Arbres de stationnement

(ArXiv : 2103.14468)

Bérénice Delcroix-Oger
avec M. Josuat-Vergès et L. Randazzo

Séminaire Agata
20 mai 2021

Itinéraire

1. Partitions et partitions non-croisées
2. Homologie d'un poset et décortiquabilité
3. Retour au poset des 2NCP
4. Mais pourquoi l'exposé s'appelle-t-il "Arbres de stationnement"?

Partitions et partitions non-croisées

Partitions et partitions non-croisées

Définition

Une partition d'un ensemble E est $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ t.q. :

- $\pi_k \cap \pi_l \neq \emptyset \implies k = l$
- et $\bigcup_{i=1}^{k} \pi_i = E$.

Π_E = ensemble des partitions de E

Exemples :

Définition (Kreweras, 1972)

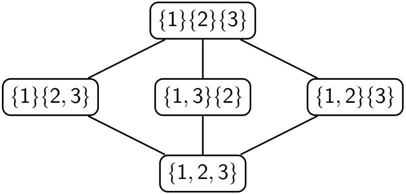
Une partition $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ de $\{1, \ldots, n\}$ est non-croisée si

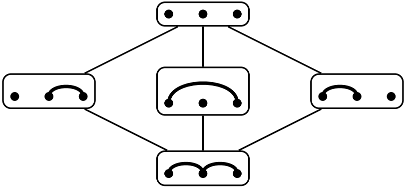
$$\begin{cases} a < b < c < d \\ a, c \in \pi_i \\ b, d \in \pi_j \end{cases} \implies i = j$$

NC_n = ensembles des partitions non-croisées de $\{1, \ldots, n\}$

$\rightarrow$ Nombres de Catalan $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

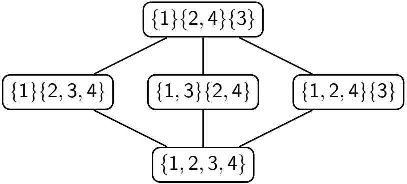
Posets de partitions et de partitions non-croisées

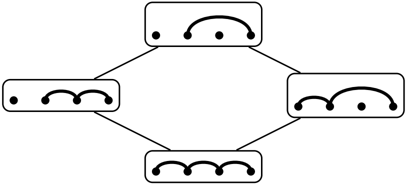




Relation de couverture : $a < b$ t.q. $\nexists c : a < c < b$ (noté $a \lessdot b$)

Posets de partitions et de partitions non-croisées





2-partitions non croisées

Définition (Edelman, 1980)

Une 2-partition non croisée de E est un triple (π, ρ, λ) où :

- $\pi \in NC_{|E|}$ et $\rho \in \Pi_E$,
- $\lambda : \pi \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \rho$ t.q. $\forall B \in \pi,\ |\lambda(B)| = |B|$.

$$\{\{1,5,6,8\},\{2,4\},\ \{3\},\ \{7\},\{9,10,12\},\ \{11\}\}$$

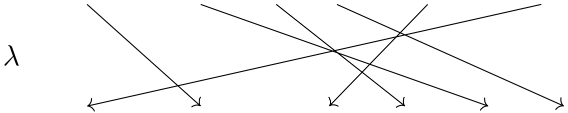
$$\lambda$$

$$\{\{1\},\{2,9,10,11\},\{3,4,8\},\{5\},\ \{6,12\},\{7\}\}$$

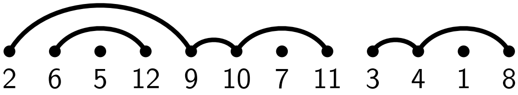
Mise en jambe : Bijection entre 2PNC et PNC étiquetée

PNC étiquetée: chaque élément de la partition est étiqueté de manière à ce que l'étiquetage soit croissant sur les parts (de gauche à droite)

$$\{\{1,5,6,8\},\{2,4\},\ \{3\},\ \{7\},\{9,10,12\},\ \{11\}\}$$



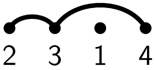
$$\{\{1\},\{2,9,10,11\},\{3,4,8\},\{5\},\ \{6,12\},\{7\}\}$$



Poset des 2PNC

Relation de couverture dans $\sqcap_2$: On sépare la part et l'ensemble des étiquettes en deux de manière à conserver la condition de croissance.

