Posets, algèbres et opérades

Bérénice Delcroix-Oger

Journée de rentrée de l'équipe GTA
Mardi 6 septembre 2022

Combinatoire algébrique

$=$ étude de structures algébriques sur des objets discrets

Combinatoire algébrique

= étude de structures algébriques sur des objets discrets

Posets

Bigèbres

Opérades

Combinatoire algébrique

= étude de structures algébriques sur des objets discrets

Posets

Bigèbres

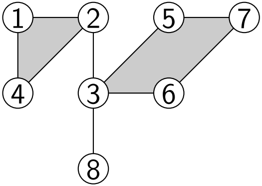
Opérades

Partitions

Fonctions de parking

Structures arborescentes / Hyperarbres

 ? ?  



Plan

Posets de partitions

Plan

Posets des partitions Π_V (d'ensemble V)

Partitions d'un ensemble V :

$$\{V_1, \ldots, V_k\} \models V \Leftrightarrow V = \bigsqcup_{i=1}^{k} V_i, V_i \cap V_j = \varnothing \text{ for } i \neq j$$

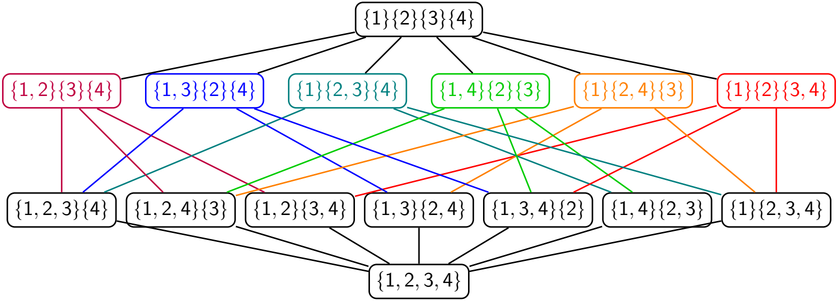
Posets des partitions Π_V (d'ensemble V)

Partitions d'un ensemble V :

$$\{V_1, \ldots, V_k\} \models V \Leftrightarrow V = \bigsqcup_{i=1}^{k} V_i, V_i \cap V_j = \emptyset \text{ for } i \neq j$$

Ordre partiel sur l'ensemble des partitions d'un ensemble V :

$$\{V_1, \ldots, V_k\} \leqslant \{V_1', \ldots, V_p'\} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, p\}, \exists j \in \{1, k\} \text{ t.q. } V_i' \subseteq V_j$$



Cogèbre d'incidence des posets de partitions

Plan

Cogèbre d'incidence d'un poset (fini) [Rota 1964, Schmitt 1992]

Considérons une famille (ensemble) $\mathcal{F}_P$ de posets finis bornés

close par intervalles $(\forall x \leqslant y \in \mathcal{F}_P, [x; y] \in \mathcal{F}_P)$

Cogèbre d'incidence d'un poset (fini) [Rota 1964, Schmitt 1992]

Considérons une famille (ensemble) $\mathcal{F}_P$ de posets finis bornés

close par intervalles $(\forall x \leqslant y \in \mathcal{F}_P, [x; y] \in \mathcal{F}_P)$

Pour $\mathbb{C}$, votre corps (commutatif) préféré, définissons $\mathcal{C} := \mathbb{C}.\mathcal{F}_P / \sim$, l'espace vectoriel engendré par les classes d'isomorphismes de posets.

Cogèbre d'incidence d'un poset (fini) [Rota 1964, Schmitt 1992]

Considérons une famille (ensemble) $\mathcal{F}_P$ de posets finis bornés

$$\text{close par intervalles } (\forall x \leqslant y \in \mathcal{F}_P, [x; y] \in \mathcal{F}_P)$$

Pour $\mathbb{C}$, votre corps (commutatif) préféré, définissons $\mathcal{C} := \mathbb{C}.\mathcal{F}_P / \sim$, l'espace vectoriel engendré par les classes d'isomorphismes de posets. $\mathcal{C}$ est muni de $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ et $\epsilon : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ définis par :

$$\Delta(P) = \sum_{x \in P} [0_P; x] \otimes [x, 1_P]$$

$$\epsilon(P) = \delta_{|P|=1}$$

Cogèbre d'incidence d'un poset (fini) [Rota 1964, Schmitt 1992]

