

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Mathématiques

École doctorale Information, Structure, Systèmes (ED 166)

IMAG, UMR 5149

Symbiose entre posets, espèces, opérades et polytopes : un
dialogue entre combinatoire, algèbre et topologie

Présentée par Bérénice DELCROIX-OGER
le lundi 12 mai 2025

Devant le jury composé de

François BERGERON, Professeur, LACIM (Université du Québec À Montréal)
Cédric BONNAFÉ, Directeur de recherches, IMAG (Université de Montpellier)
Pierre-Louis CURIEN, Directeur de recherches, IRIF (Université Paris Cité)
Christine TASSON, Professeure des universités, ISAE-Supaéro
Jean-Yves THIBON, Professeur des universités, LIGM (Université Gustave Eiffel)
Bruno VALLETTE, Professeur des universités, LAGA (Université Sorbonne Paris Nord)]

Rapporteur
Examineur
Examineur
Examinatrice
Rapporteur
Rapporteur



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER

Je déclare avoir respecté, dans la conception et la rédaction de ce mémoire d'HDR, les valeurs et principes d'intégrité scientifique destinés à garantir le caractère honnête et scientifiquement rigoureux de tout travail de recherche, visés à l'article L.211-2 du Code de la recherche et énoncés par la Charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et la Charte d'intégrité scientifique de l'Université de Montpellier. Je m'engage à les promouvoir dans le cadre de mes activités futures d'encadrement de recherche.

"Telle est la morale des souris :
Savoir un peu est mieux que rien,
mais le sage ne connaît vraiment
que ce qu'il a vu en entier."
Extrait de "Sept souris dans le noir" d'Ed Young

À mes deux petites souris,

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à l'ensemble des membres du jury pour l'honneur qu'ils me font d'y participer. C'est un plaisir pour moi de leur présenter mes travaux. Je tiens à remercier spécialement les rapporteurs de ce manuscrit, François Bergeron, Jean-Yves Thibon et Bruno Vallette, pour leurs retours constructifs et leurs encouragements. Je remercie aussi Cédric Bonnafé, Pierre-Louis Curien, et Christine Tasson pour leur relecture, leurs suggestions et leur présence dans cette salle aujourd'hui.

Je remercie mon directeur de thèse, Frédéric Chapoton, qui n'a malheureusement pas pu faire partie du jury. Je lui serai toujours reconnaissante de m'avoir ouvert le monde de la recherche. Je remercie Emily Burgunder qui m'a permis d'y rester pendant la difficile transition entre la thèse et un poste fixe en me donnant des conditions de travail idéales à Toulouse avec un postdoc CIMI.

Je remercie mes collaborateurs de leur patience, de leur bienveillance et de leur bonne humeur : Jean-Christophe Aval, Adrien Boussicault, Emily Burgunder, Pierre-Louis Curien, Clément Dupont, Florent Hivert, Eric Hoffbeck, Matthieu Josuat-Vergès, Patxi Laborde-Zubieta, Guillaume Laplante-Anfossi, Joan Millès, Jovana Obradović, Vincent Pilaud, Lucas Randazzo et Kurt Stöckl.

Je remercie mes collègues de l'IMT, de l'IRIF et de l'IMAG, notamment mes co-bureaux successifs, Claire Dartyge, Yves Guiraud, François Métayer, Yaël Frégier, Geoffroy Couteau, Matthieu Josuat-Vergès, Axel Dubar et Joan Pedro dos Santos. Je remercie les directions et personnels de soutien technique et administratif de ces unités, notamment Frédéric Magniez, Giuseppe Castagna, Omur Avci, Laurent Azema et Jean-Michel Moreno, Thomas Beraud, Dieneba Camara, Natalia Hacquart, Nicolas Loisel, Étienne Mallet, Eva Ryckelynck, Jemuel Samtchar, à Paris, et Daniele di Petro, Michele Bolognesi, Nathalie Collain, Heinui Bottemer, Sophie Cazanave-Pin, Céline Dricot, Carmela Madonia et Laurence Roux à Montpellier. Je remercie particulièrement Yves Guiraud, François Métayer et Pierre-Louis Curien pour leur accueil à l'IRIF, ainsi que les chercheuses de l'IRIF pour leur écoute et leurs conseils, notamment Valérie Berthé, Sylvie Corteel, Sophie Laplante et Christine Tasson. Je remercie aussi les collègues de l'IMAG qui m'ont accueillie chaleureusement, ceux présents pour ma soutenance et ceux ayant aimé y être mais étant retenus, en audition ou ailleurs. Enfin, je remercie les collègues de l'UM avec lesquels j'ai eu l'occasion d'interagir, notamment celles de la formation "Oser".

Je remercie Hugo Herbelin, Ralf Treinen et Claudia Faggian de m'avoir aidé dans mes premiers pas de responsable d'équipe. Je remercie Antoine Touzé et Christian Ausoni de m'avoir permis de faire partie du bureau du GDR HTop à leurs côtés, le temps de sa courte

existence. Je remercie mes collègues avec lesquels j'ai eu la chance d'organiser des événements : Samuele Giraud, Matthieu Josuat-Vergès et Christine Tasson pour "SOCS 2020" qui a pu se tenir malgré la pandémie, Peter Feller, Vincent Florens et Hoel Queffelec pour "Winterbraids XIII", Matthieu Josuat-Vergès, Philippe Nadeau, Thomas Gerber, Vincent Pilaud et Viviane Pons pour l'organisation des journées du GT Combalg 2023 et 2024, ainsi que Christine Tasson pour le groupe de travail "Espèces et sémantique".

Je remercie mon conjoint, Thibaut, pour son soutien indéfectible pendant presque la moitié de notre vie et nos enfants, Arsène et Basile, pour leur patience, leur aide, et leur simple présence joyeuse. Je remercie aussi mes parents, mes sœurs et mes amis, notamment Thibault, Adélaïde, Nathalie, Lauriane, Sophie et Antoine, Loren et David, et Romain.

Pour finir, j'aimerais remercier tous ceux ne figurant pas dans les remerciements plus haut mais qui auront pris la peine de les lire jusqu'à cette phrase-ci.

Table des matières

1	Introduction	13
1.1	Contexte de mes recherches	13
1.2	Un modèle : les posets des partitions	16
1.3	Lignes directrices de ma recherche	18
1.4	Travaux présentés dans ce manuscrit	20
1.5	Notations	21
2	Posets et espèces : concepts fondamentaux et interactions combinatoires	25
2.1	Posets combinatoires	25
2.1.1	Généralités et premiers exemples	25
2.1.2	Bigèbre d'incidence	26
2.1.3	Fonction de Möbius et inversion de Möbius	27
2.1.4	Arrangement d'hyperplans et treillis des plats	28
2.2	Complexe d'ordre et topologie du poset	29
2.2.1	Complexe d'ordre	30
2.2.2	Posets Cohen-Macaulay	31
2.3	Espèces de structure	34
2.4	Action du groupe symétrique sur l'homologie d'un poset	37
2.5	Hypergraphes et hyperarbres	38
2.6	Partitions décorées	39
2.6.1	Partitions d'ensemble	39
2.6.2	Compositions d'ensemble	41
2.6.3	Partitions pointées	41
2.6.4	Partitions semi-pointées	41
2.7	Objets de type Catalan	43
2.7.1	Partitions non croisées, chemins de Dyck, arbres binaires plans et arbres plans	43
2.7.2	Poset des partitions non croisées	45
2.7.3	Treillis de Tamari sur les objets de type Catalan	45
2.8	Fonctions de parking	46
2.8.1	Généralités sur les fonctions de parking	47
2.8.2	Arbres de parking et espaces de parking	49
2.8.3	Posets des 2-partitions non croisées	53
2.8.4	Posets de Tamari-parking	57

3 Opérades, monades et bigèbres combinatoires : aspects algébriques	61
3.1 Les opérades, des monades comme les autres?	61
3.1.1 Opérades algébriques classiques	62
3.2 Opérades et posets	64
3.2.1 Partitions (bi)décorées par une opérade	64
3.2.2 Constructions cobar, cobar à niveaux et dualité de Koszul	66
3.2.3 Posets des partitions décorées et bases PBW	68
3.3 Théorèmes de rigidité et bigèbres généralisées	69
3.3.1 Exemple de base : algèbres de Hopf	70
3.3.2 Bigèbres généralisées	70
3.3.3 Théorème de rigidité	72
3.3.4 Exemples de théorèmes de rigidité obtenus par dualité	73
3.3.5 Algèbres dendriformes et tridendriformes	74
3.3.6 Théorème de rigidité pour les algèbres dendriformes et tridendriformes	79
4 Posets, algèbres et polytopes : de l'associaèdre aux nestoèdres	87
4.1 Associaèdres et permutoèdres	87
4.1.1 Posets sur les faces de l'associaèdre et du permutoèdre	87
4.1.2 Lien entre produits algébriques et ordres	88
4.2 polytopes d'hypergraphe aka nestoèdres	89
4.2.1 Définitions des polytopes d'hypergraphes	89
4.2.2 Familles de polytopes d'hypergraphes	91
4.3 Tubages, ensembles nichés et constructions	98
4.4 Produit de battage et produits q -tridendriformes sur les faces des nestoèdres .	99
4.4.1 Équipes strictes, clans et délégations	100
4.4.2 Produit de battage d'une délégation	101
4.4.3 Cadre ordonné et équations tridendriformes	103
4.4.4 Restrictoèdres	104
4.4.5 Restriction de construction et définition non récursive du produit de battage	105
4.4.6 Élargissons notre horizon	106
4.5 Ordre sur les faces des nestoèdres	108
4.5.1 Étendons l'ordre de Tamari et l'ordre de Bruhat faible	108
4.5.2 Lien entre ordre et produit de battage	110
4.6 Diagonale du permutoèdre	111
4.6.1 Définitions de la diagonale et motivations	111
4.6.2 Description de l'arrangement de tresses multiples	112
4.6.3 Treillis des plats et énumérations	114
4.6.4 Diagonales cellulaires cohérentes pour le permutoèdre	124
5 Espèces en posets opéradiques et autres espèces enrichies	127
5.1 Espèces en posets et posets des partitions	127
5.2 Espèces en posets opéradiques	129
5.3 Structure d'opérade sur la cohomologie	130
5.4 Variantes : modules opéradiques	130
5.5 Produits fibrés	131
5.5.1 Exemples des partitions décorées	131
5.5.2 Posets des partitions décorées à gauche	131
5.5.3 Posets des partitions décorées à droite	133
5.5.4 Partitions bidécorées	134

5.6	Exemple des 2-partitions non croisées	135
5.7	Exemple des hyperarbres	135
5.7.1	Espèce en posets opéradique	136
5.7.2	Arbres de fusion	136
5.7.3	$\Sigma H^n(\text{MT}(n))$ est l'opérade post-Lie	140
5.7.4	Post-Lie module à gauche sur les arbres de Cayley	140
6	Conclusion et perspectives	143
	Bibliographie	149

1.1 Contexte de mes recherches

L'essentiel de mes recherches se situe en *combinatoire algébrique*. La *combinatoire* est l'étude des structures discrètes, telles que les graphes ou les partitions. Elle se situe à l'interface entre les mathématiques et l'informatique. Elle est présente dans des laboratoires de mathématiques puisque les outils utilisés sont des outils mathématiques et dans des laboratoires d'informatique car les structures discrètes étudiées sont souvent des structures issues de l'informatique : des structures de données usuelles comme des listes ou des arbres, ou encore des structures apparaissant dans des problèmes informatiques comme les graphes ou les hypergraphes, ou encore les fonctions de parking qui sont des fonctions de hachage qui permettent la résolution de collisions par sondage linéaire (*linear probing*).

La combinatoire se répartit en un grand nombre de domaines, comme la combinatoire algébrique, que je définirai plus précisément au paragraphe suivant, la combinatoire énumérative qui porte sur l'énumération d'objets ou encore la combinatoire bijective dont le but est d'établir des bijections entre différents ensembles d'objets. Citons encore, par ordre alphabétique et sans espérer être exhaustive, la combinatoire analytique, qui porte sur l'étude analytique des séries génératrices, la combinatoire arithmétique, associée à la théorie des nombres, la combinatoire géométrique, qui porte sur l'étude de structures géométriques telles que les polytopes, dont j'aurai l'occasion de reparler au chapitre 4, la combinatoire des mots, qui porte sur les mots et les langages et se relie à la théorie des automates ou encore la combinatoire probabiliste, qui étudie les comportements asymptotiques des structures. Bien sûr, les frontières entre ces domaines sont aussi poreuses qu'imprécises et je fais pour ma part régulièrement des incursions en combinatoires analytique, énumérative, bijective et géométrique.

La *combinatoire algébrique* porte sur des structures algébriques sur ces objets combinatoires. Les trois structures algébriques autour desquelles s'articulent mes recherches, et qui sont les vedettes de ce mémoire, sont les ensembles munis d'un ordre partiel (ou *posets*), les *espèces de structure* (ou *classes combinatoires étiquetées* en combinatoire analytique) ainsi que les *opérades algébriques*. J'utilise aussi des outils et des notions venus de différents horizons des mathématiques et de l'informatique : de combinatoires bijective et énumérative, comme les codes de Prüfer, de théorie des catégories, qui est le langage naturel de la théorie des espèces et des opérades, de topologie algébrique, comme l'homologie de posets et les opérades, ou encore d'algèbre, avec les bases PBW et les algèbres d'incidence.

Les *posets* sont des structures combinatoires qui apparaissent à l'intersection de nombreux domaines. Ils servent en théorie géométrique des groupes à calculer les nombres de Betti de certains groupes : c'est dans ce contexte que McCullough et Miller [MM96] ont introduit le poset des hyperarbres, sous le nom de poset de Whitehead, qui a été le point de départ de mon travail de thèse [Oge13a]. Les posets se relient aussi à la topologie algébrique, via l'épluchabilité dont Björner et Wachs ont été précurseurs [Bjö80; BW83] (voir aussi [Wac07]) et la théorie des fonctions de Möbius développée par Rota [Rot64]. Via la topologie, ils se relient à la théorie de la complexité via la conjecture d'évasivité [KSS84]. Ces aspects topologiques sont présentés plus en détail dans [Koz08]. Les posets se relient aussi à la théorie des matroïdes et aux arrangements d'hyperplans auxquels on associe le treillis des intersections non vides d'hyperplans, ordonnées par l'inclusion (aussi appelé *treillis des plats* quand l'arrangement est central). Le lecteur débutant intéressé pourra se référer à [Sta07; OT92] pour une introduction à ce domaine aussi présenté à la section 2.1.4. Le treillis des plats de l'arrangement booléen (formé des hyperplans d'équations $x_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$) est le treillis booléen des sous-ensembles d'un ensemble ordonnés par inclusion. Le treillis des plats de l'arrangement de tresse (formé des hyperplans d'équations $x_i = x_j$ pour $1 \leq i < j \leq n$) est le poset des partitions que nous présentons à la prochaine section. Enfin, le treillis des plats de l'arrangement Shi (formé des hyperplans d'équations $x_i = x_j$ et $x_i = x_j + 1$ pour $1 \leq i < j \leq n$) est un poset sur les partitions dont les parts sont ordonnées [NT21] ($\mathbb{E}^+ \circ \mathbb{L}^+$ en langage d'espèces). Le théorème de Zaslavsky relie ainsi le polynôme caractéristique (défini en termes de nombres de Möbius dans le treillis d'intersection) avec le nombre de régions et le nombre de régions bornées de l'arrangement d'hyperplans. En plus de ce poset, il est possible d'associer à un arrangement d'hyperplans un autre poset : celui des régions de l'arrangement muni de la relation d'adjacence. Par exemple, les régions de l'arrangement de tresses sont étiquetées par les permutations, l'adjacence des régions correspondant à l'ordre (de Bruhat) faible sur les permutations. Le diagramme de Hasse de ce poset est isomorphe, en tant que graphe, au 1-squelette du permutoèdre. Enfin, les régions de l'arrangement Shi sont étiquetées par les fonctions de parking. Pour finir, les posets sont reliés à plusieurs types d'algèbres dont l'algèbre de Hopf d'incidence (voir section 2.1.2). L'une de ces interactions qui me semble particulièrement frappante est le lien entre treillis de Tamari et produits duplicial et dendriforme sur les arbres binaires plans présentés par Chapoton [Cha07] et par Loday et Ronco [LR02] et étendu par Palacios et Ronco aux faces de l'associaèdre et du permutoèdre [PR06] (voir Proposition 4.1.2).

Les *espèces de structure* ont été introduites par Joyal [Joy81; Joy86] et sont analogues aux classes combinatoires étiquetées de Flajolet [FS09]. Ces deux objets reposent sur le même principe : traduire des relations entre objets en termes d'équation(s) fonctionnelle(s) qui permette(nt) le calcul de séries génératrices. Les espèces sont, de plus, associées à une généralisation des séries génératrices appelée *série indicatrice de cycles*, dont les coefficients sont les caractères de l'action du groupe symétrique sur les objets encodés par l'espèce. Une définition formelle des espèces sera donnée à la section 2.3. De manière informelle, une espèce peut être vue comme un plan de construction qui permet, à partir d'un ensemble fini E donné, de construire des objets étiquetés par E . À titre d'exemple, citons l'espèce des listes \mathbb{L} qui à un ensemble E associe l'ensemble des listes sur E . La définition récursive d'un type Liste est un exercice classique de programmation. Voici ce qu'il donnerait en OCaml :

```
type intlist = Nil | Cons of int * intlist
```

En Français, ce code se traduit comme suit. Une liste de taille 0 est juste une liste vide. Une liste de taille n peut être obtenue à partir d'un élément (entier) a et d'une liste l de taille $n - 1$ en insérant l'élément a en tête de liste puis en concaténant la liste l . Cette décomposition

réursive a son pendant en termes d'espèces puisque l'équation fonctionnelle de l'espèce des listes est donnée par :

$$\mathbb{L} = \mathbb{1} + \mathbb{X} \times \mathbb{L}. \quad (1.1.1)$$

Depuis une telle équation fonctionnelle, on déduit aisément par extraction de coefficients l'action du groupe symétrique sur les listes, qui correspond à la représentation régulière. La recherche sur les espèces connaît actuellement un engouement de plus en plus grand, avec un champ d'applications allant de l'algèbre, la théorie des opérades et la théorie des représentations [SV88; Ber87; DLL92; For12; Oge13a; Raj93] à la logique et la sémantique [Fio+08; FGP22; Gal23; Fio+18; Mel19] en passant bien sûr par la combinatoire [Ber89b; DJR22].

La notion d'espèces a été généralisée dans plusieurs directions, notamment en variant les catégories de départ et d'arrivée du foncteur : en partitionnel par Nava et Rota [NR85], en espèce de posets par Sekanina [Sek85], en permutational par Bergeron et Yeh [BY90], en espèce de Möbius par Méndez et Yang [MY91; SVY97], en espèce héréditaire par Schmitt [Sch93; Car22], en espèce symétrique par Méndez [Mén93], en espèce cubique par Heteyi, Labelle et Leroux [HLL98], en espèce sur un corps fini [Hen05; Mor05], en espèce rationnelle par Blandin et Diaz [BD08], en espèce hyperoctahedral par Bergeron et Choquette [BC09], en Γ -espèce par Gainer-Dewar [Gai15], en espèce sur les arrangements d'hyperplans [AM20; AM23] ou encore en espèce généralisée par Fiore, Gambino, Hyland et Wynskel [Fio+08; TAO18]. En plus de ces généralisations, plusieurs structures algébriques ont été définies sur les espèces, comme les bigèbres dans la catégorie des espèces [PR04], les monoïdes de Hopf dans la catégorie des espèces par Aguiar et Mahajan [AM13; AL11; ABT13; AM14; Mar15; Whi20] et la dualité de Koszul associée par Méndez [Mén10; Tam22], les automates dans la catégorie des espèces par Loregian [Lor24] ou encore la catégorie de Kleisli associée à une monade sur le topos des espèces [FM05b]. Notez ici que les opérades elles-mêmes peuvent être vues comme un monoïde dans la catégorie des espèces. Ce que le lecteur pourra retenir de ces deux énumérations est la versatilité de la notion d'espèce que je vois un peu comme le couteau suisse du chercheur. Le lecteur intéressé par les espèces trouvera plus de détails sur la théorie des espèces dans le livre de Bergeron, Labelle et Leroux [BLL98] et sur les liens entre espèces et algèbres de Hopf dans [AM10].