Exemple :

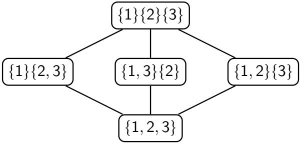


$\rightarrow (n+1)^{n-1}$

Homologie d'un poset et décortiquabilité

Complexe d'ordre et homologie d'un poset

P poset $\leftrightarrow \Delta(P)$ complexe de chaîne associé



$$\Delta(P) = \{a_0 < \ldots < a_k | a_i \in P - \{\hat{0}, \hat{1}\}\}$$

Complexe d'ordre et homologie d'un poset

P poset $\leftrightarrow \Delta(P)$ complexe de chaîne associé

$$\Delta(P) = \{a_0 < \ldots < a_k | a_i \in P - \{\hat{0}, \hat{1}\}\}$$

$$C_k = Vect_{\mathbb{C}}(a_0 < \ldots < a_k | a_i \in P - \{\hat{0}, \hat{1}\})$$

$$\partial_k(a_0 \prec \ldots \prec a_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (a_0 \prec \ldots \prec \hat{a}_i \prec \ldots \prec a_k)$$

$$C_{-1} = \mathbb{C}.e \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} \ldots \xleftarrow{\partial_k} C_k \xleftarrow{\partial_{k+1}} C_{k+1} \xleftarrow{\partial_{k+2}} \ldots$$

$$\tilde{H}_j(P) = \tilde{H}_j(\Delta(P)) = \operatorname{Ker} \partial_j / \operatorname{Im} \partial_{j+1}$$

Poset Cohen-Macaulay : $\exists! j : \tilde{H}_j(P) \neq 0$

Posets décortiquables/épluchables (shellable)

Pour F face de $\Delta(P)$, on pose $\langle F \rangle = \{G : G \subseteq F\}$.

Définition

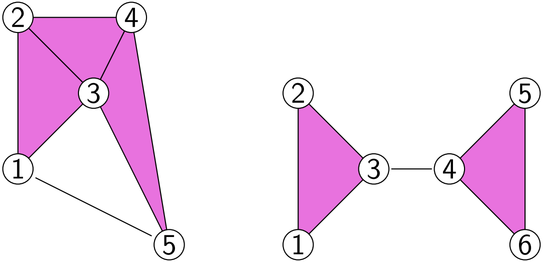
Un poset est décortiquable si

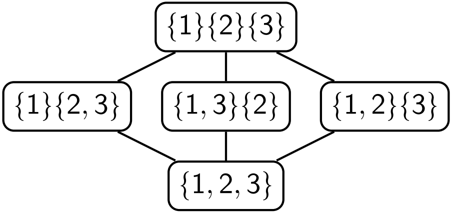
- on peut ordonner ses facettes (faces maximales) en $F_1, \ldots, F_t$
- $\left(\cup_{i=1}^{k-1} \langle F_i \rangle\right) \cap \langle F_k \rangle$ est pur (facettes de même dim.)
- et de dimension $\dim F_k - 1$, $\forall k \in \{2, \ldots, t\}$.

Proposition (Folklore, Björner 1980)

décortiquable $\implies$ *Cohen-Macaulay*

Exemples





RAO [Björner-Wachs, 83]

P admet un Ordre Récursif sur ses Atomes (RAO) si $\hat{0} \lessdot \hat{1}$ ou si P admet un ordre $a_1, \ldots, a_t$ de ses atomes ($\hat{0} \lessdot a_i$) t.q.

- $\forall j$, $[a_j, \hat{1}]$ admet un RAO $<_{a_j}$ t.q. $\forall x, y, a_j \lessdot x, a_j \lessdot y$
$$\begin{cases} \exists i < j, a_i \lessdot x \\ \nexists k < j, a_k \lessdot y \end{cases} \implies x <_{a_j} y$$
- $\forall i < j$, $a_i, a_j < y$ $\implies \exists k < j, \exists z$ t.q. $a_k \lessdot z$, $a_j \lessdot z$, $z \leqslant y$.

