geq -1}$ des bords :

$$\partial_k(a_1 \prec \dots \prec a_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i (a_1 \prec \dots \prec \hat{a}_i \prec \dots \prec a_k),$$

$(a_1 \prec \dots \prec a_{k+1}) \in C_k$. On a : $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$.
On définit l'homologie (réduite) du poset par :

$$\tilde{H}_j = ker\partial_j / im\partial_{j+1}.$$

Lien entre l'homologie du poset et son nombre de Möbius

Théorème (Hall, Stanley)

Le nombre de Möbius d'un poset et son homologie sont reliées par :

$$\mu(\widehat{P}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim \tilde{H}_j = \sum_{j \geq -1} (-1)^j \dim C_j,$$

où $\widehat{P}$ est le poset obtenu en rajoutant un minimum et un maximum à P.

Lien entre l'homologie du poset et son nombre de Möbius

Théorème (Hall, Stanley)

Le nombre de Möbius d'un poset et son homologie sont reliées par :

$$\mu(\widehat{P}) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim \tilde{H}_j = \sum_{j\geq -1}(-1)^j \dim C_j,$$

où $\widehat{P}$ est le poset obtenu en rajoutant un minimum et un maximum à P.

Définition

Un poset est Cohen-Macaulay si son homologie est concentrée en degré maximal (homotope à un bouquet de sphères).

Lien entre l'homologie du poset et son nombre de Möbius

Théorème (Hall, Stanley)

Le nombre de Möbius d'un poset et son homologie sont reliées par :

$$\mu(\widehat{P}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim \tilde{H}_j = \sum_{j \geq -1} (-1)^j \dim C_j,$$

où $\widehat{P}$ est le poset obtenu en rajoutant un minimum et un maximum à P.

Définition

Un poset est Cohen-Macaulay si son homologie est concentrée en degré maximal (homotope à un bouquet de sphères).

On obtient :

$$\mu(\widehat{P}) = (-1)^k \dim \tilde{H}_k = \sum_{j \geq -1} (-1)^j \dim C_j.$$

Partitions

Définition

Une partition d'un ensemble I est un ensemble de parties non vides de I deux à deux disjointes et qui recouvrent I.

Ensemble des partitions de $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

$$\{1\}\{2, 3, 4\}, \{2\}\{1, 3, 4\}, \{3\}\{1, 2, 4\}, \{4\}\{1, 2, 3\}$$

$$\{1, 2\}\{3, 4\}, \{1, 3\}\{2, 4\}, \{1, 4\}\{2, 3\}$$

$$\{1, 2\}\{3\}\{4\}, \{1, 3\}\{2\}\{4\}, \{1, 4\}\{2\}\{3\},$$

$$\{2, 3\}\{1\}\{4\}, \{2, 4\}\{1\}\{3\}, \{3, 4\}\{1\}\{2\}$$

$$\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}$$

Un ordre partiel sur les partitions

Soit n, un entier naturel,

Définition

Le poset des partitions sur n éléments Π_n est le poset dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des partitions de n muni de l'ordre partiel suivant : $p_1 \leq p_2 \iff$ toute part de p_1 est union de parts de p_2

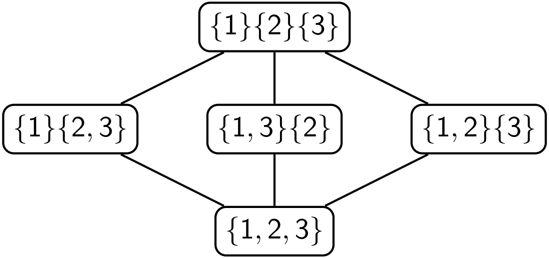


Figure: Le poset Π_3

Proposition

Les posets de partitions sont Cohen-Macaulay.

Proposition

Les posets de partitions sont Cohen-Macaulay.

Le nombre de Möbius du poset des partitions sur n éléments est donné par :

$$(-1)^{n-1}(n-1)!$$

Partitions pointées

Définition

Proposition

Les posets de partitions sont Cohen-Macaulay.

Partitions semi-pointées

Définition

Une partition semi-pointée est une partition sur un ensemble de "pointable" (•) et un ensemble de "non pointable" (•) vérifiant :

Partitions semi-pointées

Définition

Une partition semi-pointée est une partition sur un ensemble de "pointable" (•) et un ensemble de "non pointable" (•) vérifiant :

$\{\bullet\ \bullet\ \bullet\} \quad \rightarrow$ ■ *(pointée en un pointable)*

$\{\bullet\ \bullet\ \bullet\} \quad \rightarrow$ ■ *(pointée en un pointable)* ou ■ *(non pointée)*

$\{\bullet\ \bullet\} \quad \rightarrow$ ■ *(non pointée)*

Partitions semi-pointées

$$\begin{array}{c} 1,\ 2,\ 3 \\ \downarrow \\ \{\dot{1},2,3\} \\ \{1,\dot{2},3\} \\ \{1,2,\dot{3}\} \\ \{\dot{1},2\}\{\dot{3}\} \\ \{\dot{1}\}\{\dot{2},3\} \\ \{\dot{1}\}\{\dot{2}\}\{\dot{3}\} \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ \downarrow \\ \{\dot{1},2,3,4\} \\ \{1,\dot{2},3,4\} \\ \{1,2,3,4\} \\ \{1,\dot{2}\}\{3,4\} \\ \{\dot{2},4\}\{\dot{1},3\} \\ \{2,4\}\ \{1,3\} \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1,\ 2 \\ \downarrow \\ \{1,2\} \\ \{1\}\ \{2\} \end{array}$$

Partitions non pointées, pointées et semi-pointées

Série génératrice des partitions semi-pointées :

$$\sum_{x,y\geq 0} \#PSP_{\ell,p} \frac{x^{\ell} y^{p}}{\ell! p!} = \exp\left((x+1)e^{x+y} - e^{x}\right) - 1$$

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	5	15	52
1	1	3	8	25	89	354
2	3	10	35	133	552	2493
3	10	41	173	768	3637	
4	41	196	953	4815		
5	196	1057	5785			
6	1057	6322				
7	6322					