Les *opérades* sont apparues en topologie algébrique, dans les travaux de Boardman et Vogt [BV68] et May [May72]. Un historique détaillé de leurs origines est présenté par Markl, Shnider et Stasheff dans [MSS02]. Les opérades ont connu ce qui a été qualifié de *renaissance* au début des années 1990 [Lod96; LSV97] avec de nouvelles applications tournées vers l'algèbre. Une opérade (vectorielle algébrique) encode un type d'algèbre. Par exemple, les opérades Comm, Lie et Assoc encodent les algèbres commutatives, de Lie et associatives respectivement. Certaines propriétés des algèbres, comme la liberté et la Koszulité, peuvent être montrées directement en une preuve générale sur l'opérade. Par exemple, il existe une preuve par la théorie des opérades du théorème de Hopf-Borel selon lequel toute algèbre de Hopf commutative cocommutative est libre sur l'espace vectoriel de ses éléments primitifs. Loday a développé un cadre opéradique général pour ce type de théorèmes appelés théorèmes de rigidité [Lod08] qui a permis de les montrer pour différents types d'algèbres (voir Section 3.3). Comme précisé brièvement au paragraphe précédent, les opérades peuvent être vues comme un monoïde dans la catégorie des espèces. De manière combinatoire, une opérade est une espèce \mathbb{S} munie d'une projection $\mathbb{S} \circ \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$. Le lecteur pourra consulter [LV12] pour un panorama complet des opérades algébriques, [Mén15] pour un panorama des opérades ensemblistes et [Gir18] pour un panorama des opérades non-symétriques.

1.2 Un modèle : les posets des partitions

L'exemple modèle des interactions entre posets, espèces et opérades est incarné dans le poset des partitions. C'est l'exemple qui a inspiré le point de départ de ma recherche et guidé un certain nombre de mes travaux. Après avoir rappelé l'origine de ce poset et sa définition, j'expliquerai comment il se relie aux opérades et aux espèces.

Les objets sous-jacents au poset des partitions sont les partitions d'ensemble, à ne pas confondre avec les partitions d'un entier que nos confrères québécois appellent habilement *partage*. Une *partition* d'un ensemble E est un ensemble $\{V_1, \dots, V_k\}$ de sous-ensembles de E deux-à-deux distincts et tels que $E = \bigcup_{i=1}^k V_i$. Chaque V_i est une *part* de la partition. L'ensemble des partitions de E est noté Π_E ou $\Pi(E)$. Le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k parts est donné par le nombre de Stirling de seconde espèce, noté $S(n, k)$ [OEI24, A008277]. Le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments est dénombré par les nombres de Bell, notés B_n [OEI24, A000110]. Les partitions sont étroitement reliées aux espèces puisque le pléthysme \circ de deux espèces \mathbb{A} et \mathbb{B} est défini comme :

$$\mathbb{A} \circ \mathbb{B}(E) = \bigotimes_{\pi \in \Pi(E)} \mathbb{A}(\pi) \otimes \left(\bigotimes_{p \in \pi} \mathbb{B}(p) \right).$$

L'ensemble des partitions d'un ensemble fini E est ordonné par raffinement : une partition π est plus petite qu'une partition π' si les parts de π' sont incluses dans les parts de π , ou de manière équivalente si les parts de π sont l'union de parts de π' . Le poset des partitions de E est aussi noté Π_E ou $\Pi(E)$. Lorsque E est l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$, ce poset est noté Π_n . Les posets des partitions Π_3 et Π_4 sont représentés sur la figure 1.2.1. Le poset des partitions figure dès 1940 dans [Bir40, Chapitre 1, exemple 6]. Le poset $\Pi(E)$ ainsi obtenu est un poset borné, c'est-à-dire avec un unique minimum, la partition en une seule part, et un unique maximum, la partition dont toutes les parts sont de taille un. C'est un poset gradué : toutes les chaînes maximales ont même longueur et il est possible d'associer à chaque élément son rang, qui correspond au nombre d'arêtes entre le minimum du poset et lui-même dans le diagramme de Hasse. Plus explicitement, le rang $\rho(\pi)$ d'une partition π est donné par son nombre de parts, auquel on retranche un.

Comme rappelé plus haut, le poset des partitions est le treillis des plats de l'arrangement de tresses (voir Figure 1.2.1 en haut à droite). Le lecteur pourra se référer à la section 2.1.4 et au livre [Sta07] pour plus de détails à ce propos.

Le poset des partitions d'un ensemble à n éléments est un treillis EL-épluchable (EL-shellable en anglais), c'est-à-dire qu'il existe un étiquetage des arêtes de son diagramme de Hasse tel que tout intervalle du poset admette une unique chaîne étiquetée de manière croissante (en lisant les arêtes du minimum vers le maximum de la chaîne), qui soit première dans l'ordre lexicographique. La définition d'EL-épluchabilité et son application au poset des partitions ont été introduites par Björner dans [Bjö80]. Si la relation $\pi \leq \pi'$ est une relation de couverture, cela signifie qu'il existe exactement deux parts de π' , notées A et B , qui appartiennent à la même part de π . L'arête entre les deux partitions π et π' de S est étiquetée par la formule suivante :

$$\lambda(\pi, \pi') = n + 1 - \max(\min A, \min B). \quad (1.2.1)$$

Les arêtes du poset Π_3 de la figure 1.2.1 sont étiquetées avec cet étiquetage EL. L'existence d'un tel étiquetage a des conséquences topologiques. En effet, il est possible d'associer à tout poset un complexe simplicial appelé *complexe d'ordre*, qui correspond à son nerf si l'on voit le poset comme une catégorie. Tout poset EL-épluchable est *Cohen-Macaulay* et donc homotope

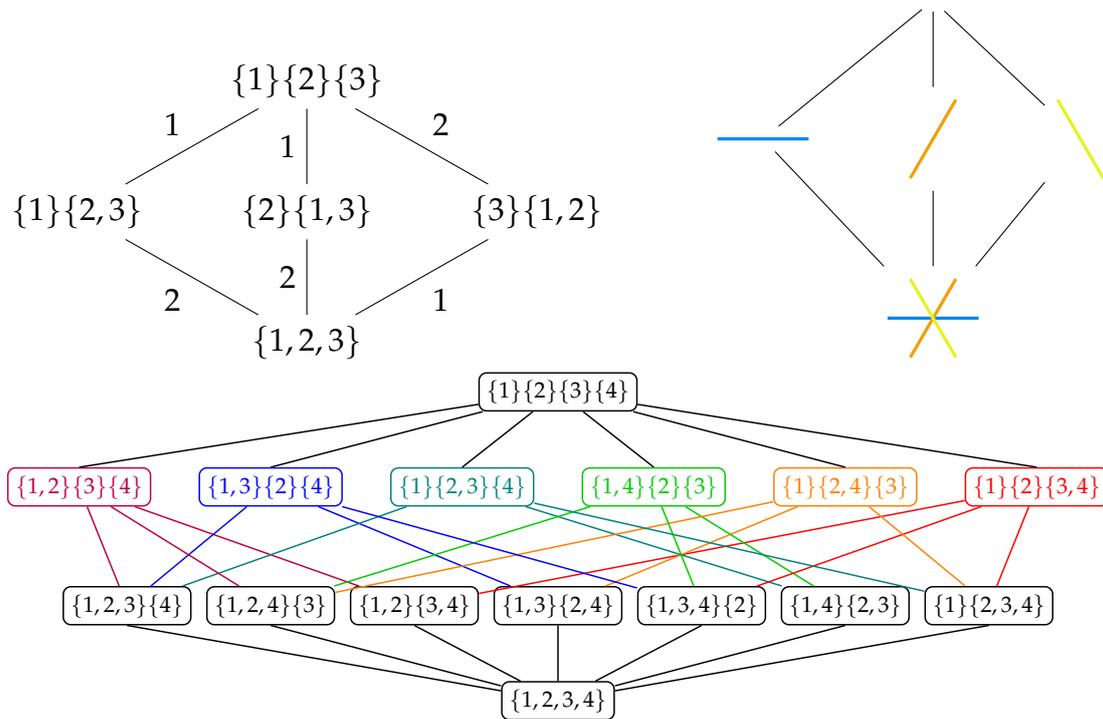


FIGURE 1.2.1 – Posets des partitions Π_3 (en haut, vu comme treillis des plats de l'arrangement de tresses en haut à droite) et Π_4 (en bas). Les arêtes de Π_3 sont étiquetées par l'étiquette EL proposé par Björner dans [Bjö80].

à un bouquet de sphères, c'est-à-dire n sphères de même dimension ayant exactement un point commun.

L'action usuelle du groupe symétrique \mathfrak{S}_n sur l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$ s'étend en une action de \mathfrak{S}_n sur l'ensemble des partitions de $\llbracket 1; n \rrbracket$. Cette action préserve la graduation du poset et induit donc une action de \mathfrak{S}_n sur l'unique groupe de cohomologie non trivial de Π_n , $H^{n-3}(\Pi_n)$ (lui-même isomorphe en tant que \mathfrak{S}_n -module à $H_{n-3}(\Pi_n)$). Plusieurs auteurs, tels que Stanley [Sta82] et Hanlon [Han81], ont calculé l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des partitions. Joyal [Joy86] l'a reliée avec le caractère associé à l'opérade Lie. Un historique plus détaillé a été recensé par Fresse [Fre04]. Dans ce même article, Fresse identifie le complexe de chaînes du poset des partitions et la construction bar à niveaux associée à l'opérade Comm, ce qui justifie pleinement que l'homologie de chacun de ces complexes soit identique et donne une explication algébrique aux liens remarqués précédemment. S'appuyant sur cet exemple, Vallette [Val07] a ensuite relié l'épluchabilité des posets de partitions décorées par une opérade, aussi introduits par Méndez et Yang [MY91], à la dualité de Koszul pour les opérades. Une partition décorée par une opérade (ensembliste) \mathcal{P} est une partition dont chaque part π_i est décorée par un élément de l'ensemble $\mathcal{P}(\pi_i)$. La définition de ces objets nécessite seulement une structure d'espèce, cependant la définition de l'ordre nécessite une structure opéradique. En effet, deux partitions décorées forment une relation de couverture dans le poset des partitions décorées par \mathcal{P} si et seulement si leurs partitions sous-jacentes forment une relation de couverture dans le poset des partitions usuel et si les décorations des parts fusionnées sont "compatibles". Le résultat phare de [Val07] est de relier une propriété topologique du poset (être Cohen-Macaulay) à une propriété algébrique de l'opérade (être de Koszul).

Cet exemple est à l'origine de la plupart de mes travaux. En effet, les articles [Oge13a; DD25b; DD25a] ont été motivés par une situation analogue sur le poset des hyperarbres

avec cette fois un unique groupe d'homologie associé à l'opérade PreLie. Nous avons introduit dans [DD25b] la notion d'espèce en poset opéradique, développée à la section 5 et nous l'avons mise en application dans [DD25a] pour expliquer comment la structure opéradique sur la cohomologie du poset des hyperarbres est directement issue d'une structure opéradique sur les ensembles nichés (nested sets) associés à ce poset.

Tout poset EL-épluchable est Cohen-Macaulay. On sait de plus que toute opérade PBW est de Koszul. Dans l'article [BDH21], nous avons raffiné les résultats de [Val07] pour relier l'épluchabilité avec le fait d'être PBW. Cela permet notamment d'expliquer de manière algébrique la dualité de Whitney constatée par González D'León, Hallam et Quiceno dans [DHD23].

Enfin, le lien entre posets des partitions et arrangement de tresses est la clé pour le calcul de la diagonale du permutoèdre [Del+23] et les partitions sont au cœur de la définition du poset des 2-partitions non croisées étudié dans [DJR22]. Notez que les partitions apparaissent enfin en filigrane dans les travaux sur les polytopes d'hypergraphes et les algèbres tridendriformes [CDO25b; CDO25a; BD20] puisque l'exemple clé de polytope est le permutoèdre dont les faces sont indexées par les compositions d'ensembles (aussi appelées surjection), qui sont des partitions d'ensembles munies d'un ordre total sur l'ensemble de leurs parts.

1.3 Lignes directrices de ma recherche

L'objectif de mes recherches est d'expliquer algébriquement les "coïncidences" observées de manière combinatoire. Je suis en effet convaincue que celles-ci ne sont jamais fortuites mais toujours le reflet d'un phénomène plus profond. Pour atteindre cet objectif, je suis des lignes directrices qui me tiennent à cœur :

- l'utilisation de l'informatique dans la phase exploratoire de mes travaux,
- l'animation de la recherche,
- l'interaction entre l'enseignement et la recherche,
- la diffusion de mes thématiques et résultats de recherche.

Mes recherches débutent en général par une phase d'exploration informatique, menée sur le logiciel Sage. Je tiens le code correspondant à disposition sur demande. Cette première phase d'exploration me permet d'établir des conjectures, notamment grâce au site web OEIS [OEI24] qui est une vraie mine d'or pour un chercheur en combinatoire. À titre d'exemple, au cours des recherches menées dans le cadre de l'article [Del+23], j'ai obtenu à l'aide de Sage des fichiers de plus d'un million de lignes de résultats et une série génératrice en 6 variables de degré 14. J'ai effectué des tests sur ChatGPT pour m'aider à formuler des conjectures, notamment pour trouver une formule pour les coefficients de la série génératrice, mais ces tests ont été peu probants¹. Cet échec s'explique principalement par le fait que ChatGPT n'est pas spécialisé dans cette tâche, même si certains collègues ont réussi à l'apprivoiser pour des tâches similaires [PB23]. Je suis néanmoins convaincue qu'avec un outil adapté, l'utilisation de l'apprentissage statistique fournirait un cadre efficace pour l'élaboration de conjectures de combinatoire énumérative, comme il le fait actuellement pour la combinatoire extrémale et la théorie des graphes [GR96; Wag21]. C'est la vision développée par notre

1. J'ai finalement trouvé une formule grâce à une méthode suggérée par Sylvie Corteel, que je remercie encore!

collègue Christian Stump dans l'article de diffusion [Stu21] publié dans la revue *Nature* qui reprend les éléments présentés par Davies et ses coauteurs [Dav+21].

La recherche ne se fait pas de manière isolée, mais au sein d'une équipe dans un laboratoire, dans une université et dans une communauté. Il m'a tenu à cœur de m'investir dans chacun de ses aspects : j'ai pris la direction de mon équipe, *Algèbre et calcul* en 2021-2022 à l'IRIF, je me suis investie dans le conseil scientifique de l'UFR d'Informatique de 2019 à 2022, je siége à la commission ressources humaines et au conseil du pôle MIPS (Math-Informatique-Physique-Systèmes) de la Faculté des sciences de Montpellier depuis 2023 et, après avoir siégé au bureau du GDR "Théorie de l'homotopie" en 2022-2023, je suis responsable du GT CombAlg depuis juin 2023. Ces responsabilités m'ont permis de mûrir scientifiquement en me donnant accès à un éventail thématique plus large que mes propres thématiques de recherche. J'ai étayé mes connexions à la fois avec les mathématiques et l'informatique en étant dans des laboratoires des deux sections et en enseignant ces deux matières. Cela m'a permis de nourrir des axes de recherche variés. Je dois à mes séjours à l'IMT de Toulouse la partie sur les théorèmes de rigidité développés à la section 3.3, à l'IRIF et ma prise de responsabilité de l'équipe *Algèbre et calcul* celle sur les aspects polytopaux développés au chapitre 4 et sur les interactions avec la sémantique développées dans la partie 3.1 et à l'IMAG celle sur les espèces en posets opéradiques développées à la section 5. J'ai pu exposer ma vision des mathématiques discrètes et des relations entre mathématiques et informatique dans une interview menée par Valérie Berthé et Frédéric Patras dans le cadre de la synthèse des mathématiques.

Je suis convaincue de l'importance et de la richesse de l'interaction entre l'enseignement et la recherche, chacun modelant l'autre. En effet, après avoir enseigné l'informatique pendant 12 ans, je pense plus facilement à des preuves algorithmiques comme en témoignent par exemple les algorithmes de [DJR22]. De plus, ma recherche a une influence sur la manière dont j'enseigne : j'inclus des points qui apparaissent dans mes recherches comme les codes de Prüfer, les bases de Gröbner, les fonctions de parking ou encore la définition d'objets par induction structurelle qui correspond aux équations fonctionnelles des espèces.

Les mathématiques sont pour moi tangibles et concrètes. Je n'arrive à appréhender une notion qu'après l'avoir matérialisée d'une manière ou d'une autre. J'aime particulièrement les exemples et les illustrations et je nourris mon enseignement de supports que je réalise moi-même. L'un de mes médiums favoris est le crochet. Réaliser des supports sert à la fois à mieux les comprendre, puisque je réalise moi-même les patrons, et de support pour mes activités de recherche, d'enseignement et de diffusion. J'ai par exemple réalisé plusieurs objets de géométrie hyperbolique ou encore un permutoèdre et un associaèdre au crochet (voir la figure 1.3.1). J'ai aussi écrit un article de diffusion sur "les mathématiques du crochet" dans la revue *Au Fil des Maths* qui a été l'objet d'une conférence de diffusion en mars 2025 à Saint-Brieuc, dans le cadre du festival "La preuve par neuf".

Enfin, je trouve primordial de transmettre au grand public mon amour pour la recherche et d'expliquer à la fois mes motivations et ce qu'est un processus de recherche. Je me suis impliquée dès le doctorat dans la Fête de la science en présentant d'abord des surfaces réalisées au crochet² puis en organisant celle-ci pour l'UFR d'Informatique de l'Université Paris Diderot de 2017 à 2021. Je participe aussi régulièrement à des exposés dans des lycées (aux lycées Louis-le-Grand et Jean Rostand de Villepinte en 2022, au lycée Philippe Lammour à Nîmes en 2023, aux lycées Hemingway de Nîmes et Feuillade de Lunel en 2024 et 2025 ainsi qu'au lycée Jean Moulin de Saint-Brieuc en 2025). Je présente principalement au cours de ces exposés mes recherches sur les fonctions de parking. J'ai présenté mes recherches sur les polytopes et le permutoèdre lors d'un exposé au festival *Pint of science* en mai 2024. De plus,

2. Encore exposées dans la vitrine du hall d'entrée de l'ICJ à Lyon



FIGURE 1.3.1 – À gauche, permutoèdre réalisé au crochet. À droite, pseudosphère hyperbolique réalisée au crochet.

j'interviens régulièrement à Maths-en-jeans sur des sujets comme le pavage du diamant aztèque (en 2023-2025) ou encore le jeu *Lights out* (en 2024-2025). Travailler sur la diffusion de ces travaux de recherche m'aide à clarifier ma manière de les présenter, ce qui sert pour la diffusion auprès d'autres chercheurs ou pour la rédaction de projets. De plus, avoir des regards neufs de lycéens guide vers de nouvelles preuves. Nous travaillons ainsi cette année avec les lycéens de Maths-en-jeans du lycée Hemingway de Nîmes sur une preuve alternative du comptage des pavages par domino du diamant aztèque n'utilisant que des éléments de lycée. Ces lycéens, Marilou Cadet, Marine Fontalba et Christian Noutepe, encadrés par leur professeure de mathématiques, Camille Armand, ont reçu le prix coup de cœur du jury à la finale académique du concours "C Genial" qui s'est tenue à Montpellier en avril dernier.