Considérons une famille (ensemble) $\mathcal{F}_P$ de posets finis bornés

$$\text{close par intervalles } (\forall x \leqslant y \in \mathcal{F}_P, [x; y] \in \mathcal{F}_P)$$

Pour $\mathbb{C}$, votre corps (commutatif) préféré, définissons $\mathcal{C} := \mathbb{C}.\mathcal{F}_P/\sim$, l'espace vectoriel engendré par les classes d'isomorphismes de posets. $\mathcal{C}$ est muni de $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ et $\epsilon : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ définis par :

$$\Delta(P) = \sum_{x \in P} [0_P; x] \otimes [x, 1_P]$$

$$\epsilon(P) = \delta_{|P|=1}$$

Theorème (Schmitt)

$(\mathcal{C}, \Delta, \epsilon)$ *est une cogèbre (coassociative).*

Cogèbre d'incidence des posets de partitions

Soit $\pi \in \Pi_n$, $\pi = \{V_1, \ldots, V_k\}$

Lemme

Nous avons les isomorphismes de posets suivants :

$$[\pi, 1_{\Pi_n}] \simeq \prod_{i=1}^{k} \Pi_{|V_k|} \qquad [0_{\Pi_n}, \pi] \simeq \Pi_k$$

Cogèbre d'incidence des posets de partitions

Soit $\pi \in \Pi_n$, $\pi = \{V_1, \ldots, V_k\}$

Lemme

Nous avons les isomorphismes de posets suivants :

$$[\pi, 1_{\Pi_n}] \simeq \prod_{i=1}^{k} \Pi_{|V_k|} \qquad [0_{\Pi_n}, \pi] \simeq \Pi_k$$

Le coproduit de la cogèbre d'incidence des posets de partitions est donné par :

$$\Delta\left(\frac{\Pi_n}{n!}\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} j_i = k, \sum_{i=1}^{n} i j_i = n} \binom{k}{j_1, \ldots, j_n} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\Pi_i}{i!}\right)^{j_i} \otimes \frac{\Pi_k}{k!}.$$

Cogèbre d'incidence des posets de partitions

Soit $\pi \in \Pi_n$, $\pi = \{V_1, \ldots, V_k\}$

Lemme

Nous avons les isomorphismes de posets suivants :

$$[\pi, 1_{\Pi_n}] \simeq \prod_{i=1}^{k} \Pi_{|V_k|} \qquad [0_{\Pi_n}, \pi] \simeq \Pi_k$$

Le coproduit de la cogèbre d'incidence des posets de partitions est donné par :

$$\Delta\left(\frac{\Pi_n}{n!}\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} j_i = k, \sum_{i=1}^{n} ij_i = n} \binom{k}{j_1, \ldots, j_n} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\Pi_i}{i!}\right)^{j_i} \otimes \frac{\Pi_k}{k!}.$$

Mais...

Cette formule vous est-elle familière ?

Petite parenthèse : Algèbre de Faà di Bruno [Joni-Rota 1982]

Considérons $\mathcal{E}$, l'anneau des séries formelles exponentielles $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n!} t^n$, avec $f_1 > 0$ (munies de la composition). On définit les caractères $a_n(f) := f_n$, pour $n \geqslant 1$.

Petite parenthèse : Algèbre de Faà di Bruno [Joni-Rota 1982]

Considérons $\mathcal{E}$, l'anneau des séries formelles exponentielles $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n!} t^n$, avec $f_1 > 0$ (munies de la composition). On définit les caractères $a_n(f) := f_n$, pour $n \geqslant 1$.

Que vaut $a_n(f \circ g)$ en fonction de $a_n(f)$ et $a_n(g)$?

Petite parenthèse : Algèbre de Faà di Bruno [Joni-Rota 1982]

Considérons $\mathcal{E}$, l'anneau des séries formelles exponentielles $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n!} t^n$, avec $f_1 > 0$ (munies de la composition). On définit les caractères $a_n(f) := f_n$, pour $n \geqslant 1$.

Que vaut $a_n(f \circ g)$ en fonction de $a_n(f)$ et $a_n(g)$?

$$\frac{a_n(f \circ g)}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(j_1,\dots,j_n) \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} j_i = k, \sum_{i=1}^{n} i j_i = n} \binom{k}{j_1, \dots, j_n} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i(g)}{i!} \right)^{j_i} \frac{a_k(f)}{k!}$$

Définissant $\Delta a_n(g, f) = a_n(f \circ g)$, on obtient la cogèbre précédente !