30

Partitions non pointées, pointées et semi-pointées

Série génératrice des partitions semi-pointées :

$$\sum_{x,y\geq 0} \#PSP_{\ell,p} \frac{x^{\ell} y^{p}}{\ell! p!} = \exp\left((x+1)e^{x+y} - e^{x}\right) - 1$$

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	5	15	52
1	1	3	8	25	89	354
2	3	10	35	133	552	2493
3	10	41	173	768	3637	
4	41	196	953	4815		
5	196	1057	5785			
6	1057	6322				
7	6322					

$\rightarrow$ Nombres de Bell (ligne 0)

Un ordre sur les partitions semi-pointées

Définition

Le poset des partitions semi-pointées sur un ensemble de "pointable" de taille ℓ et un ensemble de "non pointable" de taille p est l'ensemble des partitions semi-pointées sur ces deux ensembles, muni de l'ordre partiel suivant :

$$p_1 \leq p_2 \Longleftrightarrow \text{toute part de } p_1 \text{ est union de parts de } p_2$$

Un ordre sur les partitions semi-pointées

Définition

Le poset des partitions semi-pointées sur un ensemble de "pointable" de taille ℓ et un ensemble de "non pointable" de taille p est l'ensemble des partitions semi-pointées sur ces deux ensembles, muni de l'ordre partiel suivant :

$$p_1 \leq p_2 \iff \text{toute part de } p_1 \text{ est union de parts de } p_2$$

Et si

Un ordre sur les partitions semi-pointées

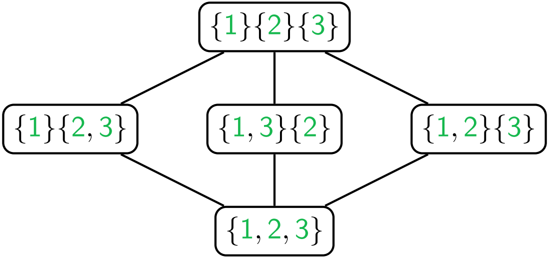
Définition

Le poset des partitions semi-pointées sur un ensemble de "pointable" de taille ℓ et un ensemble de "non pointable" de taille p est l'ensemble des partitions semi-pointées sur ces deux ensembles, muni de l'ordre partiel suivant :

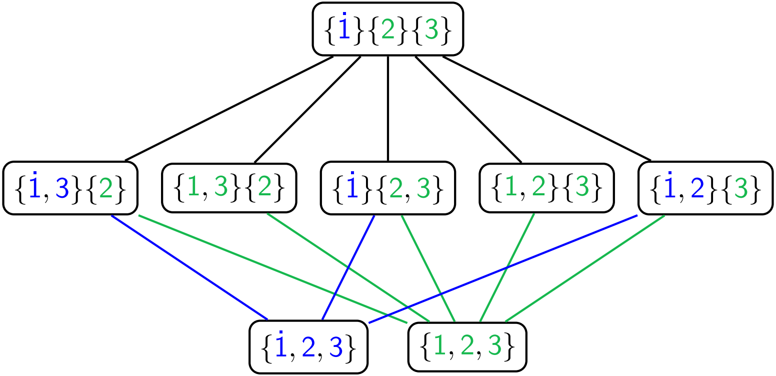
$$p_1 \leq p_2 \Longleftrightarrow \textit{toute part de } p_1 \textit{ est union de parts de } p_2$$

Et si une part de p_1 est pointée en un élément x seulement si l'élément x était pointé dans une part de p_2.

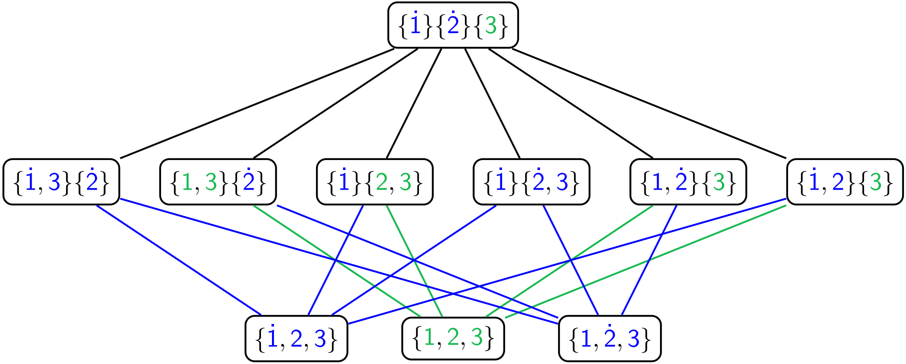
Poset des partitions semi-pointées $\Pi_3 = \Pi_{3,0}$



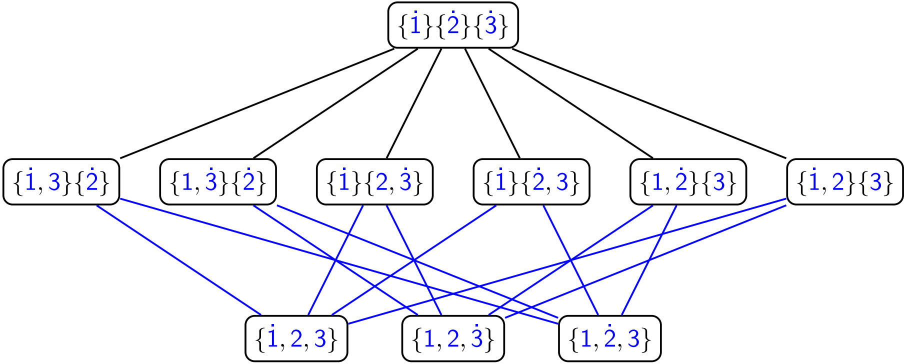
Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{2,1}$



Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{1,2}$



Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{0,3}$



Proposition (D.O.)

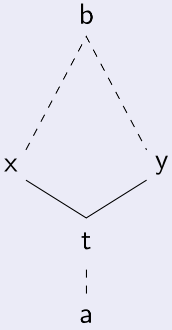
Ces posets sont Cohen-Macaulay.

Proposition (D.O.)