1.4 Travaux présentés dans ce manuscrit

Je présenterai dans ce manuscrit les travaux suivants, effectués après ma thèse, listés par ordre alphabétique d'auteurs :

- [BDH21] Joan BELLIER-MILLÈS, Bérénice DELCROIX-OGER et Eric HOFFBECK. « Operads with compatible CL-shellable partition posets admit a Poincaré-Birkhoff-Witt basis ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 374.11 (2021), p. 8249-8273. ISSN : 0002-9947,1088-6850. DOI : 10.1090/tran/8482. URL : <https://doi.org/10.1090/tran/8482>
- [BD20] Emily BURGUNDER et Bérénice DELCROIX-OGER. « Structure theorems for dendriform and tridendriform algebras ». In : *Algebraic combinatorics, resurgence, moulds and applications (CARMA). Vol. 1.* T. 31. IRMA Lect. Math. Theor. Phys. EMS Publ. House, Berlin, 2020, p. 29-66. ISBN : 978-3-03719-204-7
- [BD19] Emily BURGUNDER et Bérénice DELCROIX-OGER. *Confluence laws and Hopf-Borel type theorem for operads*. 2019. arXiv : 1701.01323 [math.CO]
- [CDO25b] Pierre-Louis CURIEN, Bérénice DELCROIX-OGER et Jovana OBRADOVIĆ. « Tridendriform algebras on hypergraph polytopes ». en. In : *Algebraic Combinatorics* 8.1 (2025), p. 201-234. DOI : 10.5802/alco.401. URL : <https://alco.centre-mersenne.org/articles/10.5802/alco.401/>
- [CDO25a] Pierre-Louis CURIEN, Bérénice DELCROIX-OGER et Jovana OBRADOVIĆ. *Restriction, order and shuffles in nestohedra*. 2025
- [Del17] Bérénice DELCROIX-OGER. « Semi-pointed partition posets and species ». In : *J. Algebraic Combin.* 45.3 (2017), p. 857-886. ISSN : 0925-9899. DOI : 10.1007/s10801-

016-0727-1. URL : <https://doi.org/10.1007/s10801-016-0727-1> (dont la version courte présentée à la conférence FPSAC est [Del15b])

- [DD25b] Bérénice DELCROIX-OGER et Clément DUPONT. *Lie-operads and operadic modules from poset cohomology*. 2025. arXiv : 2505.06094 [math.CO]. URL : <https://arxiv.org/abs/2505.06094>
- [DD25a] Bérénice DELCROIX-OGER et Clément DUPONT. *Hypertrees, postLie and pre-Lie operads*. 2025
- [DJR22] Bérénice DELCROIX-OGER, Matthieu JOSUAT-VERGÈS et Lucas RANDAZZO. « Some properties of the parking function poset ». In : *Electron. J. Comb.* 29.4 (2022), Paper 4.42, 49 pp. ISSN : 1077-8926. DOI : 10.37236/10714 (dont la version courte présentée à la conférence FPSAC est [DJR20])
- [Del+23] Bérénice DELCROIX-OGER, Guillaume LAPLANTE-ANFOSSI, Vincent PILAUD et Kurt STOECKL. *Cellular diagonals of permutahedra*. 2023. arXiv : 2308.12119 [math.CO] (dont une version courte remaniée sera présentée à la conférence FPSAC 2025)

J'aimerais mentionner les travaux suivants effectués aussi après ma thèse, mais que ce manuscrit n'abordera pas puisqu'ils sortent de l'unité thématique voulue :

- [Ava+21] Jean-Christophe AVAL, Adrien BOUSSICAULT, Bérénice DELCROIX-OGER, Florent HIVERT et Patxi LABORDE-ZUBIETA. « Non-ambiguous trees : new results and generalisation ». In : *European J. Combin.* 95 (2021), Paper No. 103331, 28. ISSN : 0195-6698,1095-9971. DOI : 10.1016/j.ejc.2021.103331. URL : <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2021.103331> (dont la version courte présentée à la conférence FPSAC est [Ava+16])
- [BDM17] Emily BURGUNDER, Bérénice DELCROIX-OGER et Dominique MANCHON. « An operad is never free as a pre-Lie algebra ». Preprint, arXiv:1702.01949. 2017

Je résume sur la figure 1.4.1 mes principaux objets d'études et les articles dans lesquels ils apparaissent. Le chapitre 2 est centré autour de la partie la plus combinatoire, entre espèces et posets. Le chapitre 3 est centré autour des applications plus opéradiques. Le chapitre 4 est centré sur les interactions avec les polytopes. Le chapitre 5 fait la synthèse des interactions entre posets, espèces et opérades et ouvre vers la sémantique.

1.5 Notations

Nous présentons ici plusieurs notations qui seront utilisées par la suite :

- \mathbb{K} : corps de caractéristique zéro (dans certains des travaux, un anneau commutatif unitaire suffit : le lecteur pourra se référer à l'article de recherche correspondant).
- Si E est un ensemble, $\mathbb{K}.E$ désigne le \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par E .
- $\llbracket n \rrbracket = \llbracket 1; n \rrbracket$: le segment d'entiers $\{1, \dots, n\}$
- Les espèces sont notées avec des "fausses" lettres grasses \mathbb{E} et les opérades en majuscules calligraphiées \mathcal{P} . Nous noterons $\mathcal{P}(n)$ pour $\mathcal{P}(\llbracket n \rrbracket)$.
- \mathfrak{S}_E désigne le groupe des permutations de l'ensemble E . Nous noterons simplement \mathfrak{S}_n pour $\mathfrak{S}_{\llbracket 1; n \rrbracket}$.
- δ_X désigne le symbole de Kronecker qui vaut 1 si X est vraie et 0 sinon.

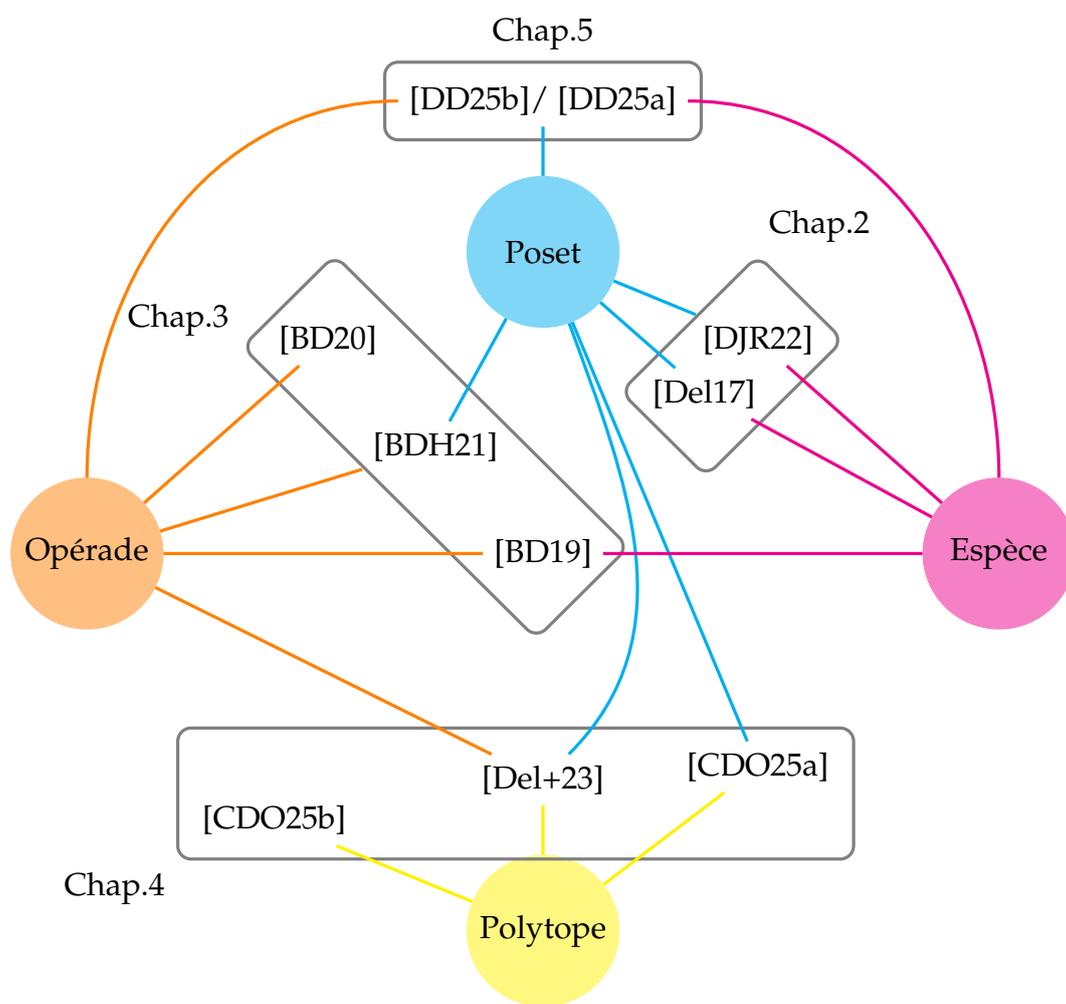


FIGURE 1.4.1 – Thèmes de recherche (ronds colorés), articles et chapitre de ce manuscrit (rectangles arrondis)

Posets et espèces : concepts fondamentaux et interactions combinatoires

2.1 Posets combinatoires

Un poset est un ensemble partiellement ordonné. Les posets combinatoires sont des posets sur un ensemble de structures discrètes. Tous les posets combinatoires apparaissant dans ce manuscrit seront finis. Nous présentons dans cette section les définitions et les résultats généraux sur les posets nécessaires par la suite, sans viser à l'exhaustivité.

2.1.1 Généralités et premiers exemples

Soit P un poset. La relation d'ordre partiel associée est notée \leq_P , ou \leq quand il n'y a pas d'ambiguïté. Nous notons de plus $<_P$ (ou $<$) la relation d'ordre strict associée. Un élément b de P *couvre* un élément a de P , noté $a \lessdot b$ si $a <_P b$ et s'il n'existe aucun c tel que $a <_P c <_P b$. Le *diagramme de Hasse* d'un poset P est le graphe dont les sommets sont les éléments de P et les arêtes sont données par les relations de couverture. Les éléments minimaux du poset sont traditionnellement représentés en bas du diagramme de Hasse et les éléments maximaux en haut. Les posets avec un maximum (noté $\hat{1}$) et un minimum (noté $\hat{0}$) sont appelés *intervalles* et sont dits *bornés*. Si un poset P n'est pas un intervalle, le plus petit intervalle contenant P est noté \hat{P} . Une *chaîne maximale* (ou *chaîne saturée*) du poset P est une chaîne $a_0 < \dots < a_n$ où a_0 est un élément minimal du poset, a_n est un élément maximal et a_{i+1} couvre a_i pour tout $0 \leq i \leq n - 1$. Un poset P est *gradué* si toutes ses chaînes maximales ont la même longueur. Dans ce cas, il existe une application $rk : P \rightarrow \mathbb{N}$, appelée *rang*, telle que

- $rk(m) = 0$ pour tout élément minimal m de P
- et $rk(b) = rk(a) + 1$ pour tout $a \lessdot b$ de P .

Étant donnés deux posets P_1 et P_2 , le *produit direct* $P_1 \times P_2$ de ces deux posets est le produit cartésien $P_1 \times P_2$ muni de l'ordre $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ si et seulement si $a_i \leq b_i$ dans P_i , pour $i = 1, 2$.

Exemples 2.1.1. • Considérons un ensemble fini E . L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des sous-ensembles de E , muni de l'inclusion, est un poset appelé *treillis booléen* et noté B_E (voir figure 2.1.1).

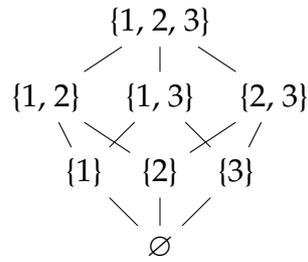


FIGURE 2.1.1 – Diagramme de Hasse du treillis booléen à trois éléments

- Considérons les permutations de \mathfrak{S}_n , où une permutation σ est représentée comme un mot $\sigma(1) \dots \sigma(n)$ (noté simplement $\sigma_1 \dots \sigma_n$). La clôture transitive de la relation de couverture

$$\sigma_1 \dots \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_n \leq \sigma_1 \dots \sigma_{i+1} \sigma_i \dots \sigma_n \text{ si } \sigma_i < \sigma_{i+1} \quad (2.1.1)$$

est appelée ordre (de Bruhat) faible (voir le paragraphe 4.5.1).

- D'autres exemples seront développés plus loin : les posets des partitions et de partitions décorées (voir 2.6) et les posets d'hyperarbres (voir 2.5)

△

Définition 2.1.2 ([Bir40]). Soit P un poset fini et a et b deux éléments de P . a et b admettent une borne supérieure (*join* en anglais) (resp. inférieure (*meet* en anglais)) si l'ensemble des majorants (resp. minorants) communs à a et b admet un minimum (resp. maximum). La borne supérieure (resp. inférieure) de deux éléments a et b est notée $a \vee b$ (resp. $a \wedge b$). Un poset dans lequel tout couple d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure est un *treillis*.

Exemple 2.1.3. Le poset booléen B_E est un treillis. Pour V et W deux sous-ensembles de E , leur borne supérieure $V \vee W$ est $V \cup W$ et leur borne inférieure $V \wedge W$ est $V \cap W$. Le poset des partitions et l'ordre faible sont aussi des treillis.

Le poset des hyperarbres (voir 2.5) n'est pas un treillis, puisque deux éléments n'ont pas forcément de borne supérieure. C'est par contre un semi-treillis inférieur : toute paire d'éléments a une borne inférieure. Le poset des hyperarbres augmenté d'un maximum est un treillis [JMM06, Lemme 2.2].

△

2.1.2 Bigèbre d'incidence

Nous rappelons ici les définitions liées aux bigèbres d'incidence extraites de l'article de W. Schmitt [Sch94].

Une famille d'intervalles \mathcal{P} est *fermée par intervalle*, si elle est non vide et si, pour tout $P \in \mathcal{P}$ et $a \leq b \in P$, l'intervalle $[a, b]$ est dans \mathcal{P} . Elle est de plus *fermée par produit direct* si le produit direct de deux intervalles de la famille est un intervalle de la famille. Nous pouvons de plus considérer \sim la relation d'équivalence donnée par l'isomorphisme de posets. Nous définissons alors une \mathbb{K} -bigèbre $C(\mathcal{P})$ par :

Proposition 2.1.4. [Sch87] Soit $C(\mathcal{P})$ le \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par les classes d'isomorphismes sur \mathcal{P} , \mathcal{P}/\sim , muni du produit cartésien de posets \times et d'une unité $\nu : \mathbb{K} \rightarrow C(\mathcal{P})$. Nous définissons les applications linéaires $\Delta : C(\mathcal{P}) \rightarrow C(\mathcal{P}) \otimes C(\mathcal{P})$ et $\epsilon : C(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{K}$ par :

$$\Delta[P] = \sum_{a \in P} [\hat{0}, a] \otimes [a, \hat{1}] \quad \text{et} \quad \epsilon[P] = \delta_{P=\nu(1)},$$

où $\hat{0}$ et $\hat{1}$ sont respectivement le minimum et le maximum de P . Alors, $H(\mathcal{P}) = (C(\mathcal{P}), \times, \Delta, \nu, \epsilon)$ est une bigèbre munie du produit direct de posets, de l'unité ν , du coproduit Δ , de la counité ϵ et d'un antipode que nous omettons ici. Cette bigèbre est appelée algèbre de Hopf d'incidence.

Remarque 2.1.5. Cette définition s'étend à toutes les relations d'équivalence vérifiant certaines conditions (voir [Sch94]). Elle se généralise aussi aux familles de posets qui ne sont pas forcément des intervalles dans [Del15a].

Exemples 2.1.6. • [Sch94] L'algèbre de Hopf d'incidence des treillis booléens est isomorphe à l'algèbre de Hopf binomiale, c'est-à-dire l'algèbre des polynômes $\mathbb{Q}[X]$, munie du coproduit

$$\Delta(X^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k \otimes X^{n-k} \quad (2.1.2)$$

- [Sch94] L'algèbre de Hopf d'incidence des posets des partitions est isomorphe à l'algèbre des polynômes $\mathbb{Q}[X]$, munie du coproduit

$$\Delta\left(\frac{X^n}{n!}\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N} \\ \sum_{i=1}^n j_i = k, \sum_{i=1}^n i j_i = n}} \binom{k}{j_1, \dots, j_n} \prod_{i=1}^n \left(\frac{X^i}{i!}\right)^{j_i} \otimes \frac{X^k}{k!}. \quad (2.1.3)$$

- J'ai calculé dans [Del17] la bigèbre d'incidence des partitions semi-pointées (voir 2.6.4). \triangle

La duale de l'algèbre de Hopf d'incidence joue un rôle particulier dans le calcul des nombres de Möbius détaillé à la section suivante.

Exemples 2.1.7. • La duale de l'algèbre de Hopf d'incidence des treillis booléens est isomorphe à l'algèbre des séries formelles de la forme

$$F(x) = 1 + \sum_{k \geq 1} f_k \frac{x^k}{k!} \quad (2.1.4)$$

munie du produit des séries formelles.

- La duale de l'algèbre de Hopf d'incidence des posets des partitions est isomorphe à l'algèbre des séries formelles de la forme

$$F(x) = x + \sum_{k \geq 2} f_k \frac{x^k}{k!} \quad (2.1.5)$$

munie de la composition des séries formelles (algèbre de Faà di Bruno). \triangle

2.1.3 Fonction de Möbius et inversion de Möbius

Définition 2.1.8. La fonction de Möbius μ est définie récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P par :

$$\mu(a, a) = 1, \quad \forall a \in P \quad (2.1.6)$$

$$\mu(a, b) = - \sum_{a \leq c < b} \mu(a, c), \quad \forall a < b \in P. \quad (2.1.7)$$

Si P est un intervalle, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$. Dans le cas contraire, le nombre de Möbius de P est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{P})$.

Le nom de cet invariant vient de l'exemple suivant. Si Div_n est le poset des diviseurs d'un entier n , $\mu(d, m) = \mu(m/d)$, où μ est la fonction de Möbius classique telle que :

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{si } n = p_1 \dots p_k, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérant un poset borné gradué P de minimum $\hat{0}$ et maximum $\hat{1}$, les fonctions de Möbius de certains intervalles du poset sont encodées dans le *polynôme caractéristique* :

$$\chi(y) = \sum_{a \in P} \mu(\hat{0}, a) y^{rk(\hat{1}) - rk(a)}, \quad (2.1.8)$$

où $rk(a)$ est le rang de a , c'est-à-dire la longueur de la plus longue chaîne entre $\hat{0}$ et a .