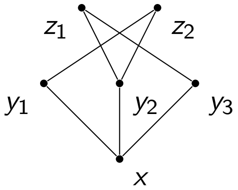
Retour au poset des 2NCP

Miaou ?

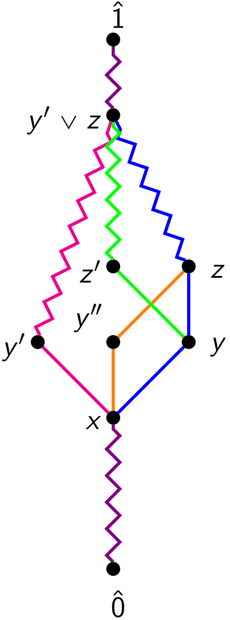
Ordre sur les atomes

Problème :

Non RAO



Décortiquons



Lemme (DO-Josuat-Vergès-Randazzo, 21+)

Soit $x, y, y', z \in$ ⍰$_n$ *t.q.* $x \lessdot y \lessdot z$, $x \lessdot y'$, *et* $y' \prec_x y$. *Alors :*

- *ou* $\exists y'' \in$ ⍰$_n$ *t.q.* $x \lessdot y'' \lessdot z$ *et* $y'' \prec_x y$,
- *ou* $\exists z' \in$ ⍰$_n$ *t.q.* $y \lessdot z' \leqslant y' \vee z$ *et* $z' \prec_y z$.

Proposition (DO-Josuat-Vergès-Randazzo, 21+)

⍰$_n$ *est décortiquable et donc Cohen-Macaulay.*

Mais pourquoi l'exposé s'appelle-t-il "Arbres de stationnement"?

Fonctions de stationnement [Konheim-Weiss, 1966]

1	2	3	4	5	6

Question :

Comment garer 6 voitures sur 6 places de stationnement ?

Réponse facile : bijection entre les places de parking et les voitures.

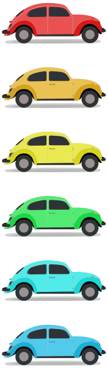
Et si on choisit aléatoirement une place de parking pour chaque voiture ?
Toutes les voitures pourront-elles se garer ?

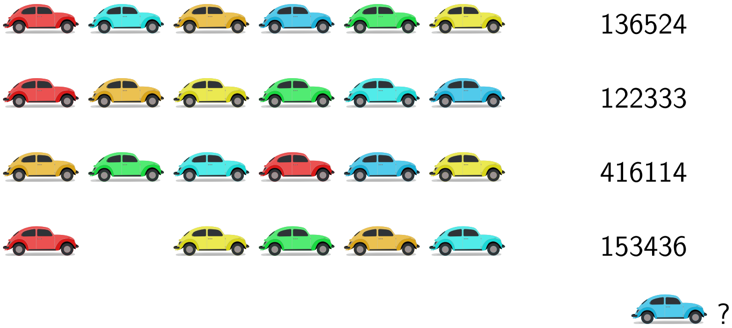
→ Si oui, c'est une fonction de stationnement !

Fonctions de stationnement : exemples et contre-exemples

136524 - 122333 - 416114 - 153436

1	2	3	4	5	6





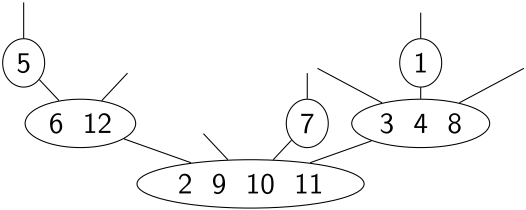
$f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ t.q. $\bigcup_{j=1}^{i} |f^{-1}(j)| \geqslant i$

Arbres de stationnement

Définition

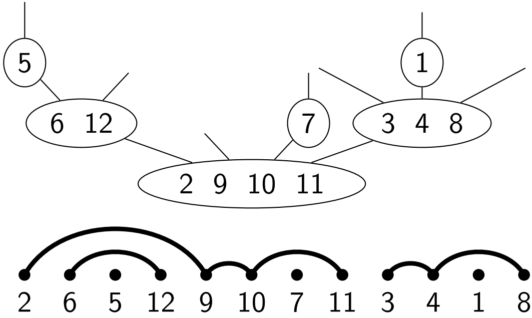
Un arbre de stationnement sur un ensemble L est un arbre plan enraciné $T = (V, E, r)$ t.q.:

- $V \in \Pi_L$,
- $v \in V$ a $|v|$ fils.