Ces posets sont Cohen-Macaulay.

Démonstration.

Par semi-modularité totale (Pour tout intervalle [a,b] du poset et tous x,y,t de [a,b] tels que x et y couvrent t, il existe z de [a,b] couvrant x et y.)

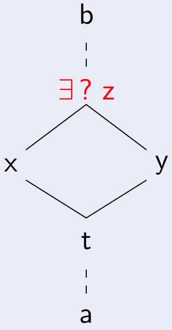


Proposition (D.O.)

Ces posets sont Cohen-Macaulay.

Démonstration.

Par semi-modularité totale (Pour tout intervalle [a,b] du poset et tous x,y,t de [a,b] tels que x et y couvrent t, il existe z de [a,b] couvrant x et y.)



Proposition (D.O.)

Ces posets sont Cohen-Macaulay.

Démonstration.

Par semi-modularité totale (Pour tout intervalle [a,b] du poset et tous x,y,t de [a,b] tels que x et y couvrent t, il existe z de [a,b] couvrant x et y.) □

But :

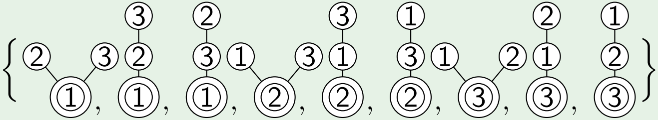
Quels sont les nombres de Möbius du poset ?

1 Nombres de Möbius et posets de partitions semi-pointées

2 Les espèces à la rescousse !

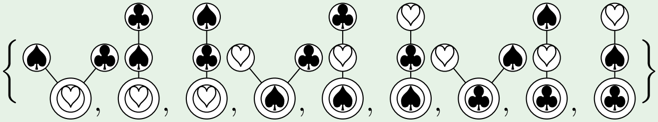
- Notre outil : les espèces (sur deux ensembles)
- Relations entre espèces
- Nombres de Möbius des posets de partitions semi-pointées
- Pourquoi tout ça ?

Exemples

- $\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$ (espèce $\mathbb{L}$ des listes sur $\{1,2,3\}$)
- $\{\{1,2,3\}\}$ (espèce des ensembles $\mathbb{E}$)
- $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ (espèce des ensembles pointés $\mathbb{P}$)
- 
 (espèce des arbres enracinés $\mathbb{A}$)

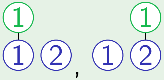
Ces ensembles sont les images par des espèces de $\{1,2,3\}$.

Exemples

- $\{(\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit), (\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit), (\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit), (\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit), (\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit), (\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit)\}$ (espèce $\mathbb{L}$ des listes sur $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$)
- $\{\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}\}$ (espèce des ensembles $\mathbb{E}$)
- $\{\{\heartsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\clubsuit\}\}$ (espèce des ensembles pointés $\mathbb{P}$)
-  (espèce des arbres enracinés $\mathbb{A}$)

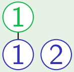
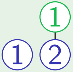
Ces ensembles sont les images par des espèces de $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$.

Exemples

- $\{\{1, 1, 2\}\}$(espèce des ensembles 2-colorés $\mathbb{E}^2$)
- $\{$  $\}$(espèce des forêts de d'arbres à racines bleues et autres sommets verts $\mathbb{C}^{\bullet}_{\bullet}$)

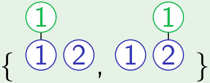
Ces ensembles sont les images par des espèces de $\{1, 2\}$ et $\{1\}$.

Exemples

- $\{\{1, 1, 2\}\}$(espèce des ensembles 2-colorés $\mathbb{E}^2$)
- $\{$ ,  $\}$(espèce des forêts de d'arbres à racines bleues et autres sommets verts $\mathbb{C}_{\bullet}^{\bullet}$)
- $\{\{(1, 2);\ 1\},\ \{(2, 1);\ 1\}\}$ (espèce des listes sur $\bullet$ et cycles sur $\bullet$)

Ces ensembles sont les images par des espèces de $\{1, 2\}$ et $\{1\}$.

Exemples

- $\{\{1, 1, 2\}\}$(espèce des ensembles 2-colorés $\mathbb{E}^2$)
- (espèce des forêts de d'arbres à racines bleues et autres sommets verts $\mathbb{C}^{\bullet}_{\bullet}$)
- $\{\{(1, 2);\ 1 \circlearrowleft\}, \{(2, 1);\ 1 \circlearrowleft\}\}$ (espèce des listes sur • et cycles sur •)
- $\{\{\bar{1}, 2, 1\}, \{1, \bar{2}, 1\}, \{1, 2, 1\}, \{1\}\{\bar{1}, 2\}, \{1\}\{1, \bar{2}\}, \{\bar{1}\}\{1, 2\}, \{\bar{1}\}\{1, \bar{2}\}, \{\bar{2}\}\{1, 1\}, \{\bar{2}\}\{1, \bar{1}\}, \{1\}\{\bar{1}\}\{\bar{2}\}\}$(espèce des partitions semi-pointées $\mathbb{PSP}$)

Ces ensembles sont les images par des espèces de $\{1, 2\}$ et $\{1\}$.

Qu'est-ce qu'une espèce ?

Définition

A deux ensembles finis I et J, l'espèce F associe un ensemble fini $\mathrm{F}(I, J)$ indépendant de la nature de I et de J.

Qu'est-ce qu'une espèce ?

Définition

A deux ensembles finis I et J, l'espèce F *associe un ensemble fini* $\mathrm{F}(I, J)$ *indépendant de la nature de I et de J.*

Contre-exemple

L'ensemble suivant ne peut **pas** être obtenu comme l'image d'un ensemble par une espèce : $\{\{1,1,2\},\{1,1,2\},\{1,2,1\}\}$ (ensemble des produits de mélange entre $\{1,2\}$ et $\{1\}$)

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées :

- $(F+G)(I,J) = F(I,J) \sqcup G(I,J)$, (addition)

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées :

- $(F + G)(I, J) = F(I, J) \sqcup G(I, J)$, (addition)
- $(F \times G)(I, J) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} \sum_{J_1 \sqcup J_2 = J} F(I_1, J_1) \times G(I_2, J_2)$, (produit)

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées :

- $(F+G)(I,J) = F(I,J) \sqcup G(I,J)$, (addition)
- $(F \times G)(I,J) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} \sum_{J_1 \sqcup J_2 = J} F(I_1, J_1) \times G(I_2, J_2)$, (produit)
- Si $G(\emptyset, \emptyset) = \emptyset$, $(\mathbb{E} \circ G)(I,J) = \bigsqcup_{\pi \in \mathcal{P}(I \cup J)} \prod_{p \in \pi} G(p \cap I, p \cap J)$, (substitution) où $\mathcal{P}(I \cup J)$ est l'ensemble des partitions de $I \cup J$.