Caractère d'une algèbre de Hopf d'incidence

Considérons l'e.v. des caractères $\mathcal{H}^* = \mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ sur une algèbre de Hopf d'incidence $\mathcal{H}$.
La convolée de deux caractères ϕ et ψ est donnée par :

$$\phi * \psi = \sum \phi(P_{(1)})\psi(P_{(2)})$$

où on note $\Delta(P) = \sum P_{(1)} \otimes P_{(2)}$.

Caractère d'une algèbre de Hopf d'incidence

Considérons l'e.v. des caractères $\mathcal{H}^* = \mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ sur une algèbre de Hopf d'incidence $\mathcal{H}$.
La convolée de deux caractères ϕ et ψ est donnée par :

$$\phi * \psi = \sum \phi(P_{(1)})\psi(P_{(2)})$$

où on note $\Delta(P) = \sum P_{(1)} \otimes P_{(2)}$.

Pour les partitions

L'e.v. des caractères sur l'algèbre d'incidence des posets de partition correspond donc à celui des séries formelles exponentielles via l'application $\phi \mapsto \sum_{n \geqslant 1} \frac{\phi(\Pi_n)}{n!} t^n$.

Quelques caractères usuels

Considérons le caractère

$$\xi : \Pi_n \mapsto 1.$$

Notons μ son inverse pour la convolution.

Quelques caractères usuels

Considérons le caractère

$$\xi : \Pi_n \mapsto 1.$$

Notons μ son inverse pour la convolution.

Pour les partitions

On a $\xi(t) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\xi(\Pi_n)}{n!} t^n = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} t^n = \exp(t) - 1$ et
$\mu(t) = \ln(1 + t) = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{t^n}{n!}$

Quelques caractères usuels

Considérons le caractère

$$\xi : \Pi_n \mapsto 1.$$

Notons μ son inverse pour la convolution.

Pour les partitions

On a $\xi(t) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\xi(\Pi_n)}{n!} t^n = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} t^n = \exp(t) - 1$ et
$\mu(t) = \ln(1+t) = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{t^n}{n!}$

Question

À quoi le caractère μ correspond-il ?

Quelques caractères usuels

Considérons le caractère

$$\xi : \Pi_n \mapsto 1.$$

Notons μ son inverse pour la convolution.

Pour les partitions

On a $\xi(t) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\xi(\Pi_n)}{n!} t^n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!} t^n = \exp(t) - 1$ et
$\mu(t) = \ln(1+t) = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{t^n}{n!}$

Question

À quoi le caractère μ correspond-il ?

$\longrightarrow$ Au nombre de Möbius du poset

Nombre de Möbius du poset = caractéristique d'Euler

Définition

Pour tout poset P, la fonction de Möbius est défini sur tout intervalle $x \leqslant_P y$ par :

$$\begin{aligned} \mu(x,x) &= 1, && \forall x \in P \\ \mu(x,y) &= -\sum_{x \leqslant z < y} \mu(x,z), && \forall x < y \in P. \end{aligned}$$

Si P est borné, son nombre de Möbius est $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \{1\}\{2\}\{3\} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \{1,2\}\{3\} \arrow[dr, dash] & \{1,3\}\{2\} \arrow[d, dash] & \{1\}\{2,3\} \arrow[dl, dash] \\ & \{1,2,3\} & \end{tikzcd}$$

Nombre de Möbius du poset = caractéristique d'Euler

Définition

Pour tout poset P, la fonction de Möbius est défini sur tout intervalle $x \leqslant_P y$ par :

$$\begin{aligned} \mu(x,x) &= 1, && \forall x \in P \\ \mu(x,y) &= -\sum_{x \leqslant z < y} \mu(x,z), && \forall x < y \in P. \end{aligned}$$

Si P est borné, son nombre de Möbius est $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & \{1\}\{2\}\{3\} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \{1,2\}\{3\} \arrow[dr] & \{1,3\}\{2\} \arrow[d] & \{1\}\{2,3\} \arrow[dl] \\ & 1 \quad \{1,2,3\} & \end{tikzcd}$$

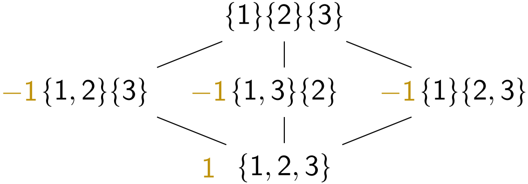
Nombre de Möbius du poset = caractéristique d'Euler

Définition

Pour tout poset P, la fonction de Möbius est défini sur tout intervalle $x \leqslant_P y$ par :

$$\mu(x,x) = 1, \qquad \forall x \in P$$
$$\mu(x,y) = -\sum_{x \leqslant z < y} \mu(x,z), \qquad \forall x < y \in P.$$

Si P est borné, son nombre de Möbius est $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$.