L'une des applications de la fonction de Möbius est la formule d'inversion de Möbius :

Proposition 2.1.9. [Rot64] Soient f et g deux fonctions définies sur \mathcal{P} . Alors, pour tous a, b de P ,

$$f(b) = \sum_{a \leq b} g(a) \quad \text{si et seulement si} \quad g(b) = \sum_{a \leq b} f(a) \mu(a, b). \quad (2.1.9)$$

Une autre application est son lien avec la caractéristique d'Euler que nous verrons à la section 2.2.

2.1.4 Arrangement d'hyperplans et treillis des plats

Nous rappelons maintenant brièvement les résultats classiques de la combinatoire des arrangements d'hyperplans affines. Le lecteur intéressé pourra se référer à [Sta07; OT92] pour une introduction plus détaillée.

Définition 2.1.10. Un *arrangement (fini) d'hyperplans* affines réels est un ensemble fini \mathcal{A} d'hyperplans affines dans \mathbb{R}^d .

Dans ce qui suit, \mathcal{A} désigne un tel arrangement.

Définition 2.1.11. Une *région* de \mathcal{A} est une composante connexe de $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$. Les *faces* de \mathcal{A} sont les clôtures des régions de \mathcal{A} et leurs intersections avec un hyperplan de \mathcal{A} . Le *treillis des faces* de \mathcal{A} est le poset $Fa(\mathcal{A})$ des faces de \mathcal{A} ordonné par inclusion. Les *f-polynôme* $f_{\mathcal{A}}(x)$ et *b-polynôme* $b_{\mathcal{A}}(x)$ de \mathcal{A} sont les polynômes

$$f_{\mathcal{A}}(x) := \sum_{k=0}^d f_k(\mathcal{A}) x^k \quad \text{et} \quad b_{\mathcal{A}}(x) := \sum_{k=0}^d b_k(\mathcal{A}) x^k, \quad (2.1.10)$$

où $f_k(\mathcal{A})$ est le nombre de faces de dimension k de \mathcal{A} et $b_k(\mathcal{A})$ est le nombre de faces bornées de dimension k de \mathcal{A} .

Définition 2.1.12. Un *plat* de \mathcal{A} est un sous-espace affine non vide de \mathbb{R}^d qui peut être obtenu comme l'intersection de certains hyperplans de \mathcal{A} . Le *poset des plats*, ou poset d'intersection, de \mathcal{A} est le poset $Fl(\mathcal{A})$ des plats de \mathcal{A} ordonné par contenance (un plat est plus petit qu'un autre s'il le contient).

Définition 2.1.13. Le *polynôme de Möbius* $\mu_{\mathcal{A}}(x, y)$ de \mathcal{A} est le polynôme défini par

$$\mu_{\mathcal{A}}(x, y) := \sum_{F \leq G} \mu_{Fl(\mathcal{A})}(F, G) x^{\dim(F)} y^{\dim(G)}, \quad (2.1.11)$$

où $F \leq G$ parcourt l'ensemble des intervalles du treillis des plats $Fl(\mathcal{A})$, et $\mu_{Fl(\mathcal{A})}(F, G)$ est la fonction de Möbius du treillis des plats $Fl(\mathcal{A})$ (voir définition 2.1.8).

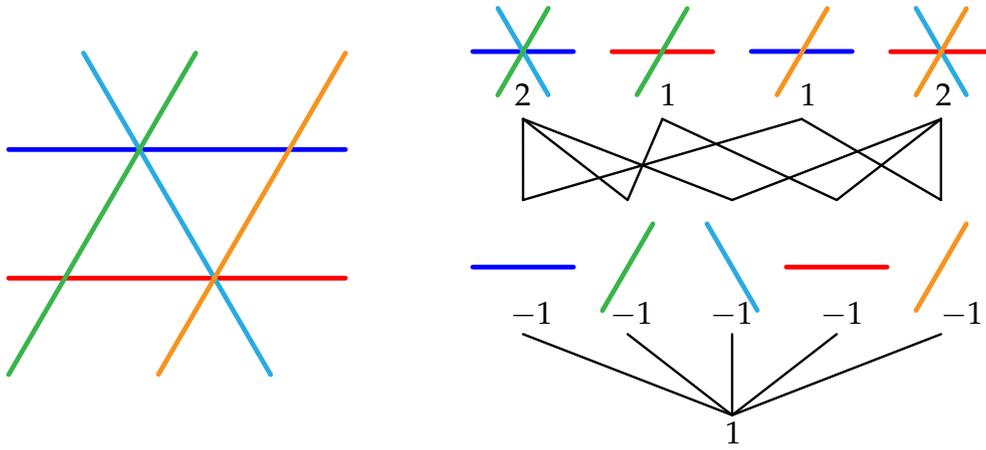


FIGURE 2.1.2 – Un arrangement d'hyperplans (à gauche) et son poset d'intersection avec sa fonction de Möbius (à droite).

Remarque 2.1.14. Le coefficient de x^d dans le polynôme de Möbius $\mu_{\mathcal{A}}(x, y)$ donne le *polynôme caractéristique* (comme défini à l'équation (2.1.8)) :

$$\chi_{\mathcal{A}}(y) := [x^d] \mu_{\mathcal{A}}(x, y) = \sum_F \mu_{\text{Fl}(\mathcal{A})}(\mathbb{R}^d, F) y^{\dim(F)}. \quad (2.1.12)$$

Nous avons vu dans l'introduction que le poset des partitions apparaissait comme le treillis des plats de l'arrangement de tresses. Connaître le treillis des plats d'un arrangement d'hyperplans permet de calculer le nombre de régions de l'arrangement d'hyperplans correspondant grâce au théorème de Zaslavsky qui suit.

Théorème 2.1.15 ([Zas75, Thm. A]). *Le f -polynôme, le b -polynôme, et le polynôme de Möbius de l'arrangement d'hyperplans \mathcal{A} sont reliés par*

$$f_{\mathcal{A}}(x) = \mu_{\mathcal{A}}(-x, -1) \quad \text{et} \quad b_{\mathcal{A}}(x) = \mu_{\mathcal{A}}(-x, 1). \quad (2.1.13)$$

Exemple 2.1.16. Pour l'arrangement \mathcal{A} de 5 hyperplans de 2.1.2, nous avons

$$\mu_{\mathcal{A}}(x, y) = x^2 y^2 - 5x^2 y + 6x^2 + 5xy - 10x + 4,$$

d'où $f_{\mathcal{A}}(x) = \mu_{\mathcal{A}}(-x, -1) = 12x^2 + 15x + 4$ et $b_{\mathcal{A}}(x) = \mu_{\mathcal{A}}(-x, 1) = 2x^2 + 5x + 4$.

△

Nous utilisons ce théorème dans l'article [Del+23] pour calculer le nombre de régions de l'arrangement associé à la diagonale du permuttoèdre, et à k copies de l'arrangement de tresses en position générique. Ces résultats seront présentés dans la section 4.6.

2.2 Complexe d'ordre et topologie du poset

Nous présentons ici une courte introduction à la topologie des posets. Le lecteur souhaitant un traitement plus approfondi de ce sujet pourra se référer à [Wac07] pour la topologie des posets et à [Mun84] pour l'homologie simpliciale.

2.2.1 Complexe d'ordre

Homologie réduite

Considérons un poset combinatoire fini P . À ce poset est associé un complexe de chaînes appelé *complexe d'ordre* dont l'espace vectoriel des m -chaînes est

$$C_m(P) = \mathbb{K}.\{a_0 < \dots < a_m \mid a_i \in \hat{P} \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}\} \quad (2.2.1)$$

et l'application de bord est

$$\begin{aligned} d_m : C_m(P) &\rightarrow C_{m-1}(P) \\ a_0 < \dots < a_m &\mapsto \sum_{i=0}^m (-1)^i a_0 < \dots < \hat{a}_i < \dots < a_m \end{aligned}$$

où $a_0 < \dots < a_m$ est appelée m -chaîne et $a_0 < \dots < \hat{a}_i < \dots < a_m$ est la $m-1$ -chaîne obtenue en enlevant l'élément a_i à la m -chaîne $a_0 < \dots < a_m$. On ajoutera à ce complexe l'espace vectoriel des -1 -chaînes $C_{-1}(P) = \mathbb{K}$, afin de considérer l'homologie *réduite*. L'homologie du poset est l'homologie réduite de son complexe de chaînes :

$$H_m(P) = \ker d_m / \text{Im } d_{m+1}.$$

Au poset est associé de même un complexe de cochaînes en considérant l'application de cobord suivante :

$$\begin{aligned} d^m : C_m(P) &\rightarrow C_{m+1}(P) \\ a_0 < \dots < a_m &\mapsto \sum_{a < a_0} a < a_0 < \dots < a_m + (-1)^{m+1} \sum_{a_m < a} a_0 < \dots < a_m < a \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i+1} \sum_{a_i < a < a_{i+1}} a_0 < \dots < a_i < a < a_{i+1} < \dots < a_m. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Les espaces de cohomologie sont alors donnés par :

$$H^m(P) = \ker d^m / \text{Im } d^{m-1}.$$

Tous mes travaux portent sur l'homologie des posets, sauf les articles [DD25b] et [DD25a] où il est nécessaire de considérer des complexes de cochaînes pour pouvoir définir une structure d'opéade.

Cette définition n'est pas toujours adaptée à la réalité combinatoire du poset. En effet, cette définition d'homologie pour des posets non bornés revient à rajouter, si nécessaire, un minimum et un maximum artificiels qui n'ont alors plus de sens combinatoire. Notamment, dans l'étude de la cohomologie des posets des partitions décorées et plus généralement des espèces en posets opéradiques introduites dans la section 5, les cohomologies qui "ont du sens", c'est-à-dire qui se relie à la duale de Koszul de l'opéade décorant le poset, sont les sommes directes des cohomologies des intervalles maximaux. Nous introduisons ci-dessous les variantes de cohomologies apparaissant dans [DD25b] et [DD25a]

Variantes de cohomologie

Soit $\min(P)$ (resp. $\max(P)$) l'ensemble des éléments minimaux (resp. maximaux) de P . On considère :

$$\begin{aligned} c^m(P) &:= \mathbb{K}.\{a_0 < \dots < a_m \mid a_i \in P, a_0 \in \min(P), a_m \in \max(P)\} \\ \check{c}^m(P) &:= \mathbb{K}.\{a_0 < \dots < a_m \mid a_i \in P, a_0 \in \min(P)\} \\ \hat{c}^m(P) &:= \mathbb{K}.\{a_0 < \dots < a_m \mid a_i \in P, a_m \in \max(P)\} \end{aligned}$$

munis de l'application de cobord définie comme à l'équation (2.2.2) (avec possiblement certaines des sommes vides). On note $h^\bullet(P)$, $\check{h}^\bullet(P)$ et $\hat{h}^\bullet(P)$ la cohomologie des complexes de chaînes $c^\bullet(P)$, $\check{c}^\bullet(P)$ et $\hat{c}^\bullet(P)$ respectivement.

Pour $n \geq 2$, ces groupes de cohomologie se relient aux groupes de cohomologie réduite classique des intervalles maximaux de P :

$$\begin{aligned} h^n(P) &\simeq \bigoplus_{a \in \min(P), b \in \max(P), a < b} \tilde{H}^{n-2}(P_{[a,b]}) \\ \check{h}^n(P) &\simeq \bigoplus_{a \in \min(P)} \tilde{H}^{n-1}(P_{>a}) \\ \hat{h}^n(P) &\simeq \bigoplus_{b \in \max(P)} \tilde{H}^{n-1}(P_{<b}) \end{aligned}$$

En particulier, si P est un intervalle,

$$h^n(P) \simeq \tilde{H}^{n-2}(P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}).$$

Nous renvoyons à [DD25b] pour une interprétation de cette cohomologie en termes de cohomologie relative.

2.2.2 Posets Cohen-Macaulay

Quand le poset a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères, toutes de même dimension, celui-ci est dit *Cohen-Macaulay*. Il a alors un unique groupe de (co)homologie non trivial. Je détaille ici différentes méthodes que j'utilise pour montrer qu'un poset est Cohen-Macaulay.

EL- et CL-épluchabilité

La théorie de l'épluchabilité (*shellability* en anglais) est apparue dans un premier temps pour des complexes simpliciaux purs, c'est-à-dire dont toutes les facettes ont même dimension. Nous nous plaçons ici dans le cadre non pur (correspondant à des posets avec des chaînes maximales de longueurs différentes) développé par Björner et Wachs dans [BW96; BW97].

Définition 2.2.1. Soit Δ un complexe simplicial et F une face de Δ . Le *sous-complexe engendré par F* est le complexe simplicial $\langle F \rangle = \{G \mid G \subseteq F\}$. Un complexe simplicial est *épluchable* s'il existe un ordre total F_1, \dots, F_n de ses facettes tel que $(\bigcup_{i=1}^{k-1} \langle F_i \rangle) \cap \langle F_k \rangle$ soit pur et de dimension $\dim F_k - 1$. Un poset est *épluchable* si son complexe d'ordre l'est.

Un poset est pur si toutes les chaînes maximales ont même longueur, c'est-à-dire le même nombre d'arêtes dans le diagramme de Hasse. On appelle alors *hauteur* du poset cette longueur. Si le poset est pur, l'épluchabilité peut se reformuler directement en termes de poset :

Définition 2.2.2 ([Bjö80]). Soit P un poset borné et pur de hauteur n . Un *épluchage* (*shelling* en anglais) est un ordre total c_1, \dots, c_n sur les chaînes maximales de P tel que pour tout $i < j$, il existe $k < j$ tel que :

$$|c_k \cap c_j| = n - 1 \quad \text{et} \quad c_i \cap c_j \subseteq c_k.$$

Si le poset P admet un épluchage, il est dit *épluchable*.

Exemples 2.2.3. Le poset des partitions, le treillis booléen, le treillis de Tamari [BW97] sont épluchables, ce qui n'est pas le cas de l'ordre faible. \triangle

L'épluchabilité n'est pas un invariant topologique (un complexe simplicial épluchable peut être homotope à un complexe simplicial non épluchable) mais a des conséquences topologiques fortes :

Proposition 2.2.4 ([BW96]). *Tout poset épluchable est Cohen-Macaulay.*

Pour montrer de manière combinatoire l'épluchabilité d'un poset, on pourra utiliser les épluchabilités suivantes :

Définition 2.2.5. Un *EL-étiquetage* d'un poset P est une application $\lambda : E(P) \rightarrow \Lambda$, où Λ est un poset et $E(P)$ est l'ensemble des arêtes du diagramme de Hasse de P (de manière équivalente, l'ensemble des relations de couverture du poset P).

Un *CL-étiquetage* d'un poset P est une application λ qui associe à tout couple $(a \triangleleft b, c)$, où c est une chaîne maximale de P contenant $a \triangleleft b$, un élément du poset Λ . Il est de plus requis que si deux chaînes maximales c et c' contiennent toutes les deux $a \triangleleft b$ et coïncident sur les éléments plus petits que a , alors $\lambda(a \triangleleft b, c) = \lambda(a \triangleleft b, c')$.

Étant donné un poset P et un étiquetage (EL ou CL) λ de P , à toute chaîne maximale $c = a_0 < \dots < a_n$ peut être associé un mot $\lambda(c) := \lambda(a_0 \triangleleft a_1) \dots \lambda(a_{n-1} \triangleleft a_n)$. L'ordre sur Λ s'étend en un ordre lexicographique sur les mots $\lambda(c)$ associés aux chaînes maximales du poset. La chaîne est *croissante* si $\lambda(a_{i-1}, a_i) < \lambda(a_i, a_{i+1})$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

Définition 2.2.6. Un poset P est *EL-épluchable* (*EL-shellable* en anglais) (resp. *CL-épluchable*) s'il existe un EL-étiquetage (resp. CL-étiquetage) λ tel que, pour tout intervalle $[a; b]$ de P , il existe une unique chaîne maximale croissante c , dont le mot $\lambda(c)$ est de plus minimal.

Exemples 2.2.7. • Le treillis booléen admet l'étiquetage EL suivant : l'arête $(V, V \cup \{v\})$ est étiquetée par v (voir [Bjö80]).

- Les posets des partitions et de partitions non croisées admettent l'étiquetage EL suivant : l'arête entre une partition $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ et la partition obtenue en fusionnant les parts π_i et π_j de π est étiquetée par $\max(\min \pi_i, \min \pi_j)$. Ce résultat a été montré par Gessel dans le cas des partitions et Björner et Edelman dans le cas non croisé, voir [Bjö80].
- Les treillis de m -Tamari admettent un étiquetage EL (voir [Müh15]).

\triangle

Proposition 2.2.8 ([BW96]). *Tout poset EL-shellable est CL-shellable. Tout poset CL-shellable est Cohen-Macaulay.*

Trouver un EL- ou un CL-étiquetage peut s'avérer difficile. Rappelons qu'un *atome* d'un poset est un élément couvrant un élément minimal du poset. Le critère suivant, équivalent à la CL-épluchabilité, peut s'avérer plus facile à vérifier que celle-ci.

Définition 2.2.9 ([BW83; BW97]). Un poset borné P admet un *ordre récursif sur ses atomes* si

- ses chaînes maximales sont de longueur 1
- ou alors s'il existe un ordre total a_1, \dots, a_n sur les atomes de P tel que :

1. Pour tout $1 \leq j \leq n$, l'intervalle $[a_j, \hat{1}]$ admet un ordre récursif sur ses atomes dans lequel les atomes de $[a_j, \hat{1}]$ qui appartiennent à un $[a_i, \hat{1}]$ pour un $i < j$ sont minimaux.
2. Pour tout $i < j$, si $a_i, a_j < y$ alors il existe $k < j$ et un atome z de $[a_j, \hat{1}]$ tels que $a_k < z \leq y$.

Théorème 2.2.10 ([BW83; BW97]). *Un poset borné P admet un ordre récursif sur ses atomes si et seulement si il est CL-épluchable.*

S'inspirant des treillis géométriques, Björner et Wachs ont formulé la propriété suivante, qui implique l'existence d'un ordre récursif sur les atomes.

Définition 2.2.11. Un poset P est *semi-modulaire* si pour tout intervalle I de P et tous $b_1, b_2 \in I$ qui couvrent un élément $a \in I$, il existe un élément $c \in I$ qui couvre à la fois b_1 et b_2 . Un poset est *totalemment semi-modulaire* si tout intervalle fermé dans le poset est semi-modulaire.

La notion de semi-modularité est reliée aux notions précédentes par le théorème suivant.

Théorème 2.2.12. [BW83, Theorem 5.1] *Tout ordre sur les atomes d'un poset totalemment semi-modulaire est un ordre récursif sur les atomes.*

Nous récapitulons sur la figure 2.2.1 les différents liens entre ces notions.

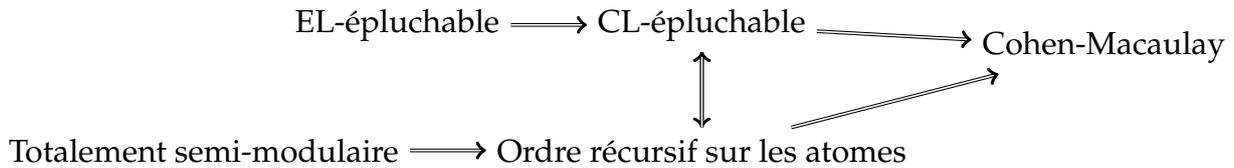


FIGURE 2.2.1 – Implications des propriétés d'épluchabilité

Une variante d'épluchabilité

Nous avons introduit dans [DJR22] une manière de montrer l'épluchabilité, variante de l'ordre récursif sur les atomes.