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées :

- $(F+G)(I,J) = F(I,J) \sqcup G(I,J)$, (addition)
- $(F \times G)(I,J) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} \sum_{J_1 \sqcup J_2 = J} F(I_1,J_1) \times G(I_2,J_2)$, (produit)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- Si $G(\emptyset,\emptyset) = \emptyset$, $(\mathbb{E} \circ G)(I,J) = \bigsqcup_{\pi \in \mathcal{P}(I \cup J)} \prod_{p \in \pi} G(p \cap I, p \cap J)$, (substitution) où $\mathcal{P}(I \cup J)$ est l'ensemble des partitions de $I \cup J$.

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées :

- $(F+G)(I,J) = F(I,J) \sqcup G(I,J)$, (addition)
- $(F \times G)(I,J) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} \sum_{J_1 \sqcup J_2 = J} F(I_1, J_1) \times G(I_2, J_2)$, (produit)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- Si $G(\emptyset, \emptyset) = \emptyset$, $(\mathbb{E} \circ G)(I,J) = \bigsqcup_{\pi \in \mathcal{P}(I \cup J)} \prod_{p \in \pi} G(p \cap I, p \cap J)$, (substitution) où $\mathcal{P}(I \cup J)$ est l'ensemble des partitions de $I \cup J$.

Exemple de substitution : Ensembles d'ensembles 2-colorés $(\mathbb{E} \circ \mathbb{E}^2)$ sur $\{1, 2\}$ et $\{1\}$.

Avec la décomposition $\{1, 2, 1\}$:

$\{\{\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$,

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées :

- $(F+G)(I,J) = F(I,J) \sqcup G(I,J)$, (addition)
- $(F \times G)(I,J) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} \sum_{J_1 \sqcup J_2 = J} F(I_1, J_1) \times G(I_2, J_2)$, (produit)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- Si $G(\emptyset, \emptyset) = \emptyset$, $(\mathbb{E} \circ G)(I,J) = \bigsqcup_{\pi \in \mathcal{P}(I \cup J)} \prod_{p \in \pi} G(p \cap I, p \cap J)$, (substitution) où $\mathcal{P}(I \cup J)$ est l'ensemble des partitions de $I \cup J$.

Exemple de substitution : Ensembles d'ensembles 2-colorés $(\mathbb{E} \circ \mathbb{E}^2)$ sur $\{1,2\}$ et $\{1\}$.

Avec la décomposition en deux parts :

$\{\{1,1,2\}, \{1, 2\}\ \{1\}, \{1, 1\}\ \{2\}, \{1\}\ \{1, 2\},$

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées :

- $(F+G)(I,J) = F(I,J) \sqcup G(I,J)$, (addition)
- $(F \times G)(I,J) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} \sum_{J_1 \sqcup J_2 = J} F(I_1,J_1) \times G(I_2,J_2)$, (produit)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- Si $G(\emptyset,\emptyset) = \emptyset$, $(\mathbb{E} \circ G)(I,J) = \bigsqcup_{\pi \in \mathcal{P}(I \cup J)} \prod_{p \in \pi} G(p \cap I, p \cap J)$, (substitution) où $\mathcal{P}(I \cup J)$ est l'ensemble des partitions de $I \cup J$.

Exemple de substitution : Ensembles d'ensembles 2-colorés ($\mathbb{E} \circ \mathbb{E}^2$) sur $\{1,2\}$ et $\{1\}$.

Avec la décomposition en trois parts :

$\{\{1,1,2\},\{1,2\}\{1\},\{1,1\}\{2\},\{1\}\{1,2\},\mathbf{\{1\}\ \{1\}\ \{\ 2\}}\}$

Définition

À une espèce F, on associe sa série génératrice :

$$C_F(x,y) = \sum_{\ell,p\geq 0} \#F(\{1,\ldots,\ell\},\{1,\ldots,p\})\frac{x^\ell y^p}{\ell!p!}.$$

Définition

À une espèce F, on associe sa série génératrice :

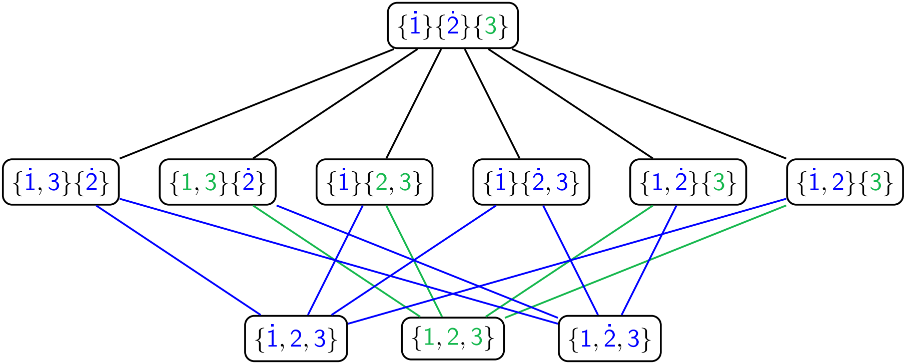
$$C_F(x,y) = \sum_{\ell,p\geq 0} \#F(\{1,\ldots,\ell\},\{1,\ldots,p\})\frac{x^\ell y^p}{\ell!p!}.$$

Exemples de séries génératrices :