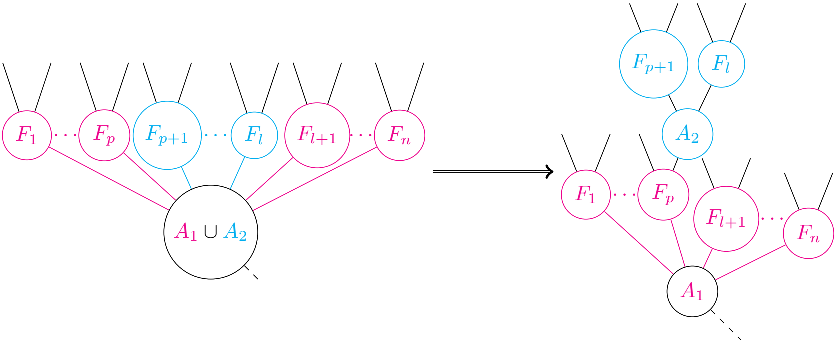


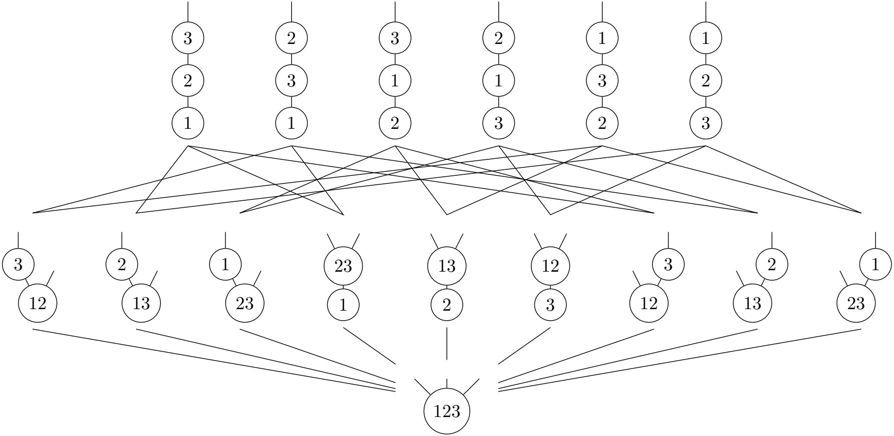
Pourquoi "de stationnement" ?

Bijection 2PNC <-> arbres de stationnement



Ordre sur les arbres de stationnement




3
2
1
2
3
1
3
1
2
2
1
3
1
3
2
1
2
3
3
12
2
13
1
23
23
1
13
2
12
3
3
12
2
13
1
23
123

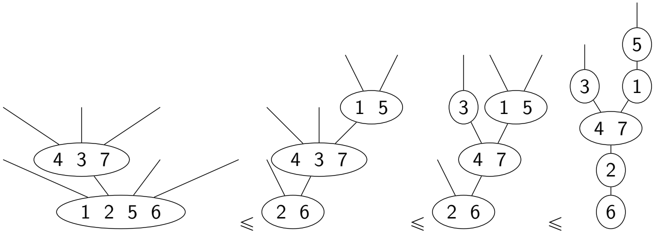
Résultat principal

Théorème (D.O., Josuat-Vergès, Randazzo, 21+)

Le caractère de l'action du groupe symétrique sur l'unique groupe d'homologie non trivial est donné par :

$$\chi_{\tilde{H}_{n-2}(P_n)} : \sigma \mapsto (-1)^{n-z(\sigma)}(n-1)^{z(\sigma)-1}$$

Ingrédients : Formule des traces de Hopf + espèces



Merci !