Lemme 2.2.13 (adapté de [DJR22]). *Soit P un poset. Pour tout élément a de P , l'ensemble des éléments couvrant a est muni d'un ordre total \prec_a . Supposons que pour tous $a, b, b', c \in P$ tels que $a \triangleleft b \triangleleft c$, $a \triangleleft b'$, et $b' \prec_a b$:*

- *ou bien il existe $b'' \in P$ tel que $a \triangleleft b'' \triangleleft c$ et $b'' \prec_a c$,*
- *ou bien il existe $c' \in P$ tel que $b \triangleleft c' \leq b' \vee c$ et $c' \prec_b c$.*

Alors P est épluchable.

Ce lemme est illustré sur la figure 2.2.2, où les arêtes droites représentent des relations de couverture, les zigzags représentent une relation d'ordre et l'existence des arêtes magentas, bleues et violette implique ou bien celle des vertes ou bien des orange.

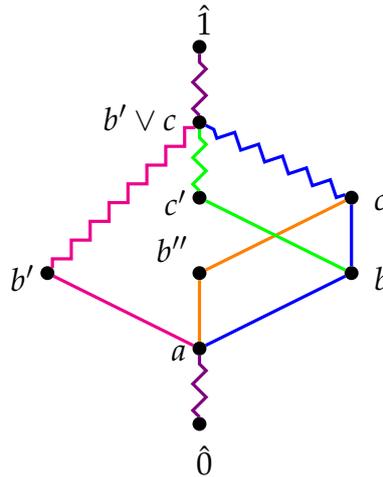


FIGURE 2.2.2 – Diagramme de Hasse illustrant le lemme 2.2.13.

Lemme des fibres de Quillen

Nous finissons cette section topologique avec un lemme utilisé notamment dans [DJR22; DD25a] et à la section 5.7.

Lemme 2.2.14 ([Qui78]). Soient P et Q deux posets et un morphisme de posets $f : P \rightarrow Q$. Le poset P a le même type d'homotopie que le poset Q si et seulement si les fibres $f^{-1}(Q_{\leq q})$ sont contractiles.

2.3 Espèces de structure

Les espèces de structures ont été introduites par Joyal [Joy81] au début des années 1980. Le lecteur pourra se référer à [BLL98] pour une introduction plus détaillée sur ce sujet. Pour inclure les partitions semi-pointées qui seront traitées à la partie 2.6.4, nous formulons une version légèrement plus générale des espèces qui correspond aux opérades colorées de [Van04].

Définition 2.3.1. Soit k un entier strictement positif. Une k -espèce vectorielle, appelée aussi k -espèce linéaire, (resp. *ensembliste*) est un foncteur $\mathbb{F} : \text{Bij}^k \rightarrow \text{Vect}$ (resp. $\mathbb{F} : \text{Bij}^k \rightarrow \text{Set}$) où Bij est la catégorie des ensembles finis et bijections, Set est la catégorie des ensembles finis et Vect est la catégorie des \mathbb{K} -espaces vectoriels. Une 1-espèce sera appelée plus simplement une espèce.

Étant donnée une espèce \mathbb{F} , l'espèce \mathbb{F}^+ des \mathbb{F} -structures non vides est définie sur tout ensemble fini E par $\mathbb{F}^+(E) = \mathbb{F}(E)$ si $E \neq \emptyset$ et $\mathbb{F}^+(E) = \{0\}$ sinon.

Exemples 2.3.2. Les applications suivantes sont des k -espèces (avec $k = 1$ après la première ligne) :

Définition	Nom	Notation
$(E_1, \dots, E_k) \mapsto \delta_{(E_1, \dots, E_k) = (\emptyset, \dots, \emptyset)} \mathbb{K}$	Unité	$\mathbb{1}$
$E \mapsto \delta_{ E =1} \mathbb{K}$	Singleton	\mathbb{X}
$E \mapsto \mathbb{K}$	Ensembles	\mathbb{E}
$E \mapsto \mathbb{K}^{\otimes E}$	Listes	\mathbb{L}
$E \mapsto \mathbb{K}.E$	Ensembles pointés	\mathbb{E}^\bullet ou Perm
$E \mapsto \mathbb{K}.\mathcal{RT}(E)$	Arbres	\mathbb{A}

où $\mathcal{RT}(E)$ est l'ensemble des arbres de Cayley (arbres enracinés non plans) sur E . L'espèce des ensembles non vides est associée à l'opérade Comm encodant les algèbres commutatives, celle des listes non vides, à l'opérade Assoc encodant les algèbres associatives et celle des arbres non vides, aux opérades NAP et PreLie encodant respectivement les algèbres NAP et pré-Lie.

L'application $\mathbb{A}_{r,s}$, qui associe à deux ensembles E_1 et E_2 l'ensemble des forêts enracinées sur E_1 et E_2 dont les racines sont dans E_1 et les autres sommets dans E_2 , est une 2-espèce (voir figure 2.3.1). \triangle

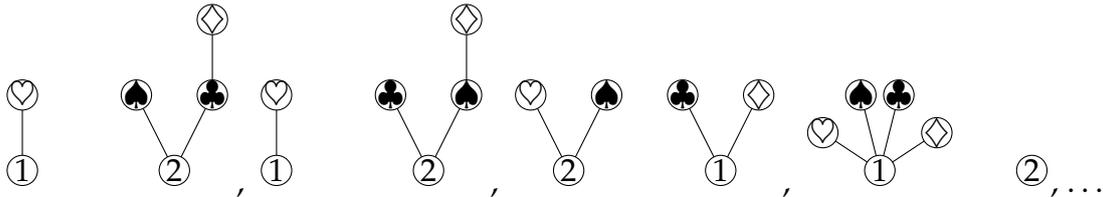


FIGURE 2.3.1 – Éléments de l'image par l'espèce $\mathbb{A}_{r,s}$ des ensembles $\{1,2\}$ et $\{\diamond, \clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$

À toute espèce ensembliste \mathbb{F} peut être associée une espèce vectorielle, en considérant l'espèce $\tilde{\mathbb{F}}(E) = \mathbb{K} \cdot \mathbb{F}(E)$. Par contre, il y a strictement plus d'espèces vectorielles que d'espèces ensemblistes. Par exemple, l'espèce qui a un ensemble E associé l'algèbre de Lie engendrée par les crochets de Lie d'exactly $|E|$ éléments de E n'a aucune espèce ensembliste correspondante. Décrivons dans un premier temps $\text{Lie}(E)$ pour E petit.

- $\text{Lie}(\{1\}) = \mathbb{K}$ et $\text{Lie}(\{1,2\}) = \mathbb{K} \cdot \{[1,2]\}$ (représentation signature).
- $\text{Lie}(\{1,2,3\}) = \mathbb{K} \cdot \{[[1,2],3], [[1,3],2]\}$: c'est l'unique représentation irréductible de \mathfrak{S}_3 de dimension 2 (correspondant aux isométries d'un triangle équilatéral). Notamment, le caractère évalué en (123) est -1 : il est impossible de trouver une espèce ensembliste dont le nombre de points fixes soit -1 .

On définit les opérations suivantes sur les k -espèces :

Définition 2.3.3. Soient \mathbb{F} et \mathbb{G} deux k -espèces. Nous définissons

- $\partial_p \mathbb{F}(E_1, \dots, E_k) = \mathbb{F}(E_1, \dots, E_{p-1}, E_p \sqcup \{\bullet\}, E_{p+1}, \dots, E_k)$, (dérivée)
- $(\mathbb{F} + \mathbb{G})(E_1, \dots, E_k) = \mathbb{F}(E_1, \dots, E_k) \oplus \mathbb{G}(E_1, \dots, E_k)$, (addition)
- $(\mathbb{F} \cdot \mathbb{G})(E_1, \dots, E_k) = \bigoplus_{\substack{E_i^1 \sqcup E_i^2 = E_i \\ 1 \leq i \leq k}} \mathbb{F}(E_1^1, \dots, E_k^1) \otimes \mathbb{G}(E_1^2, \dots, E_k^2)$, (produit)
- $(\mathbb{F} \otimes_H \mathbb{G})(E_1, \dots, E_k) = \mathbb{F}(E_1, \dots, E_k) \otimes \mathbb{G}(E_1, \dots, E_k)$ avec l'action diagonale du groupe symétrique, (produit de Hadamard)
- Si \mathbb{F} est une 1-espèce et \mathbb{G} une k -espèce vérifiant $\mathbb{G}(\emptyset, \dots, \emptyset) = \{0\}$, $(\mathbb{F} \circ \mathbb{G})(E_1, \dots, E_k) = \bigoplus_{\pi \in \Pi(\sqcup_{i=1}^k E_i)} \mathbb{F}(\pi) \otimes \bigotimes_{J \in \pi} \mathbb{G}(J \cap E_1, \dots, J \cap E_k)$, où pour tout ensemble fini E , $\Pi(E)$ est l'ensemble des partitions de E (voir section 2.6). (substitution)

Le produit $F \cdot G$ est aussi noté $F \times G$.

Exemples 2.3.4. L'espèce \mathbb{A}^+ de l'exemple 2.3.2 satisfait la relation suivante :

$$\mathbb{A}^+ = \mathbb{X} \cdot (\mathbb{E} \circ \mathbb{A}^+),$$

L'espèce $\mathbb{A}_{r,s}$ de l'exemple 2.3.2 satisfait la relation suivante :

$$\mathbb{A}_{r,s} = \mathbb{E} \circ (\mathbb{X}_1 \cdot \mathbb{E}(\mathbb{A}_2)),$$

où les 2-espèces \mathbb{X}_1 et \mathbb{A}_2 sont définies par : $\mathbb{X}_1(E_1, E_2) = \mathbb{X}(E_1)$ et $\mathbb{A}_2(E_1, E_2) = \mathbb{A}(E_2)$. \triangle

À toute k -espèce peuvent être associées les séries suivantes :

Définition 2.3.5. Soit \mathbb{F} une k -espèce. La série génératrice (exponentielle) associée à \mathbb{F} est :

$$\mathbf{C}_{\mathbb{F}}(x_1, \dots, x_k) = \sum_{n_1, \dots, n_k \geq 0} \dim(\mathbb{F}(\llbracket n_1 \rrbracket, \dots, \llbracket n_k \rrbracket)) \prod_{i=1}^k \frac{x_i^{n_i}}{n_i!}.$$

La série indicatrice de cycles de \mathbb{F} est la série formelle en une infinité de variables $\mathbf{p}^i = (p_{i,1}, p_{i,2}, p_{i,3}, \dots)$ pour $1 \leq i \leq k$, définie par :

$$\mathbf{Z}_{\mathbb{F}}(\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^k) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 0 \\ (n_1, \dots, n_k) \neq (0, \dots, 0)}} \frac{1}{n_1! \dots n_k!} \left(\sum_{\substack{\sigma^i \in \mathfrak{S}_{n_i} \\ 1 \leq i \leq k}} \mathbb{F}^{\sigma^1, \dots, \sigma^k} \prod_{i=1}^k p_{i,1}^{\sigma_1^i} p_{i,2}^{\sigma_2^i} p_{i,3}^{\sigma_3^i} \dots \right),$$

où $\mathbb{F}^{\sigma^1, \dots, \sigma^k}$ est la dimension de l'espace des invariants par l'action de $\sigma^1 \times \dots \times \sigma^k$ sur $\llbracket n_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket n_k \rrbracket$ et σ_j^i est le nombre de cycles de longueur j de σ^i .

Exemples 2.3.6. Les principales séries indicatrices de cycles associées aux espèces présentées à l'exemple 2.3.2 sont :

$$\mathbf{Z}_{\mathbb{1}} = 1, \quad \mathbf{Z}_{\mathbb{X}} = p_1, \quad \mathbf{Z}_{\mathbb{E}} = \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{p_k}{k}\right), \quad \mathbf{Z}_{\mathbb{L}} = \frac{1}{1-p_1} \quad \mathbf{Z}_{\mathbb{E}^\bullet} = p_1 \times \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{p_k}{k}\right).$$

\triangle

Définition 2.3.7. Pour $f = f(\mathbf{p})$ et $g = g(\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^k)$, deux séries indicatrices de cycles, le pléthysme $f \circ g$ est le morphisme d'algèbre engendré par :

$$p_i \circ g(\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^k) = g((p_{1,i}, p_{1,2i}, p_{1,3i}, \dots), \dots, (p_{k,i}, p_{k,2i}, p_{k,3i}, \dots)). \quad (2.3.1)$$

La suspension de g est la série :

$$\Sigma g = -g((-p_{1,1}, -p_{1,2}, \dots), \dots, (-p_{k,1}, -p_{k,2}, -p_{k,3}, \dots)). \quad (2.3.2)$$

Les séries associées aux espèces satisfont les relations suivantes :

Proposition 2.3.8. Soient \mathbb{F} et \mathbb{G} deux k -espèces et \mathbb{H} une espèce. Leurs séries associées satisfont :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbb{F}+\mathbb{G}} &= \mathbf{C}_{\mathbb{F}} + \mathbf{C}_{\mathbb{G}}, & \mathbf{C}_{\mathbb{F} \cdot \mathbb{G}} &= \mathbf{C}_{\mathbb{F}} \times \mathbf{C}_{\mathbb{G}}, & \mathbf{Z}_{\mathbb{F}+\mathbb{G}} &= \mathbf{Z}_{\mathbb{F}} + \mathbf{Z}_{\mathbb{G}}, & \mathbf{Z}_{\mathbb{F} \cdot \mathbb{G}} &= \mathbf{Z}_{\mathbb{F}} \times \mathbf{Z}_{\mathbb{G}}, \\ \text{et si } \mathbb{G}(\emptyset, \dots, \emptyset) &= \{0\}, & \mathbf{C}_{\mathbb{H} \circ \mathbb{G}} &= \mathbf{C}_{\mathbb{H}} \circ \mathbf{C}_{\mathbb{G}}, & \mathbf{Z}_{\mathbb{H} \circ \mathbb{G}} &= \mathbf{Z}_{\mathbb{H}} \circ \mathbf{Z}_{\mathbb{G}}. \end{aligned}$$

Exemples 2.3.9. Les relations suivantes découlent de la dualité de Koszul des opérades :

$$\Sigma \text{Lie} \circ \mathbb{E}^+ = \mathbb{E}^+ \circ \Sigma \text{Lie} = \mathbb{X} \quad (2.3.3)$$

$$\Sigma \mathbb{L}^+ \circ \mathbb{L}^+ = \mathbb{L}^+ \circ \Sigma \mathbb{L}^+ = \mathbb{X} \quad (2.3.4)$$

$$\Sigma \mathbb{E}^\bullet \circ \mathbb{A}^+ = \mathbb{A}^+ \circ \Sigma \mathbb{E}^\bullet = \mathbb{X} \quad (2.3.5)$$

△

Les espèces de structure généralisent les séries génératrices et permettent des calculs de caractères pour l'action de groupes symétriques, notamment sur la cohomologie comme nous le détaillons à la section suivante.

2.4 Action du groupe symétrique sur l'homologie d'un poset

Nous établissons maintenant le lien entre l'action du groupe symétrique sur l'homologie d'un poset P gradué et celle sur les k -multichaînes de P , pour $k \geq 1$, en reprenant les résultats de [Del17]. Pour ce faire, nous avons besoin d'introduire des espèces auxiliaires.

La notion d'espèce admet plusieurs variantes, l'une d'entre elles étant les espèces en posets. Une *espèce en posets* $P : \text{Bij} \rightarrow \text{Pos}$ est un foncteur de la catégorie Bij des ensembles finis et bijections dans la catégorie des posets. À tout ensemble fini E , l'espèce en poset P associe un poset $P(E)$ tel que pour toute bijection $\sigma : E \rightarrow F$, l'application $P(\sigma) : P(E) \rightarrow P(F)$ soit un isomorphisme de posets. Étant fixée une espèce en posets P , on peut lui associer l'espèce (vectorielle) des k -multichaînes

$$\mathbb{MC}_k(P(V)) := \mathbb{K}.\{(a_1, \dots, a_k) \mid a_1, \dots, a_k \in P(V) \text{ et } a_i \leq a_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq k-1\}. \quad (2.4.1)$$

On note aussi $\mathbb{C}_k(P(V))$ l'espèce vectorielle des k -chaînes de $P(V)$ et $\mathbb{H}_k(P(V))$ l'espèce vectorielle associée au k -ième groupe d'homologie (réduite) de $P(V)$. Notons que $\mathbb{C}_{-1}(P(V)) = \mathbb{K}$ et $\mathbb{C}_0(P(V)) = \mathbb{K}.P(V)$, l'espace vectoriel engendré par les éléments de $P(V) \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$.

La série génératrice $\mathbb{C}_{\mathbb{MC}_k}$ est un polynôme en k appelé *polynôme zeta* introduit par Stanley [Sta74] et développé par Edelman [Ede80b]. Le lien entre polynôme zêta et nombres de Möbius apparaît par exemple dans [Sta12, Prop 3.12.1] pour les posets bornés ou sans maximum ni minimum (premier et dernier cas de la proposition 2.4.2). Nous étendons ici doublement ce résultat : à des posets quelconques et au caractère de la représentation (et non plus uniquement sa dimension). Ce raisonnement apparaissait déjà dans [Oge13a] pour calculer l'action du groupe symétrique sur l'unique groupe d'homologie non trivial du poset des hyperarbres.

La formule des traces de Hopf [Wac07, Theorem 2.3.9] lie les k -chaînes et l'homologie du poset comme suit :

$$\chi(P(V)) := \sum_{i=0}^{\dim P} (-1)^i \mathbb{H}_i(P(V)) = \sum_{i=-1}^{\dim P} (-1)^i \mathbb{C}_i(P(V)), \quad (2.4.2)$$

où $\chi(P(V))$ est une espèce virtuelle, c'est-à-dire la différence de deux espèces vectorielles. On appelle $\chi(P(V))$ la *caractéristique d'Euler généralisée* de $P(V)$.

Proposition 2.4.1 ([Del17]). *Les espèces des k -chaînes et des k -multichaînes, pour $k \geq 1$, sont reliées par :*

- si P est borné,

$$\mathbb{MC}_k(P(V)) = \sum_{i=-1}^{\dim P} \binom{k+1}{i+2} \mathbb{C}_i(P(V)), \quad (2.4.3)$$

- si P n'est pas borné mais a un minimum ou un maximum,

$$\mathbb{MC}_k(P(V)) = \sum_{i=-1}^{\dim P} \binom{k}{i+1} \mathbb{C}_i(P(V)), \quad (2.4.4)$$

- sinon,

$$\mathbb{MC}_k(P(V)) = \sum_{i=0}^{\dim P} \binom{k-1}{i} \mathbb{C}_i(P(V)). \quad (2.4.5)$$

Les membres droits des équations (2.4.3), (2.4.4) et (2.4.5) sont des polynômes en k : ils sont définis pour tout entier relatif k . Utilisant $\binom{-1}{i} = (-1)^i$, il en découle de suite :

Proposition 2.4.2 ([Del17]). *La caractéristique d'Euler généralisée du poset P est donnée par :*

- si P est borné,

$$\chi(P(V)) = \mathbb{MC}_{-2}(P(V)) \quad (2.4.6)$$

- si P n'est pas borné mais a un minimum ou un maximum,

$$\chi(P(V)) = -\mathbb{MC}_{-1}(P(V)) \quad (2.4.7)$$

- sinon,

$$\chi(P(V)) = \mathbb{MC}_0(P(V)) - 1. \quad (2.4.8)$$

Cette dernière proposition est particulièrement intéressante quand le poset est Cohen-Macaulay. En effet, dans ce cas, la caractéristique d'Euler généralisée est, au signe près, le caractère pour l'action du groupe symétrique sur l'unique groupe de (co)homologie non trivial.