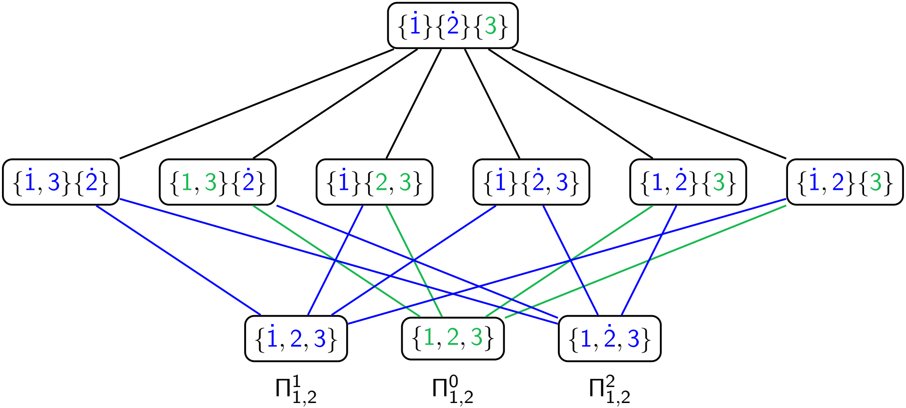
- La série génératrice de l'espèce des ensembles 2-colorés est : $C_{\mathbb{E}^2} = \exp(x+y)$.
- La série génératrice de l'espèce des listes sur bleu et cycles sur vert est $\frac{1}{1-x} \times -\ln(1-y)$.

15

Rappelons-nous la section précédente !



Rappelons-nous la section précédente !



Rappelons-nous la section précédente !

Définition

Une k-chaîne stricte de $\Pi_{p,\ell}^{\theta}$ *est un k-uplet* $(a_1, \ldots, a_k)$, $a_i < a_{i+1}$, $a_1 \neq \hat{0}$ *et* $a_n \neq \hat{1}$.

Rappelons-nous la section précédente !

Définition

Une k-chaîne stricte de $\Pi_{p,\ell}^{\theta}$ est un k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$, $a_i < a_{i+1}$, $a_1 \neq \hat{0}$ et $a_n \neq \hat{1}$.

$$\mu(\Pi_{p,\ell}^{\theta}) = (-1)^k \dim \tilde{H}_k(\Pi_{p,\ell}^{\overline{\theta}}) = \sum_{j \geq 0} (-1)^{j-1} \# CS_{p,\ell}^{\theta}(j)$$

Rappelons-nous la section précédente !

Définition

Une k-chaîne stricte de $\Pi_{p,\ell}^{\theta}$ est un k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$, $a_i < a_{i+1}$, $a_1 \neq \hat{0}$ et $a_n \neq \hat{1}$.

$$\mu(\Pi_{p,\ell}^{\theta}) = (-1)^k \dim \tilde{H}_k(\Pi_{p,\ell}^{\overline{\theta}}) = \sum_{j \geq 0} (-1)^{j-1} \# CS_{p,\ell}^{\theta}(j)$$

$$\sum_{\theta} \mu(\Pi_{p,\ell}^{\theta}) = \sum_{\theta} (-1)^k \dim \tilde{H}_k(\Pi_{p,\ell}^{\overline{\theta}}) = \sum_{\theta} \sum_{j \geq 0} (-1)^{j-1} \# CS_j(\Pi_{p,\ell}^{\overline{\theta}}).$$

Compter les chaînes strictes à l'aide de chaînes larges

Définition

Une k-chaîne large de partitions semi-pointées de $\Pi_{p,\ell}^{\theta}$ est un k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$, où $a_i \preceq a_{i+1}$.

Compter les chaînes strictes à l'aide de chaînes larges

Définition

Une k-chaîne large de partitions semi-pointées de $\Pi_{p,\ell}^{\theta}$ est un k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$, où $a_i \preceq a_{i+1}$.

Soit $M_{k,s}$ l'ensemble des mots sur $\{0, 1\}$ de longueur k, contenant s lettres "1". L'espèce $\mathcal{M}_{k,s}$ est définie par :

$$\begin{cases} (\emptyset, \emptyset) & \mapsto & M_{k,s}, \\ (U, V) \neq (\emptyset, \emptyset) & \mapsto & \emptyset. \end{cases}$$

Compter les chaînes strictes à l'aide de chaînes larges

Définition

Une k-chaîne large de partitions semi-pointées de $\Pi_{p,\ell}^{\theta}$ est un k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$, où $a_i \preceq a_{i+1}$.

Soit $M_{k,s}$ l'ensemble des mots sur $\{0,1\}$ de longueur k, contenant s lettres "1". L'espèce $\mathcal{M}_{k,s}$ est définie par :

$$\begin{cases} (\emptyset,\emptyset) & \mapsto & M_{k,s}, \\ (U,V) \neq (\emptyset,\emptyset) & \mapsto & \emptyset. \end{cases}$$

Dans $\Pi_{p,\ell}^{\theta}$

Proposition

Les espèces $\mathcal{CL}_k$ des k-chaînes larges et $\mathcal{CS}_i$ des i-chaînes strictes sont reliées par : $\mathcal{CL}_k \cong \sum_{i\geq 1} \mathcal{CS}_{i-1} \times \mathcal{M}_{k,i} + \sum_{i\geq 0} \mathcal{CS}_i \times \mathcal{M}_{k,i}$.