Nombre de Möbius du poset = caractéristique d'Euler

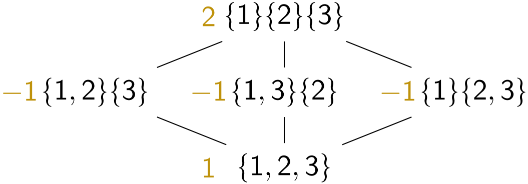
Définition

Pour tout poset P, la fonction de Möbius est défini sur tout intervalle $x \leqslant_P y$ par :

$$\mu(x,x) = 1, \qquad \forall x \in P$$

$$\mu(x,y) = -\sum_{x \leqslant z < y} \mu(x,z), \qquad \forall x < y \in P.$$

Si P est borné, son nombre de Möbius est $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$.



Homologie du poset de partitions

Plan

Homologie d'un poset

Soit P un poset.

$C_j(P) = \mathbb{C}$-e.v. des j-chaînes $x_0 < x_1 < \ldots < x_j$ de P, avec $C_{-1}(P) = \mathbb{C}.e$

Homologie d'un poset

Soit P un poset.

$C_j(P) = \mathbb{C}$-e.v. des j-chaînes $x_0 < x_1 < \ldots < x_j$ de P, avec $C_{-1}(P) = \mathbb{C}.e$

Pour $j \geqslant 0$, on définit la différentielle $\partial_j : C_j(P) \to C_{j-1}(P)$ par :

$$\partial(x_0 < x_1 < \ldots < x_j) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i (x_0 < x_1 < \ldots < \hat{x}_i < \ldots < x_j).$$

On a $\partial_{j-1}\partial_j = 0$.

Homologie d'un poset

Soit P un poset.

$C_j(P) = \mathbb{C}$-e.v. des j-chaînes $x_0 < x_1 < \ldots < x_j$ de P, avec $C_{-1}(P) = \mathbb{C}.e$

Pour $j \geqslant 0$, on définit la différentielle $\partial_j : C_j(P) \to C_{j-1}(P)$ par :

$$\partial(x_0 < x_1 < \ldots < x_j) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i (x_0 < x_1 < \ldots < \hat{x}_i < \ldots < x_j).$$

On a $\partial_{j-1}\partial_j = 0$.
Le $j$ème groupe d'homologie est alors défini, pour tout $j \geqslant 0$, par :

$$\tilde{H}_j(P) = \ker \partial_j / \operatorname{im} \partial_{j+1}.$$

$\rightarrow$ Action du groupe symétrique sur l'homologie

Posets Cohen-Macaulay (et décortiquabilité)

Theorème (Björner, 1980)

Le poset des partitions Π_n est Cohen-Macaulay (et même EL-décortiquable) : il est homotope à un bouquet de sphères de même dimension.

$\longrightarrow$ Dans ce cas, le nombre de Möbius donne, au signe près, la dimension de l'unique groupe d'homologie non trivial.

Posets Cohen-Macaulay (et décortiquabilité)

Theorème (Björner, 1980)

Le poset des partitions Π_n est Cohen-Macaulay (et même EL-décortiquable) : il est homotope à un bouquet de sphères de même dimension.

$\rightarrow$ Dans ce cas, le nombre de Möbius donne, au signe près, la dimension de l'unique groupe d'homologie non trivial.

Theorème (Hanlon, 81 ; Stanley, 82 ; Joyal, 85 ; Fresse, 04)

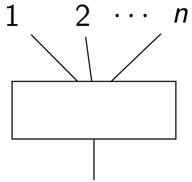
L'action du groupe symétrique sur l'homologie du posets de partitions Π_n est (presque) donnée par

$$\mathrm{Lie}(n) = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{C}.[\ldots[\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)]\ldots]/(\textit{anti-sym.} + \textit{rel. de Jacobi}),$$

où $[\ldots[\ldots]\ldots]$ représente la somme de tous les parenthésages possibles avec des crochets de Lie d'un mot de taille n.