Remarque 2.4.3. La proposition 2.4.2 est formulée dans [Del17] dans le cadre plus général d'un poset P sur lequel un groupe G agit. Nous la formulons ici dans le cadre du groupe symétrique dans un souci de simplification.

2.5 Hypergraphes et hyperarbres

La notion d'hypergraphe a été introduite à la fin des années 1980 par Berge [Ber89a] comme une généralisation des graphes. Un hypergraphe est un couple (V, E) formé d'un ensemble de sommets V et d'un ensemble d'(hyper)arêtes E , chaque arête $e \in E$ étant un sous-ensemble de V de taille au moins 2. Les hypergraphes sont à la base des polytopes d'hypergraphes, une description des nestoèdres de Postnikov [Pos09] introduite par Došen et Petrić dans [DP15]. Nous en rappelons la définition à la section 4.2 avant de présenter les résultats de [CDO25b] et [CDO25a] dans les sections 4.4 et 4.5.

Les hyperarbres sont des hypergraphes connexes sans cycles. Les arêtes des hypergraphes étant des ensembles, on peut les décorer par une espèce ensembliste \mathbb{F} , c'est-à-dire choisir pour toute arête e un élément de $\mathbb{F}(e)$. J'ai proposé dans [Oge13b] un dénombrement des hyperarbres décorés à l'aide d'un codage de Prüfer.

Étant fixé un ensemble fini V , l'ensemble des hyperarbres sur V est muni d'un ordre partiel donné par l'inclusion des arêtes : un hyperarbre H_1 est plus petit qu'un hyperarbre H_2 si les arêtes de H_1 sont l'union d'arêtes de H_2 . Le poset des hyperarbres sur $V \cup \{0\}$ est noté $HT(V)$. Ce poset des hyperarbres a été introduit dans [MM96] et étudié plus en

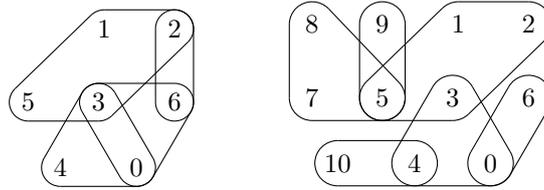


FIGURE 2.5.1 – À gauche : un hypergraphe, à droite : un hyperarbre

détails dans [Bra+01; MM04; JMM07; JMM06] et enfin [Oge13a]. Ce dernier article a motivé les travaux [DD25b] et [DD25a]. Le poset des hyperarbres est un exemple d'espèce en posets opéradiques (voir 5.7). L'article [Oge13a] a fait le lien entre la structure anti-cyclique de l'opérade PreLie , c'est-à-dire une action de \mathfrak{S}_{n+1} sur $\mathbb{A}^+(\llbracket n \rrbracket)$ et l'homologie du poset des hyperarbres. Dans ce mémoire, nous nous intéressons uniquement à l'action de \mathfrak{S}_n , ce qui justifie l'ajout d'un sommet 0 sur lequel le groupe symétrique n'agit pas. Le poset des hyperarbres sur trois sommets est présenté à la figure 2.5.2.

2.6 Partitions décorées

Comme précisé en introduction, les posets de partitions et de leurs variantes décorées sont omniprésents dans mon travail. Ils apparaissent dans [Del17] où j'étudie les posets des partitions semi-pointées, dans [BDH21] où nous généralisons les résultats de Vallette sur les posets des partitions, dans [DJR22] qui repose sur l'étude des 2-partitions non croisées, dans [Del+23] où l'étude des arrangements d'hyperplans se ramène à l'étude du treillis des plats qui est un poset des partitions, dans [DD25b] et [DD25a] où le poset des partitions est l'objet terminal de la catégorie des espèces en posets opéradiques. Dans cette section, nous reprenons les définitions et résultats de la littérature sur ces posets. Nous retardons à la section 3.2 la définition de posets des partitions bidécorées qui nécessite une structure d'opérade et non seulement d'espèces. Les exemples présentés ci-dessous sont cependant tous des exemples de posets des partitions décorés par une opérade.

2.6.1 Partitions d'ensemble

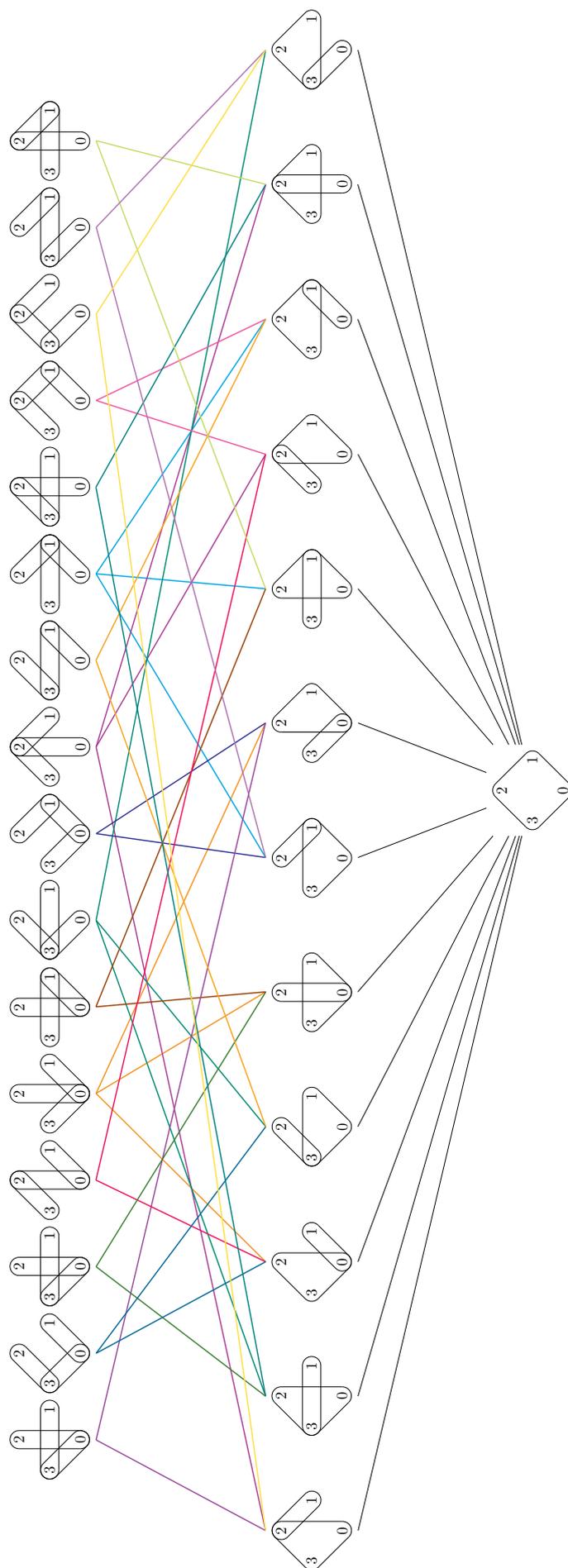
La présentation du poset des partitions d'un ensemble fini non vide E a été faite lors de l'introduction (§1.2). Nous rappelons maintenant des résultats classiques sur les posets des partitions (voir par exemple [Bir40; Bon+86]) :

Proposition 2.6.1. *Soit $\pi \in \Pi(E)$. L'intervalle $[\hat{0}; \pi]$ est isomorphe au poset $\Pi(\pi)$. L'intervalle $[\pi; \hat{1}]$ est isomorphe au poset $\prod_{p \in \pi} \Pi(p)$. La fonction de Möbius est donnée pour $\pi \leq \tau$ par*

$$\mu_{\Pi_n}(\pi, \tau) = \prod_{p \in \pi} (-1)^{|p/\tau|-1} (|p/\tau| - 1)!,$$

où p/τ est l'ensemble des parts de τ incluses dans p .

La notation p/τ vient du fait qu'on peut le voir comme le quotient de l'ensemble p par la relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les parts de τ . Par exemple, pour $\pi = \{\pi_1, \pi_2\}$ avec $\pi_1 = \{1, 3, 4, 5\}$ et $\pi_2 = \{2, 6\}$ et $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5\}$ avec $\tau_1 = \{1, 4\}$, $\tau_2 = \{2, 6\}$, $\tau_3 = \{3\}$, $\tau_4 = \{5\}$ et $\tau_5 = \{6\}$, nous avons $\pi_1/\tau = \{\tau_1, \tau_3, \tau_4\}$ et $\pi_2/\tau = \{\tau_2, \tau_5\}$.

FIGURE 2.5.2 – Poset des hyperarbres sur trois sommets HT_3

2.6.2 Compositions d'ensemble

Une première variante du poset des partitions est le poset des compositions d'ensemble. Une *composition* (ou partition ordonnée) $\vec{\pi}$ d'un ensemble fini E est une liste (π_1, \dots, π_k) telle que $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ soit une partition de l'ensemble E . Une composition $\vec{\pi}$ est plus petite qu'une composition $\vec{\tau}$ si chaque part de $\vec{\pi}$ est l'union de parts consécutives de $\vec{\tau}$. On note $\text{Assoc}\Pi(E)$ le poset des compositions de l'ensemble E . Si E est de taille n , ce poset a un unique minimum correspondant à la partition en une part, $2^n - 2$ atomes correspondant aux sous-ensembles stricts non vides de E (composition de E en 2 parts), et $n!$ éléments maximaux correspondant aux permutations de E (compositions de E en n parts). Ce poset apparaît notamment comme treillis des faces du permutoèdre (ordonnées par inclusion). Nous le représentons à droite de la figure 4.6.1.

2.6.3 Partitions pointées

Une deuxième variante du poset des partitions est le poset des partitions pointées. Une *partition pointée* π^\bullet d'un ensemble fini E est une partition $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ de E munie pour chaque part π_k d'un élément distingué de π_k appelé *pointage*. Une partition pointée π^\bullet est plus petite qu'une partition pointée τ^\bullet si $\pi \leq \tau$ et les pointages de π sont des pointages de τ . On note $\Pi^{\text{Perm}}(E)$ le poset des partitions pointées de l'ensemble E . Ce poset a été introduit et étudié dans [CV06]. Si E est de taille n , ce poset a n éléments minimaux et un unique maximum. Il est Cohen-Macaulay et son unique groupe d'homologie (la somme des homologies de ses intervalles maximaux) est isomorphe en tant qu'espace à ΣA^+ . D'un point de vue opéradique, ce poset peut être vu comme un poset des partitions décorées à droite par l'opérade Perm (voir 3.2.1). Son homologie est alors donnée par la suspension de l'opérade PreLie qui est la duale de Koszul de l'opérade Perm (voir [CV06] et [Val07]).

2.6.4 Partitions semi-pointées

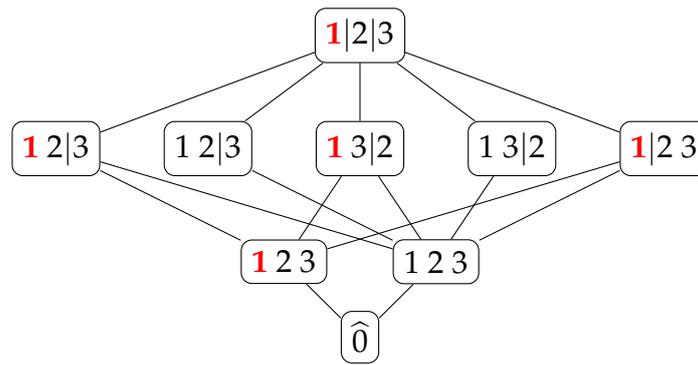
Je présente maintenant les résultats obtenus dans [Del17] et [Del15b] qui consistent en l'étude des posets des partitions semi-pointées. Ces posets sont apparus lors de l'étude des intervalles dans le poset des hyperarbres [Del14]. Les posets des partitions semi-pointées peuvent être décrits comme des posets des partitions décorées à droite par une opérade 2-colorée, ou en d'autres termes une opérade sur une 2-espace (voir [Van04]). Je préfère néanmoins présenter ici une exposition plus directe et renvoie le lecteur intéressé à [Del17] pour plus de détails.

Soient E_1 et E_2 deux ensembles finis. Une *partition semi-pointée* π de E_1 et E_2 est une partition de $E_1 \sqcup E_2$ telle que pour toute part $p \in \pi$:

- Si $p \subseteq E_1$, la part p admet un pointage x_p (comme dans le cas des partitions pointées de la section 2.6.3)
- Sinon, la part p est ou bien pointée en un des éléments de $p \cap E_1$ ou bien non pointée (pour unifier les notations, on dira qu'elle est alors "pointée en *").

Une (n, p) -partition semi-pointée est une partition semi-pointée de $E_1 = \{1, \dots, p\}$ et $E_2 = \{p+1, \dots, n\}$. Nous noterons en gras rouge l'élément pointé de chaque part (s'il existe). Une partition semi-pointée π est plus petite qu'une partition pointée τ si $\pi \leq \tau$ et les pointages de chaque part $\pi_k = \bigcup_{i=1}^{p_k} \tau_{j_i}$ de π sont choisis parmi les pointages de $\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_{p_k}}$.

Exemple 2.6.2. Le poset des $(3, 1)$ -partitions semi-pointées est présenté figure 2.6.1. △

FIGURE 2.6.1 – Poset $\widehat{\Pi}_{3,1}$.

Nous notons $\Pi(E_1, E_2)$ le poset des partitions semi-pointées sur E_1 et E_2 et $\Pi_{n,p} := \Pi(\llbracket n \rrbracket, \llbracket p \rrbracket)$. Les posets $\Pi_{n,n}$ et $\Pi_{n,n-1}$ sont isomorphes aux posets des partitions pointées. Les intervalles maximaux de $\Pi_{n,p}$ dont le minimum $m_{n,p}^i$ est la partition en une part pointée en un entier i de $\llbracket n \rrbracket$ sont tous isomorphes : on les note $\Pi_{n,p}^i$. Nous notons aussi $\Pi_{n,p}^*$ l'intervalle maximal de $\Pi_{n,p}$ dont le minimum n'est pas pointé : il est isomorphe au poset Π_n . La partition dont toutes les parts sont de taille 1, notée π_{E_1, E_2} , est le maximum de $\Pi(E_1, E_2)$. Enfin, nous notons $\widehat{\Pi}(E_1, E_2)$ et $\widehat{\Pi}_{n,p}$ les intervalles minimaux contenant respectivement $\Pi(E_1, E_2)$ et $\Pi_{n,p}$, c'est-à-dire ces posets augmentés d'un minimum noté $\hat{0}$.

Théorème 2.6.3 ([Del17]). *Les posets $\widehat{\Pi}_{n,p}$, $\Pi_{n,p}^*$ et $\Pi_{n,p}^1$ sont totalement semi-modulaires donc Cohen-Macaulay.*

Les dimensions des uniques groupes d'homologie de ces posets sont :

$$\dim \widetilde{H}_{p+\ell-3}(\Pi_{p+\ell,p}^1) = \frac{(p+\ell-1)!}{(p-1)!} (p+\ell)^{p-1}, \quad (2.6.1)$$

$$\dim \widetilde{H}_{p+\ell-2}(\widehat{\Pi}_{E_1 \cup E_2, E_1}) = \frac{(p+\ell-1)!}{(p-1)!} (p+\ell-1)^{p-1}. \quad (2.6.2)$$

Théorème 2.6.4 ([Del17]). *Soit σ une permutation du sous-groupe de Young $\mathfrak{S}_{E_1} \times \mathfrak{S}_{E_2}$ avec λ_i i -cycles sur E_1 et μ_j j -cycles sur E_2 . Le caractère de l'action de σ sur la somme des groupes d'homologie des intervalles maximaux de type $\Pi_{n,p}^1$ est :*

$$\left((-1)^{\lambda_1 + \mu_1 - 1} \frac{(\lambda_1 + \mu_1 - 1)!}{(\lambda_1 - 1)!} (\lambda_1 + \mu_1)^{\lambda_1 - 1} \right) \times \prod_{l \geq 2} (-1)^{\mu_l + \lambda_l - 1} \frac{(\lambda_l + \mu_l - 1)!}{(\lambda_l - 1)!} l^{\mu_l} \alpha_l^{\lambda_l - 1} (-\alpha_l + (\lambda_l + \mu_l)l), \quad (2.6.3)$$

où $\alpha_l = \sum_{n|l} n(\lambda_n + \mu_n)$.

Le caractère de l'action de σ sur la somme des groupes d'homologie des intervalles maximaux est :

$$\left((-1)^{\lambda_n + \mu_n - 1} n^{\mu_n} \alpha_n^{\lambda_n - 1} \frac{(\mu(k)\mu_k + \delta_{k=1}\lambda_1)(\lambda_n + \mu_n - 1)!}{\lambda_n!} \right) \times \prod_{\substack{l > n \\ \lambda_l + \mu_l > 0}} (-1)^{\lambda_l + \mu_l - 1} l^{\mu_l} \alpha_l^{\lambda_l - 1} \frac{(\lambda_l + \mu_l - 1)!}{\lambda_l!} \lambda_l [l(\lambda_l + \mu_l) - \alpha_l]. \quad (2.6.4)$$

où $\alpha_l = \sum_{n|l} n(\lambda_n + \mu_n)$, $n = \min\{l | \lambda_l + \mu_l > 0\}$, μ est la fonction de Möbius arithmétique, $k = \max\{p | \mu(p) \neq 0 \text{ et } p|n\}$ et $\delta_{k=1}$ est le symbole de Kronecker.

Nous finissons cette section par une étude de l'algèbre de Hopf d'incidence des partitions semi-pointées. En effet, les intervalles des posets des partitions semi-pointées se décomposent eux-mêmes en produit de posets des partitions semi-pointées (voir [Del17]). L'algèbre de Hopf d'incidence obtenue peut être décrite comme suit :

Proposition 2.6.5 ([Del17]). *La duale de l'algèbre de Hopf d'incidence \mathcal{I} de la famille des posets des partitions semi-pointées est isomorphe à l'algèbre de Hopf des polynômes en les variables $(a_{k,l}^\delta)_{k,l \geq 1, \delta \in \{0,1\}}$ donnée par la composition des paires (F, G) de séries formelles de la forme suivante :*

$$\begin{cases} F &= \sum_{l \geq 0, k \geq 1} k a_{k,l}^1 \frac{x^k y^l}{k! l!} \\ G &= \sum_{l \geq 1, k \geq 0} a_{k,l}^0 \frac{x^k y^l}{k! l!} \end{cases},$$

avec $a_{1,0}^1 = 1$ et $a_{0,1}^0 = 1$. Cette algèbre de Hopf contient notamment l'algèbre de Hopf de Faà di Bruno.