Proposition

Les espèces $\mathcal{CL}_k$ des k-chaînes larges et $\mathcal{CS}_i$ des i-chaînes strictes sont reliées par :

$$\mathcal{CL}_k \cong \sum_{i \geq 1} \mathcal{CS}_{i-1} \times \mathcal{M}_{k,i} + \sum_{i \geq 0} \mathcal{CS}_i \times \mathcal{M}_{k,i}.$$

Démonstration.

chaîne sans répétition et sans minimum,

de longueur s

Elimination des répétitions

$\boxed{(a_{i_1}, \ldots, a_{i_s})}$

$\boxed{(a_1, \ldots, a_k)}$

$u_j = 0$ si $a_j = a_{j-1}$, 1 sinon

$\boxed{(u_1, \ldots, u_k)}$

mot de longueur k avec s 1

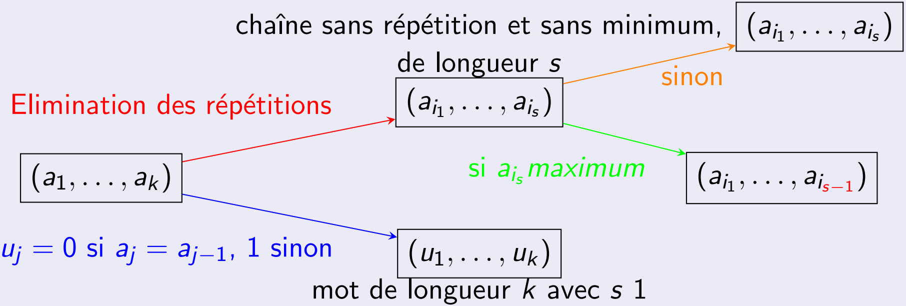
en posant $a_0 = \hat{0}$.

Proposition

Les espèces $\mathcal{CL}_k$ des k-chaînes larges et $\mathcal{CS}_i$ des i-chaînes strictes sont reliées par :

$$\mathcal{CL}_k \cong \sum_{i\geq 1} \mathcal{CS}_{i-1} \times \mathcal{M}_{k,i} + \sum_{i \geq 0} \mathcal{CS}_i \times \mathcal{M}_{k,i}.$$

Démonstration.



en posant $a_0 = \hat{0}$.

La proposition précédente donne, pour tout entier naturel k :

$$\# CL_k = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{k}{i} \# CS_{i-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{k}{i} \# CS_i .$$

La proposition précédente donne, pour tout entier naturel k :

$$\#CL_k = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{k}{i} \#CS_{i-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{k}{i} \#CS_i.$$

Le nombre de k-chaînes larges est donc un polynôme $P(k)$ en k qui donne, évalué en -2, les nombres de Möbius voulus :

Corollaire

$$\mu(\Pi^{\theta}_{p,\ell}) = P(-2)$$

Nous notons $\mathcal{C}_k^l$ l'espèce associée aux chaînes larges des posets $\Pi_{p,\ell}^{\theta}$.

La somme des nombres de Möbius des posets est donc donnée par $\mathbf{C}^l_{-2}$.

Nous notons $\mathcal{C}_k^l$ l'espèce associée aux chaînes larges des posets $\Pi_{p,\ell}^{\theta}$.

La somme des nombres de Möbius des posets est donc donnée par $\mathbf{C}^l_{-2}$.

Remarque : Une k-chaîne large de $\Pi_{p,\ell}^{\theta}$ pour $\theta \in \{0, \ldots, \ell\}$ est équivalente à une $k+1$-chaîne large dans $\Pi_{p,\ell}$ dont le minimum est en une part.
Nous notons de plus :

- $\mathcal{C}_k^{\bullet}$, l'espèce des chaînes larges de $\Pi_{p,\ell}$ dont le minimum est en une part pointée,
- $\mathcal{C}_k^{\times}$, l'espèce des chaînes larges de $\Pi_{p,\ell}$ dont le minimum est en une part non pointée.

Nous notons $\mathcal{C}_k^l$ l'espèce associée aux chaînes larges des posets $\Pi_{p,\ell}^\theta$.

La somme des nombres de Möbius des posets est donc donnée par $\mathbf{C}^l_{-2}$.

Remarque : Une k-chaîne large de $\Pi_{p,\ell}^\theta$ pour $\theta \in \{0, \dots, \ell\}$ est équivalente à une $k+1$-chaîne large dans $\Pi_{p,\ell}$ dont le minimum est en une part.
Nous notons de plus :

- $\mathcal{C}_k^\bullet$, l'espèce des chaînes larges de $\Pi_{p,\ell}$ dont le minimum est en une part pointée,
- $\mathcal{C}_k^\times$, l'espèce des chaînes larges de $\Pi_{p,\ell}$ dont le minimum est en une part non pointée.

Nous allons calculer $\sum_\theta \mu(\Pi_{p,\ell}^\theta)$.

Relations entre espèces

Proposition

Les espèces $\mathcal{C}_k^{\bullet}$, $\mathcal{C}_k^{\times}$ et $\mathcal{C}_k^{l}$ sont reliées par les relations suivantes :

$$\mathcal{C}_{k-1}^{l} = \mathcal{C}_k^{\bullet} + \mathcal{C}_k^{\times}.$$

$$\mathcal{C}_k^{\bullet} = \mathcal{C}_{k-1}^{\bullet} \cdot \mathbb{E} \circ \left(\mathcal{C}_{k-1}^{\bullet} + \mathcal{C}_{k-1}^{\times} \right),$$

$$\mathcal{C}_k^{\times} = \mathbb{E} \circ \mathcal{C}_{k-1}^{\times} \cdot \mathbb{E} \circ \mathcal{C}_{k-1}^{\bullet} - \mathbb{E} \circ \mathcal{C}_{k-1}^{\bullet},$$

Démonstration.

-

□

Relations entre espèces

Proposition

Les espèces $\mathcal{C}_k^{\bullet}$, $\mathcal{C}_k^{\times}$ et $\mathcal{C}_k^{l}$ sont reliées par les relations suivantes :

$$\mathcal{C}_{k-1}^{l} = \mathcal{C}_k^{\bullet} + \mathcal{C}_k^{\times}.$$

$$\mathcal{C}_k^{\bullet} = \mathcal{C}_{k-1}^{\bullet} \cdot \mathbb{E} \circ \left(\mathcal{C}_{k-1}^{\bullet} + \mathcal{C}_{k-1}^{\times} \right),$$

$$\mathcal{C}_k^{\times} = \mathbb{E} \circ \mathcal{C}_{k-1}^{\times} \cdot \mathbb{E} \circ \mathcal{C}_{k-1}^{\bullet} - \mathbb{E} \circ \mathcal{C}_{k-1}^{\bullet},$$

Démonstration.

- Cette égalité vient de la remarque précédente.