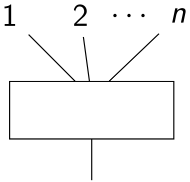
Transparent éclair sur les opérades (monades)

- Une espèce est un foncteur $\mathcal{F}$: Bij $\rightarrow$ Vect

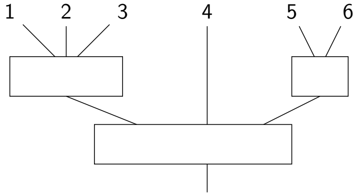


Transparent éclair sur les opérades (monades)

- Une espèce est un foncteur $\mathcal{F} : \mathrm{Bij} \to \mathrm{Vect}$
- Les espèces sont munies d'une opération de substitution

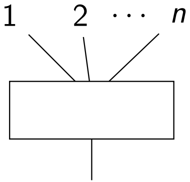


$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(V) = \bigoplus_{\pi \in \Pi_V} \mathcal{F}(\pi) \otimes \left(\bigotimes_{p \in \pi} \mathcal{F}(p) \right)$$

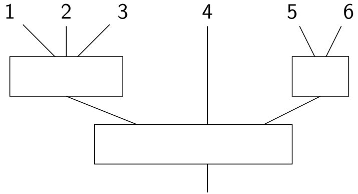


Transparent éclair sur les opérades (monades)

- Une espèce est un foncteur $\mathcal{F} : \mathrm{Bij} \to \mathrm{Vect}$
- Les espèces sont munies d'une opération de substitution



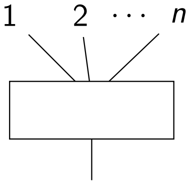
$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(V) = \bigoplus_{\pi \in \Pi_V} \mathcal{F}(\pi) \otimes \left(\bigotimes_{p \in \pi} \mathcal{F}(p) \right)$$



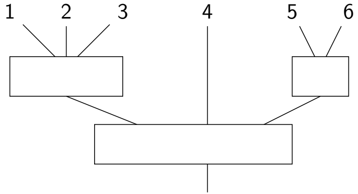
- Une opérade est une transformation naturelle $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ associative.

Transparent éclair sur les opérades (monades)

- Une espèce est un foncteur $\mathcal{F} : \mathrm{Bij} \to \mathrm{Vect}$
- Les espèces sont munies d'une opération de substitution



$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(V) = \bigoplus_{\pi \in \Pi_V} \mathcal{F}(\pi) \otimes \left(\bigotimes_{p \in \pi} \mathcal{F}(p) \right)$$

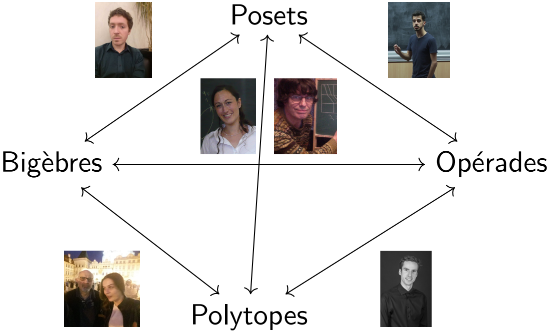


- Une opérade est une transformation naturelle $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ associative.
- À chaque type d'algèbre est associée une opérade.

Ma recherche dans tout ça

Quelques axes de recherche :

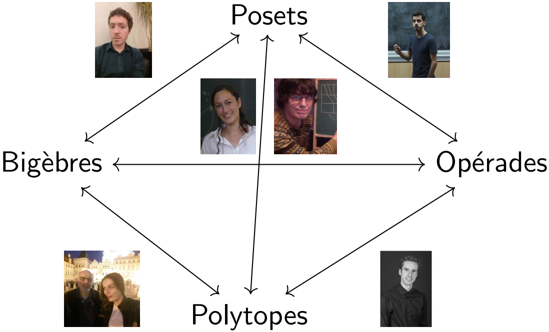
Explorer les liens entre objets combinatoires et objets algébriques



Ma recherche dans tout ça

Quelques axes de recherche :

Explorer les liens entre objets combinatoires et objets algébriques



Merci de votre attention !