Cette interprétation permet de calculer le polynôme caractéristique (voir section 2.1.3) du poset en considérant les caractères sur cette algèbre d'incidence :

Proposition 2.6.6 ([Del17]). *Le polynôme caractéristique du poset $\Pi_{n,p}^1$ est donné par :*

$$p(t-1)(t-p-\ell)^{p-2} \prod_{i=1}^{\ell} (t-p-i). \quad (2.6.5)$$

Le polynôme caractéristique du poset $\Pi_{n,p}$ est donné par :

$$(t-p-\ell)^{p-1} \prod_{i=1}^{\ell} (t-p-i). \quad (2.6.6)$$

Le polynôme caractéristique du poset $\hat{\Pi}_{n,p}$ est donné par :

$$t \times (t-p-\ell)^{p-1} \prod_{i=1}^{\ell} (t-p-i) - (1-p-\ell)^{p-1} \prod_{i=1}^{\ell} (1-p-i). \quad (2.6.7)$$

2.7 Objets de type Catalan

Cette section introduit les objets de type Catalan et les posets associés qui seront généralisés dans la section 2.8. Nous commençons par introduire quatre objets comptés par les nombres de Catalan : les partitions non croisées, les chemins de Dyck, les arbres binaires plans et les arbres plans. Nous donnons ensuite deux ordres partiels sur ces objets qui sont des raffinements l'un de l'autre : l'ordre des partitions non croisées (ou ordre de Kreweras) et l'ordre de Tamari. Ces ordres seront étendus aux fonctions de parking dans la section 2.8.

2.7.1 Partitions non croisées, chemins de Dyck, arbres binaires plans et arbres plans

Nous commençons par introduire les protagonistes de cette section. Rappelons que si un arbre est enraciné, chaque arête a un sommet qui est plus proche de la racine (appelé *parent*) et un sommet plus éloigné (appelé *enfant*). On désigne par *fratrie* l'ensemble des enfants d'un sommet. Par ailleurs, un sommet sans enfant est appelé *feuille* et un sommet avec enfant est appelé *sommet interne*.

Définition 2.7.1. • Une partition $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_p\}$ de $\llbracket n \rrbracket$ est *non croisée* s'il n'existe aucun $i < j < k < l$ tels que $i, k \in \pi_{i_1}$ et $j, l \in \pi_{i_2}$ avec $i_1 \neq i_2$. On note NC_n l'ensemble des partitions non croisées de $\llbracket n \rrbracket$.

- Un chemin de Dyck de longueur n est un chemin dans \mathbb{Z}^2 du point $(0,0)$ au point (n,n) utilisant exactement n pas verticaux et n pas horizontaux et restant au-dessus de la diagonale $y = x$. On note D_n l'ensemble des chemins de Dyck de longueur n .
- Un arbre (enraciné) plan de taille n est un arbre qui a $n + 1$ sommets, avec un sommet distingué appelé *racine*, et dont chaque fratrie est munie d'un ordre total. On note PT_n l'ensemble des arbres plans de taille n . À un ensemble fini E , on peut associer l'ensemble des arbres plans de taille $|E|$ dont les arêtes sont indexées par E . Cette application est \mathbb{PT} l'espèce des arbres plans qui vérifie :

$$\mathbb{PT} = \mathbb{L} \circ (\mathbb{X} \times \mathbb{PT}). \tag{2.7.1}$$

- Un arbre binaire plan est un arbre enraciné plan avec n sommets internes dont chaque sommet interne a exactement deux enfants. On note \mathbb{PBT}_n l'ensemble des arbres binaires plans de taille n . À un ensemble fini E , on peut associer l'ensemble des arbres binaires plans de taille $|E|$ dont les sommets internes sont indexés par E . Cette application est \mathbb{PBT} l'espèce des arbres binaires plans qui vérifie :

$$\mathbb{PBT} = \mathbb{X} \times (1 + \mathbb{PBT})^2. \tag{2.7.2}$$

Tous ces objets sont en bijection pour $n \geq 1$, et comptés par les nombres de Catalan définis par :

$$C_n := \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}. \tag{2.7.3}$$

Les espèces \mathbb{PT} et \mathbb{PBT} sont isomorphes. Une autre espèce non isomorphe ayant C_n orbites est l'espèce des fonctions de parking que nous étudierons à la section 2.8.1.

Exemple 2.7.2. Un exemple de partition non croisée, de chemin de Dyck, d'arbre plan et d'arbre binaire plan en bijection est présenté figure 2.7.1. △

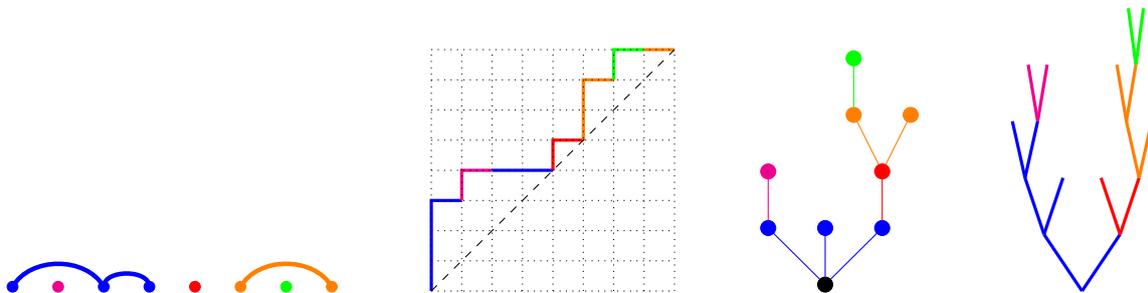


FIGURE 2.7.1 – Une partition non croisée, un chemin de Dyck, un arbre plan et un arbre binaire plan en bijection.

2.7.2 Poset des partitions non croisées

Muni de l'ordre de raffinement induit par le poset des partitions Π_n , l'ensemble des partitions non croisées NC_n est un poset (et même un treillis), défini par Kreweras [Kre72] et parfois appelé *treillis de Kreweras*. C'est un sous-poset de Π_n qui diffère de Π_n pour $n \geq 4$. L'EL-étiquetage de Π_n rappelé à l'exemple 2.2.7 induit un EL-épluchage de NC_n qui est Cohen-Macaulay. Le polynôme zeta de NC_n est donné par les nombres de Fuß-Catalan $C_n^{(k)}$:

$$Z(NC_n, k) = C_n^{(k)} := \frac{1}{kn+1} \binom{kn+1}{n}.$$

En particulier, le nombre de Möbius de NC_n est $Z(NC_n, -1) = (-1)^{n-1} C_{n-1}$. Le nombre $C_n^{(k)}$ est aussi le nombre d'arbres k -aires avec n sommets internes, c'est-à-dire d'arbres enracinés plans où chacun des n sommets internes a ki descendants pour un $i \in \mathbb{N}^*$ dépendant du sommet interne considéré. En effet, la série génératrice $T(z)$ des arbres k -aires vérifie :

$$T(z) = \frac{1}{1 - T(z)^k}.$$

Le nombre d'intervalles dans ce treillis a été calculé par Kreweras [Kre72] de manière récursive et est donné par $\frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$.

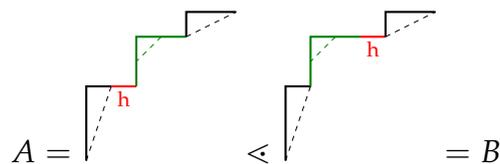
2.7.3 Treillis de Tamari sur les objets de type Catalan

Le treillis de Tamari a été introduit par Tamari [Tam62]. La bijection de la figure 2.7.1 respecte l'ordre de Tamari : les ordres suivants sont donc tous équivalents. Nous les présentons dans l'ordre historique d'apparition.

Définition 2.7.3. Un arbre binaire plan B couvre un arbre binaire plan A dans le treillis de

Tamari si il existe dans B un sous-arbre de la forme $\begin{matrix} E_2 & E_3 \\ & \vee \\ E_1 & \end{matrix}$ tel que l'arbre binaire A ne diffère de B qu'en ce sous-arbre où il vaut $\begin{matrix} E_1 & E_2 \\ & \vee \\ & E_3 \end{matrix}$.

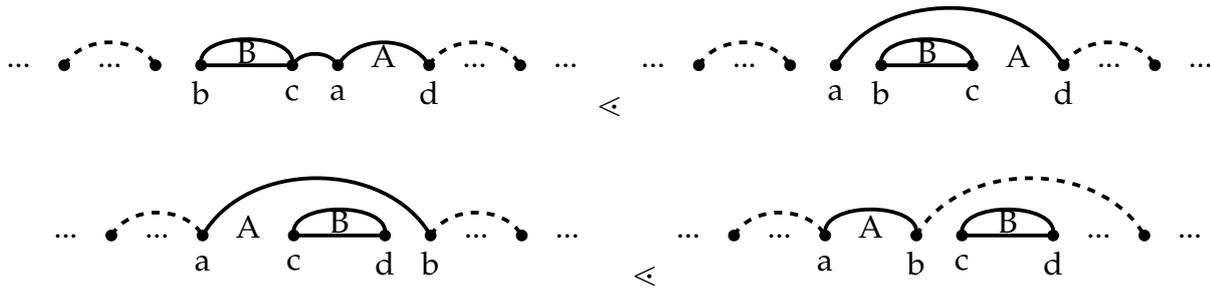
Définition 2.7.4. Un chemin de Dyck B couvre un chemin de Dyck A dans le treillis de Tamari s'il existe dans B un pas horizontal h précédant un pas vertical tel que A soit obtenu en intervertissant h et le plus long sous-chemin de Dyck partant de h et restant au-dessus de la diagonale.



Définition 2.7.5. Une partition non croisée B couvre une partition non croisée A dans le treillis de Tamari s'il existe dans B une part p nichée directement sous une part p' telle que A soit obtenue en :

- fusionnant p et p' si l'élément de p' immédiatement à gauche de p est le petit élément de p' ,

- échangeant p (avec les parts nichées sous p) et l'élément de p' immédiatement à gauche de p sinon.



(©Images d'Hélène Han)

Le treillis de Tamari est EL-épluchable et donc Cohen-Macaulay [Müh15]. Son nombre de Möbius est $(-1)^{n-1}$. Le diagramme de Hasse du treillis de Tamari forme le 1-squelette de l'associaèdre. Le nombre d'intervalles dans le treillis de Tamari a été l'objet d'une littérature intense dans les 20 dernières années, notamment du fait de sa connexion avec les coinvariants "trigonaux", introduits par Bergeron et Préville-Ratelle [BP12], les cartes planaires [BB09; FP17; Fan18; Fan21; FH24] et les poissons combattants [DH22]. Ce nombre d'intervalles est donné par $\frac{2(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!}$ et a été montré via des séries génératrices par Chapoton [Cha05], avant d'être mis en relation avec les intervalles-posets par Châtel et Pons [CP15]. Le treillis de Tamari sur les objets de Catalan de taille 3 est illustré sur la figure 2.7.2.

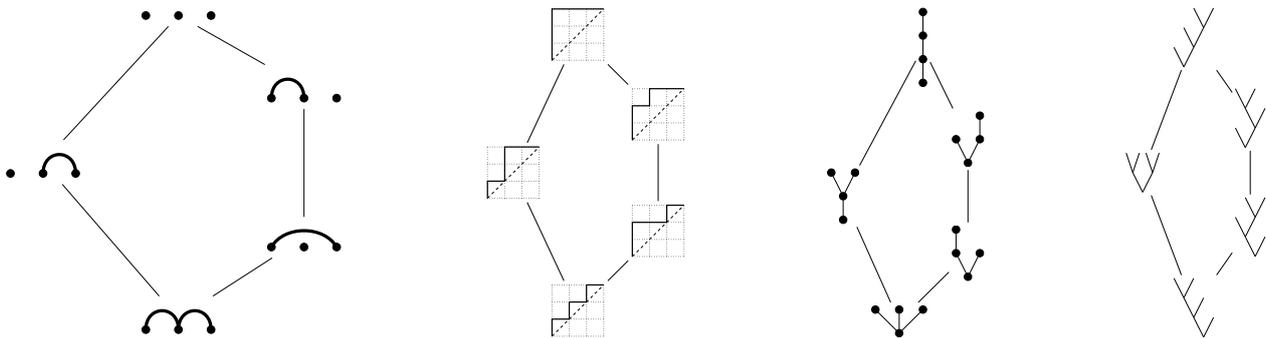


FIGURE 2.7.2 – Treillis de Tamari de taille 3

Remarque 2.7.6. L'ensemble des chemins de Dyck est aussi muni d'un ordre naturel par l'inclusion des chemins de Dyck. Le poset obtenu est le treillis de Stanley. L'étude de l'extension de ce treillis aux fonctions de parking reste ouverte et ne sera pas traitée dans ce manuscrit.

2.8 Fonctions de parking

Dans toute cette section, considérons E un ensemble fini de cardinal n . Je présente ici les fonctions de parking, et plusieurs objets combinatoires isomorphes tels que les 2-partitions non croisées, les listes de Dyck, les chemins de Dyck étiquetés et les arbres de parking. Ces objets peuvent être munis de deux structures de posets : les posets des 2-partitions non croisées, introduits par [Ede80a] et étudiés dans [DJR22; DJR20] et les posets de Tamari-Parking qui ont fait l'objet d'un stage de M2 de mon étudiante, Hélène Han, co-encadrée par Matthieu Josuat-Vergès.

2.8.1 Généralités sur les fonctions de parking

Les *fonctions de parking* (ou *fonctions de stationnement*) sont des objets fondamentaux de la combinatoire algébrique. Elles ont été introduites en 1966 par Konheim et Weiss [KW66] pour l'étude de fonctions de hachage compatibles avec les résolutions de collisions par sondage linéaire. Elles sont particulièrement étudiées pour leur connexion avec les espaces de coinvariants diagonaux où elles ont été identifiées par Haiman [Hai94].

Définition 2.8.1 ([KW66]). Une *E-fonction de parking* est une application p de E dans $\llbracket 1; |E| \rrbracket$ telle que pour tout $1 \leq k \leq |E|$:

$$|p^{-1}(\llbracket 1; k \rrbracket)| \geq k. \quad (2.8.1)$$

Si l'ensemble E est muni d'un ordre total, $E = v_1 < \dots < v_n$, on peut représenter la fonction de parking p comme le mot $p(v_1) \dots p(v_n)$, noté plus simplement $p_1 \dots p_n$. Dans ce cadre, la fonction de parking est *croissante* si $p_1 \leq \dots \leq p_n$. L'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_E sur une E -fonction de parking est induite par l'action de \mathfrak{S}_E sur E :

$$\sigma \cdot p(v) = p(\sigma^{-1} \cdot v), \quad (2.8.2)$$

qui se réécrit $\sigma \cdot p_1 \dots p_n = p_{\sigma^{-1}(1)} \dots p_{\sigma^{-1}(n)}$ dans le cadre ordonné.

Remarque 2.8.2. Le nom "fonction de parking" vient de l'interprétation de E comme un ensemble de voitures, de $\llbracket 1; |E| \rrbracket$ comme $|E|$ places de parking numérotées et de p comme une attribution de places. Chaque voiture rentre à tour de rôle dans le parking et parcourt les places de parking par ordre croissant jusqu'à sa place attribuée. Si celle-ci est occupée, elle continue de parcourir les places par ordre croissant jusqu'à en trouver une libre. Les fonctions de parking sont les fonctions d'attribution de places pour lesquelles toutes les voitures arrivent à se garer sans avoir à utiliser les places plus petites que leur place attribuée.

Exemples 2.8.3. Par exemple, il y a 1 fonction de parking sur $\llbracket 1 \rrbracket$: 1. Il y a 3 fonctions de parking sur $\llbracket 2 \rrbracket$: 11, 12, 21. Il y a 16 fonctions de parking sur $\llbracket 3 \rrbracket$: les 6 permutations de 123, les 3 permutations de 112, 122 et 113 respectivement et la fonction de parking 111. Un autre exemple de fonction de parking est : 41112712. \triangle

L'ensemble des E -fonctions de parking a pour cardinal $(n+1)^{n-1}$. J'aime particulièrement la preuve donnée par Pollak vers 1974 : on ajoute une place de parking 0 et on se place dans $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$. Les fonctions de parking sont alors les fonctions telles qu'il n'y a aucune voiture sur la place 0. Si E est ordonné, l'ensemble des fonctions de parking croissantes a pour cardinal C_n , le n -ième nombre de Catalan (voir équation (2.7.3)). Plusieurs bijections sont connues entre fonctions de parking sur E et arbres de Cayley sur $E \cup \{*\}$, qui peuvent être vus comme des forêts d'arbres de Cayley sur E (voir [Yan01]). D'un point de vue représentation du groupe symétrique, ces deux objets sont pourtant bien différents, comme nous le développerons dans la section 2.8.2. La généralisation des fonctions de parking à d'autres groupes de réflexions finis a donné lieu à la théorie des espaces de parking d'Armstrong, Reiner et Rhoades [ARR15; Rho14] que nous rappelons dans cette même section.

Nous finissons cette section en donnant plusieurs objets combinatoires dont les espèces sont isomorphes à celles des fonctions de parking : les listes de Dyck, les 2-partitions non croisées et les chemins de Dyck étiquetés. Commençons par définir chacun de ces trois objets :

Définition 2.8.4. Soit E un ensemble fini de cardinal n . Une *composition faible* de l'ensemble E est une liste (E_1, \dots, E_n) d'ensembles deux à deux disjoints, possiblement vides, tels que $E = \bigsqcup_{i=1}^n E_i$. Une *liste de Dyck* est une composition faible d'ensemble vérifiant

$$\forall 1 \leq i \leq n, |\bigsqcup_{j=1}^i E_j| \geq i \quad (2.8.3)$$

Exemples 2.8.5. L'exemple suivant est une liste de Dyck de $\llbracket 1; 8 \rrbracket$:

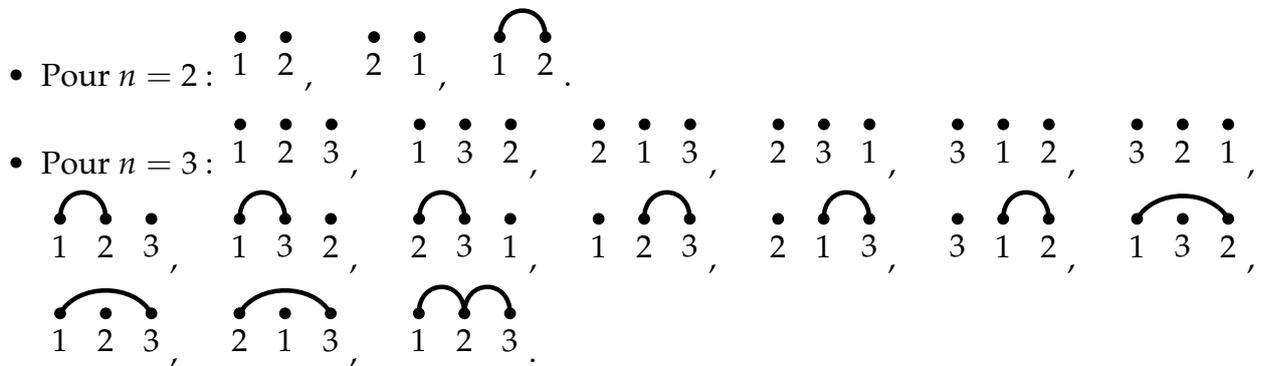
$$(\{2, 3, 4, 7\}, \{5, 8\}, \emptyset, \{1\}, \emptyset, \emptyset, \{6\}, \emptyset).$$

La composition d'ensemble $(\{2, 7\}, \emptyset, \{1\}, \emptyset, \{5, 6\}, \{3, 4, 8\}, \emptyset, \emptyset)$ n'est pas une liste de Dyck. △

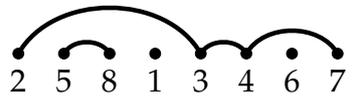
Les 2-partitions non croisées ont été introduites par Edelman dans [Ede80a]. Leur nom vient de la définition originale comme un triplet formé d'une partition, d'une partition non croisée et d'une bijection entre les parts des deux types de partition. Nous avons montré dans [DJR22] la définition équivalente suivante :

Définition 2.8.6. Une 2-partition non croisée de E est un couple (π, σ) , où π est une partition non croisée de taille n et σ est une permutation de \mathfrak{S}_n telle que $\sigma(i) < \sigma(j)$ pour tous $i < j$ dans la même part de π .