□

Relations entre espèces

Proposition

Les espèces $\mathcal{C}_k^\bullet$, $\mathcal{C}_k^\times$ et $\mathcal{C}_k^l$ sont reliées par les relations suivantes :

$$\mathcal{C}_{k-1}^l = \mathcal{C}_k^\bullet + \mathcal{C}_k^\times .$$

$$\mathcal{C}_k^\bullet = \mathcal{C}_{k-1}^\bullet \cdot \mathbb{E} \circ \left(\mathcal{C}_{k-1}^\bullet + \mathcal{C}_{k-1}^\times \right),$$

$$\mathcal{C}_k^\times = \mathbb{E} \circ \mathcal{C}_{k-1}^\times \cdot \mathbb{E} \circ \mathcal{C}_{k-1}^\bullet - \mathbb{E} \circ \mathcal{C}_{k-1}^\bullet ,$$

Démonstration.

- Notons $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$ une k-chaîne dont le minimum est en une part pointée. Le pointage de a_1 est issue d'une part pointée de a_2. La décomposition s'effectue ensuite selon les parts de a_2.

$\square$

Relations entre espèces

Proposition

Les espèces $\mathcal{C}_k^\bullet$, $\mathcal{C}_k^\times$ et $\mathcal{C}_k^l$ sont reliées par les relations suivantes :

$$\mathcal{C}_{k-1}^l = \mathcal{C}_k^\bullet + \mathcal{C}_k^\times.$$

$$\mathcal{C}_k^\bullet = \mathcal{C}_{k-1}^\bullet \cdot \mathbb{E} \circ \left(\mathcal{C}_{k-1}^\bullet + \mathcal{C}_{k-1}^\times\right),$$

$$\mathcal{C}_k^\times = \mathbb{E} \circ \mathcal{C}_{k-1}^\times \cdot \mathbb{E} \circ \mathcal{C}_{k-1}^\bullet - \mathbb{E} \circ \mathcal{C}_{k-1}^\bullet,$$

Démonstration.

- Notons $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$ une k-chaîne dont le minimum est en une part non pointée. a_2 doit alors avoir au moins une part non pointée. La décomposition s'effectue ensuite selon les parts de a_2.

$\square$

Application : Calcul des nombres de Möbius

Proposition

Pour tout entier relatif k, les séries génératrices $\mathbf{C}_k^{\bullet}$, $\mathbf{C}_k^{\times}$ et $\mathbf{C}_k^{l}$ vérifient les relations suivantes :

$$\mathbf{C}_k^{\bullet} = \mathbf{C}_{k-1}^{\bullet} \times e^{\mathbf{C}_{k-1}^{\bullet} + \mathbf{C}_{k-1}^{\times}},$$

$$\mathbf{C}_k^{\times} = e^{\mathbf{C}_{k-1}^{\bullet}} \left(e^{\mathbf{C}_{k-1}^{\times}} - 1 \right),$$

$$\mathbf{C}_{k-1}^{l} = \mathbf{C}_k^{\bullet} + \mathbf{C}_k^{\times}.$$

Application : Calcul des nombres de Möbius

Proposition

Pour tout entier relatif k, les séries génératrices $\mathbf{C}_k^{\bullet}$, $\mathbf{C}_k^{\times}$ et $\mathbf{C}_k^{l}$ vérifient les relations suivantes :

$$\mathbf{C}_k^{\bullet} = \mathbf{C}_{k-1}^{\bullet} \times e^{\mathbf{C}_{k-1}^{\bullet} + \mathbf{C}_{k-1}^{\times}},$$

$$\mathbf{C}_k^{\times} = e^{\mathbf{C}_{k-1}^{\bullet}} \left(e^{\mathbf{C}_{k-1}^{\times}} - 1 \right),$$

$$\mathbf{C}_{k-1}^{l} = \mathbf{C}_k^{\bullet} + \mathbf{C}_k^{\times}.$$

Avec les conditions initiales :

$$\mathbf{C}_1^{\bullet} = xe^{x+y} \text{ et } \mathbf{C}_1^{\times} = e^{x+y} - e^{x}.$$

Application : Calcul des nombres de Möbius

Proposition

Pour tout entier relatif k, les séries génératrices $\mathbf{C}_k^\bullet$, $\mathbf{C}_k^\times$ et $\mathbf{C}_k^l$ vérifient les relations suivantes :

$$\mathbf{C}_k^\bullet = \mathbf{C}_{k-1}^\bullet \times e^{\mathbf{C}_{k-1}^\bullet + \mathbf{C}_{k-1}^\times},$$

$$\mathbf{C}_k^\times = e^{\mathbf{C}_{k-1}^\bullet}\left(e^{\mathbf{C}_{k-1}^\times} - 1\right),$$

$$\mathbf{C}_{k-1}^l = \mathbf{C}_k^\bullet + \mathbf{C}_k^\times.$$

Avec les conditions initiales :

$$\mathbf{C}_1^\bullet = xe^{x+y} \text{ et } \mathbf{C}_1^\times = e^{x+y} - e^x.$$

Nous obtenons l'équation fonctionnelle

$$x = \mathbf{C}_{-1}^\bullet\left(y + e^{\mathbf{C}_{-1}^\bullet}\right).$$

Les nombres de Möbius

Théorème (D.O.)

Pour un ensemble de "pointable" de taille ℓ et de "non-pointable" de taille p, Le coefficient $\frac{x^\ell y^p}{\ell! p!}$ dand la série $\mathbf{C}^\bullet_{-1}$ est donné par :

Les nombres de Möbius

Théorème (D.O.)

Pour un ensemble de "pointable" de taille ℓ et de "non-pointable" de taille p, Le coefficient $\frac{x^\ell y^p}{\ell! p!}$ dand la série $\mathbf{C}^\bullet_{-1}$ est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!}(\ell+p)^{\ell-1}$$

Les nombres de Möbius

Théorème (D.O.)

Pour un ensemble de "pointable" de taille ℓ et de "non-pointable" de taille p, Le coefficient $\frac{x^\ell y^p}{\ell! p!}$ dand la série $\mathbf{C}^\bullet_{-1}$ est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!}(\ell+p)^{\ell-1}$$

La somme des nombres de Möbius des intervalles maximaux du poset $\Pi_{p,\ell}$ est donné par les coefficients de $\mathbf{C}^{l}_{-2}$:

Les nombres de Möbius

Théorème (D.O.)

Pour un ensemble de "pointable" de taille ℓ et de "non-pointable" de taille p, Le coefficient $\frac{x^\ell y^p}{\ell! p!}$ dand la série $\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}$ est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!}(\ell+p)^{\ell-1}$$

La somme des nombres de Möbius des intervalles maximaux du poset $\Pi_{p,\ell}$ est donné par les coefficients de $\mathbf{C}^{l}_{-2}$:

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{\ell!}(\ell+p)^{\ell}.$$

Les nombres de Möbius

Théorème (D.O.)

Pour un ensemble de "pointable" de taille ℓ et de "non-pointable" de taille p, Le coefficient $\frac{x^\ell y^p}{\ell! p!}$ dand la série $\mathbf{C}^\bullet_{-1}$ est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!}(\ell+p)^{\ell-1}$$

La somme des nombres de Möbius des intervalles maximaux du poset $\Pi_{p,\ell}$ est donné par les coefficients de $\mathbf{C}^l_{-2}$:

$$(-1)^{p-1}(p-1)!.$$

Les nombres de Möbius

Théorème (D.O.)

Pour un ensemble de "pointable" de taille ℓ et de "non-pointable" de taille p, Le coefficient $\frac{x^\ell y^p}{\ell! p!}$ dand la série $\mathbf{C}^\bullet_{-1}$ est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!}(\ell+p)^{\ell-1}$$

La somme des nombres de Möbius des intervalles maximaux du poset $\Pi_{p,\ell}$ est donné par les coefficients de $\mathbf{C}^I_{-2}$:

$$(-1)^{\ell-1}(\ell)^{\ell-1}.$$

Les nombres de Möbius

Théorème (D.O.)

Pour un ensemble de "pointable" de taille ℓ et de "non-pointable" de taille p, Le coefficient $\frac{x^\ell y^p}{\ell! p!}$ dand la série $\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}$ est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!}(\ell+p)^{\ell-1}$$

La somme des nombres de Möbius des intervalles maximaux du poset $\Pi_{p,\ell}$ est donné par les coefficients de $\mathbf{C}^{l}_{-2}$:

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{\ell!}(\ell+p)^{\ell}.$$

Preuve du premier point : Théorème d'inversion de Lagrange

$$x = \mathbf{C}^{\bullet}_{-1}\left(y + e^{\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}\right).$$

Preuve du premier point : Théorème d'inversion de Lagrange

$$x = \mathbf{C}^{\bullet}_{-1}\left(y + e^{\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}\right).$$

En appliquant le théorème d'inversion de Lagrange :

$$\mathbf{C}^{\bullet}_{-1} = \sum_{\ell \geq 1} \frac{x^{\ell}}{\ell!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\ell-1}\left(\frac{1}{y + e^{z}}\right)^{\ell}_{z=0}.$$

Nous obtenons le coefficient $\frac{x^{\ell} y^{p}}{\ell! p!}$ dans la série $\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}$:

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!}(\ell+p)^{\ell-1}$$

Preuve du premier point : Théorème d'inversion de Lagrange

$$x = \mathbf{C}^{\bullet}_{-1}\left(y + e^{\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}\right).$$

En appliquant le théorème d'inversion de Lagrange :

$$\mathbf{C}^{\bullet}_{-1} = \sum_{\ell \geq 1} \frac{x^{\ell}}{\ell!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\ell-1}\left(\frac{1}{y + e^{z}}\right)^{\ell}_{z=0}.$$

Nous obtenons le coefficient $\frac{x^{\ell} y^{p}}{\ell! p!}$ dans la série $\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}$:

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!}(\ell+p)^{\ell-1}$$

Nous voulons pour coefficient de $\frac{x^{\ell} y^{p}}{\ell! p!}$ dans la série $\mathbf{C}^{l}_{-2}$:

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{\ell!}(\ell+p)^{\ell}.$$

Nous voulons pour coefficient de $\frac{x^\ell y^p}{\ell ! p!}$ dans la série $\mathbf{C}^I_{-2}$:

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{\ell!}(\ell+p)^\ell.$$

Nous voulons pour coefficient de $\frac{x^\ell y^p}{\ell! p!}$ dans la série $\mathbf{C}^{l}_{-2}$:

$$(-1)^{\ell+p-1} \frac{(\ell+p-1)!}{\ell!} (\ell+p)^{\ell}.$$

Lemme

Les séries génératrices $\mathbf{C}^{l}_{-2}$ et $\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}$ vérifient l'équation différentielle suivante :

$$x \frac{\partial \mathbf{C}^{l}_{-2}}{\partial x} = x \frac{\partial \mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}{\partial x} + y \frac{\partial \mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}{\partial y}.$$

Perspectives

- Action des groupes symétriques sur l'homologie des posets (
)

Perspectives

- Action des groupes symétriques sur l'homologie des posets (Lien avec l'opérade 2-colorée associée aux partitions semi-pointées)

Perspectives

- Action des groupes symétriques sur l'homologie des posets (Lien avec l'opérade 2-colorée associée aux partitions semi-pointées)
- Algèbre de Hopf d'incidence :

Perspectives

- Action des groupes symétriques sur l'homologie des posets (Lien avec l'opérade 2-colorée associée aux partitions semi-pointées)
- Algèbre de Hopf d'incidence :

Proposition

L'algèbre de Hopf d'incidence des posets de partitions semi-pointées est isomorphe à la structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre des polynômes en les variables $(a^\theta_{k,l})_{k,l\geq 1,\theta\in\{0,1\}}$ *donnée par la composition de paires de séries formelles* (F, G) *de la forme suivante :*

$$\begin{cases} F = x + \sum_{l,k\geq 1} a^0_{k,l} \frac{x^k}{k!} \frac{y^l}{l!}, \\ G = y + \sum_{l,k\geq 1} k a^1_{k,l} \frac{x^k}{k!} \frac{y^l}{l!}. \end{cases}$$

Merci de votre attention !

Poset des partitions Π_4