Exemples 2.8.7. Nous listons ci-dessous l'ensemble des $\{1, \dots, n\}$ -partitions non croisées :



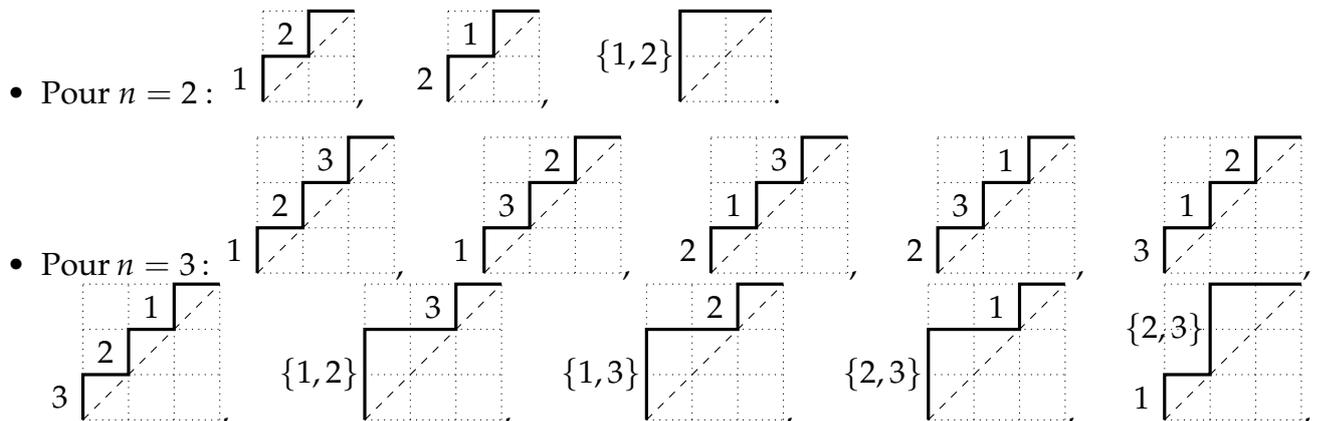
Un exemple d'une 2-partition non croisée sur $\llbracket 1; 8 \rrbracket$ est :

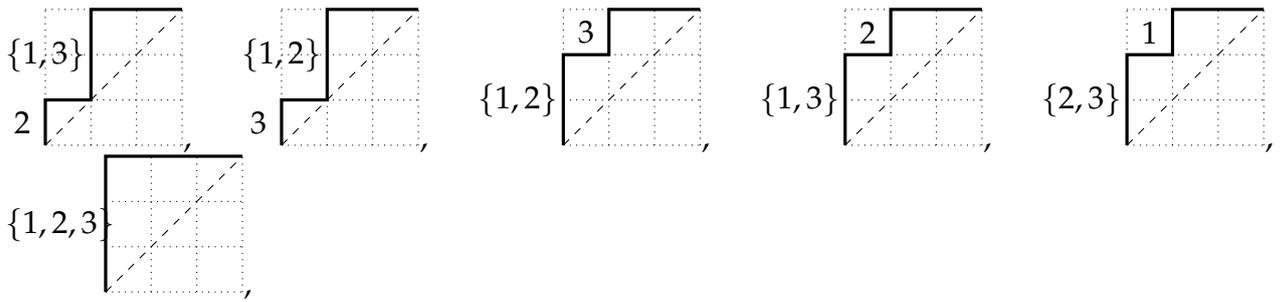


△

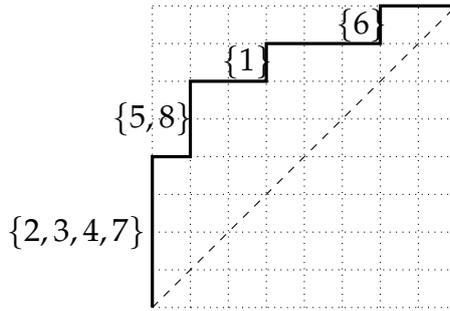
Définition 2.8.8. Un chemin de Dyck étiqueté par E est un chemin de Dyck de $(0, 0)$ à $(|E|, |E|)$ dont les suites de k pas montants consécutifs sont indexées par un sous-ensemble de E de taille k , chaque élément de E étant utilisé exactement une fois.

Exemples 2.8.9. Nous listons ci-dessous l'ensemble des $\{1, \dots, n\}$ -chemins de Dyck étiquetés :





Un exemple de chemin de Dyck étiqueté par $\llbracket 1; 8 \rrbracket$ est :



△

Proposition 2.8.10. *Les fonctions de parking, les 2-partitions non croisées et les chemins de Dyck étiquetés sont en bijection avec les listes de Dyck et ces bijections préservent l'action du groupe symétrique.*

Démonstration. • **Fonctions de parking** \leftrightarrow **compositions faibles**

La bijection entre fonctions de parking et compositions faibles est obtenue en considérant le n -uplet $(p^{-1}(1), \dots, p^{-1}(n))$, pour toute fonction de parking p .

• **2-partitions non croisées** \leftrightarrow **compositions faibles**

$$A_i = \begin{cases} \sigma(B) & \text{si } i = \min(B) \text{ pour } B \in \pi, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.8.4}$$

• **Chemins de Dyck étiquetés** \leftrightarrow **compositions faibles**

A_i est l'ensemble des étiquettes des pas montants d'abscisse i . □

Exemple 2.8.11. Ces bijections envoient la 2-partition non croisée de l'exemple 2.8.7 sur la fonction de parking de l'exemple 2.8.3, la composition faible de l'exemple 2.8.5 et le chemin de Dyck étiqueté de l'exemple 2.8.9. △

2.8.2 Arbres de parking et espaces de parking

Détaillons maintenant l'action du groupe symétrique sur les fonctions de parking. De nombreuses bijections sont connues entre les fonctions de parking et les forêts d'arbres de Cayley (ou de manière équivalente des arbres de Cayley avec un symbole supplémentaire). Cependant, les espèces correspondantes ne sont pas isomorphes. En effet, les tailles des orbites de l'action du groupe symétrique sur les fonctions de parking et sur les forêts d'arbres de Cayley ne coïncident plus à partir d'un ensemble de taille 3 : il y a deux orbites de taille

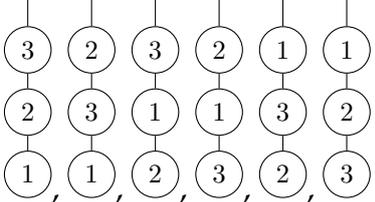
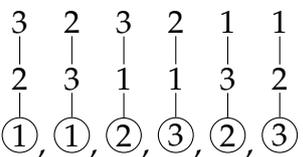
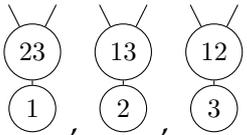
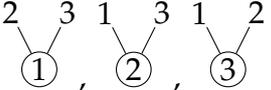
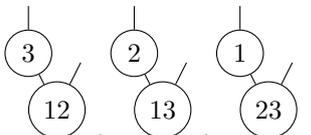
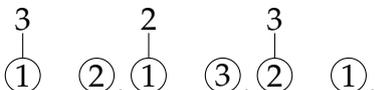
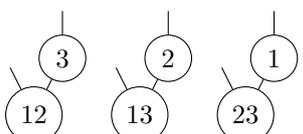
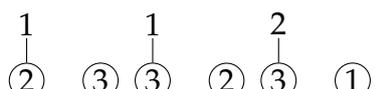
Fonctions de parking	Arbres de parking	Forêts d'arbres de Cayley
111		① ② ③
123,132,213,231,312,321		
122, 212, 221		
112,121,211		
113, 131, 311		

FIGURE 2.8.1 – Orbites (une par case) pour l'action du groupe symétrique sur les fonctions de parking (à gauche en termes de mots et au centre en termes d'arbres) et pour les arbres de Cayley (à droite).

6 dans les forêts d'arbres de Cayley et une seule dans les fonctions de parking. Ces orbites sont détaillées sur la figure 2.8.1.

De manière équationnelle, l'espèce des fonctions de parking, décrite ci-dessous en termes d'arbres de parking, \mathcal{P}_f vérifie :

$$\mathcal{P}_f = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}_k \times (1 + \mathcal{P}_f)^k,$$

où \mathbb{E}_k est l'espèce des ensembles de taille k qui vaut \mathbb{K} si son argument est un ensemble de taille k et $\{0\}$ sinon.

L'espèce des forêts d'arbres de Cayley \mathbb{FA} vérifie :

$$\mathbb{FA} = \mathbb{E}^+ \circ (X \times (1 + \mathbb{FA})),$$

où $\mathbb{E}^+ = \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}_k$ est l'espèce des ensembles non vides.

Notez que ces deux équations fonctionnelles se réécrivent en termes de séries génératrices :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathcal{P}_f} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \times (1 + \mathbf{C}_{\mathcal{P}_f})^k \\ &= \exp \left(x(1 + \mathbf{C}_{\mathcal{P}_f}) \right) \end{aligned}$$

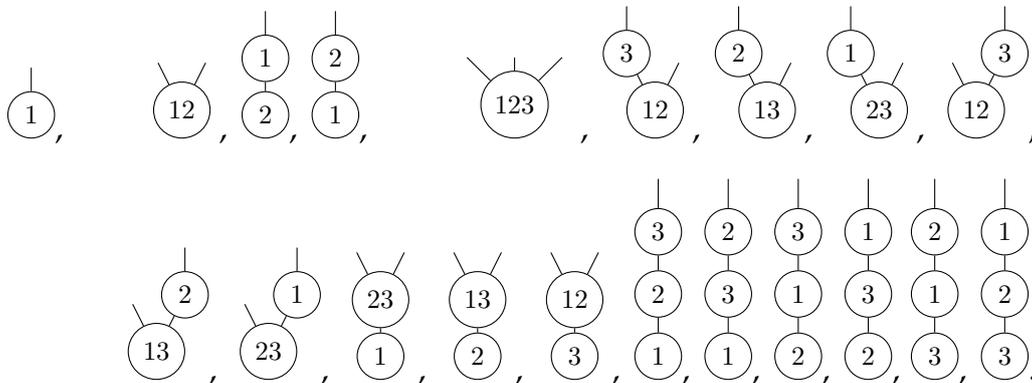
Ce qui permet de retrouver le fait que ces deux espèces ont des espaces vectoriels sous-jacents de même dimension.

Définition 2.8.12 ([DJR22]). Un *arbre de parking* sur l'ensemble E est un arbre enraciné plan T vérifiant :

- les sommets de T sont étiquetés par des sous-ensembles (éventuellement vides) de E . L'ensemble des étiquetages non vides forme une partition de E .
- chaque sommet a autant d'enfants que le cardinal de son étiquette.

Notez qu'un arbre de parking sur E a $|E|$ arêtes et $|E + 1|$ sommets.

Exemples 2.8.13. Nous représentons ci-dessous les arbres de parking sur $\{1\}$, $\{1,2\}$ et $\{1,2,3\}$. Les feuilles sont laissées blanches et non entourées :



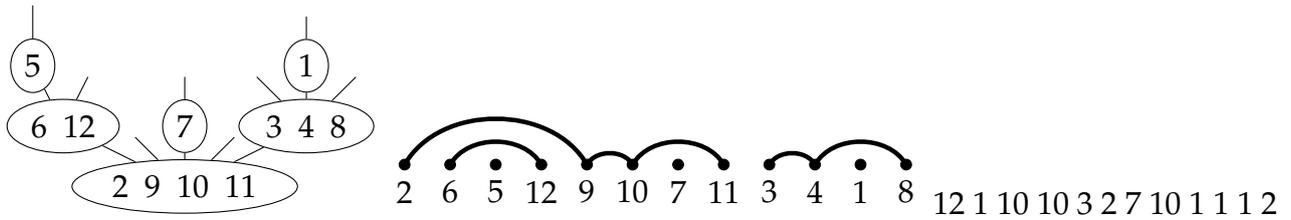
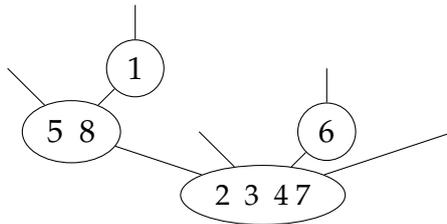


FIGURE 2.8.2 – Trois représentations du même élément : comme un arbre de parking, comme une 2-partition non croisée et comme une fonction de parking

Lemme 2.8.14. *Les arbres de parking et les fonctions de parking sont en bijection et cette bijection préserve l'action du groupe symétrique. Nous appelons espèce des fonctions de parking (ou espèce de parking), notée \mathcal{P}_f , l'espèce qui associe à un ensemble fini E l'ensemble des arbres de parking sur E .*

Esquisse de la bijection. Un parcours préfixe d'un arbre de parking donne une composition faible. Le fait de rester dans l'arbre assure la condition de parking ($\sum_{i=1}^k |A_i| \geq k$). Le cas d'égalité est atteint pour les sommets sur la branche la plus à droite, c'est-à-dire sur le chemin entre la feuille la plus à droite et la racine. \square

Exemple 2.8.15. L'arbre de parking associé à la partition non croisée de l'exemple (2.8.7) est :



\triangle

Nous avons vu dans la section 2.7.1 que les arbres binaires plans sont des objets de Catalan. Le lecteur attentif aura peut-être remarqué que nous n'avons pour l'instant pas évoqué de bijection entre arbres binaires plans décorés par E et E -fonctions de parking. Remédions-y sitôt :

Proposition 2.8.16. *Il y a une bijection entre les fonctions de parking et les arbres binaires dont les sommets internes sont décorés par E avec une décoration croissante sur les enfants gauches.*

Esquisse de preuve. Fusionner les enfants gauches avec leur parent permet de retrouver les arbres de parking. \square

Exemple 2.8.17. Les arbres binaires décorés associés aux fonctions de parking des exemple 2.8.7 et figure 2.8.2 sont représentés figure 2.8.3. \triangle

L'action du groupe symétrique sur les arbres de parking coïncide avec celle sur les espaces de parking associés au groupe symétrique de Armstrong, Reiner et Rhoades [ARR15]. Le caractère associé est donné par $\sigma \mapsto (n + 1)^{z(\sigma)-1}$ où $z(\sigma)$ est le nombre de cycles de σ .

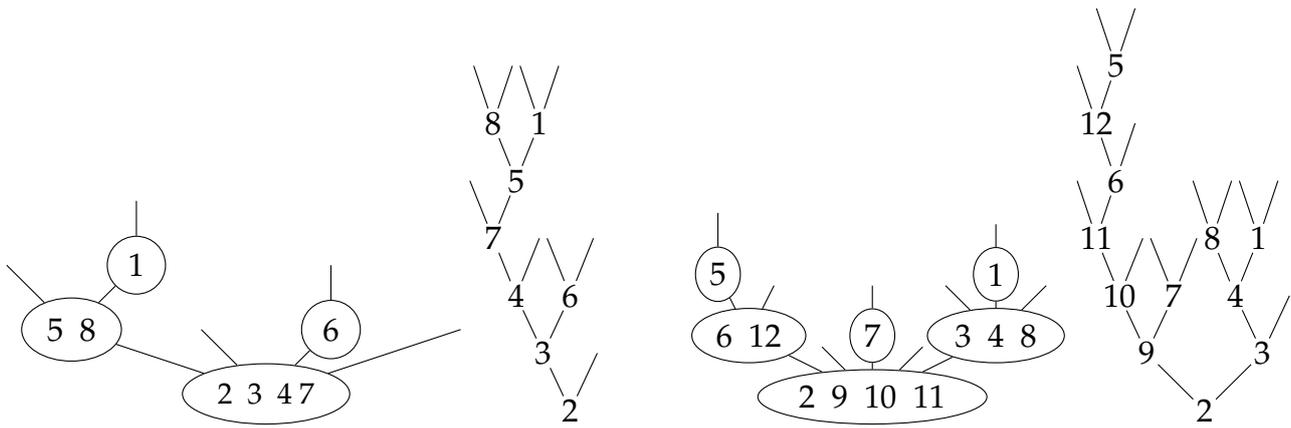


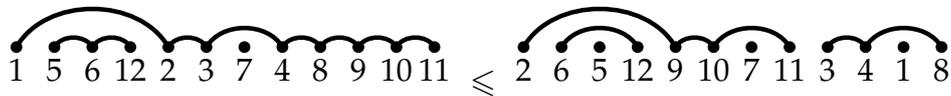
FIGURE 2.8.3 – Arbres de parking et arbres binaires croissants associés à 4 1 1 1 2 7 1 2 (à gauche) et 12 1 10 10 3 2 7 10 1 1 1 2 (à droite).

2.8.3 Posets des 2-partitions non croisées

Définition du poset

À l'ensemble des E -partitions non croisées est associé un poset ${}^2\Pi_E$ introduit par Edelman [Ede80a] en 1980, comme une variante du poset des partitions non croisées introduit par Kreweras [Kre72] (voir la section 2.7.2). Notons qu'il apparaît aussi implicitement dans [Rho14]. Quand $E = \llbracket 1; n \rrbracket$, nous noterons simplement ${}^2\Pi_n$ pour ${}^2\Pi_E$.

L'ordre partiel du poset est donné par $(\pi, \sigma) \leq (\pi', \tau)$ si et seulement si $\pi \leq \pi'$ pour l'ordre des partitions non croisées (cf. 2.7.2), c'est-à-dire que toute part de π est l'union de parts de π' , et si pour toute part p de π , $\tau(p) = \sigma(p)$. Par exemple,



Proposition 2.8.18 ([Ede80a]). *Le poset ${}^2\Pi_n$ est gradué : le rang de (π, σ) est $|\pi| - 1$. Il a un unique minimum 0_n dont la part non croisée sous-jacente a une seule part. Il a $n!$ éléments maximaux, ceux associés à la partition non croisée dont toutes les parts sont de taille 1.*

En particulier, les intervalles maximaux de ${}^2\Pi_n$ sont tous isomorphes au poset des partitions non croisées NC_n . Ainsi, ${}^2\Pi_n$ peut être vu comme $n!$ copies de NC_n s'intersectant de manière non triviale.

Proposition 2.8.19 ([Ede80a]). *Pour tout $(\pi, \sigma) \in {}^2\Pi_n$, l'intervalle $[0_n; (\pi, \sigma)]$ est isomorphe au produit $NC_{i_1} \times NC_{i_2} \times \dots \times NC_{i_k}$, et l'idéal au-dessus de l'élément (π, σ) est isomorphe à ${}^2\Pi_{i_1} \times {}^2\Pi_{i_2} \times \dots \times {}^2\Pi_{i_k}$, où i_1, i_2, \dots, i_k sont les tailles des blocs de π .*

Considérons maintenant le poset borné $\widehat{{}^2\Pi}_n$ obtenu en ajoutant un élément maximal $\hat{1}$ à ${}^2\Pi_n$. Tout semi-treillis borné est un treillis : pour montrer que le poset est un treillis, il suffit donc de montrer l'existence de bornes supérieures (*joins* en anglais). En donnant une description explicite de ces bornes supérieures, nous obtenons :

Proposition 2.8.20 ([DJR22]). *Le poset $\widehat{{}^2\Pi}_n$ est un treillis.*

Nous avons de plus introduit une variante de l'épluchabilité, présentée à la section 2.2.2 pour étudier la topologie de ce poset :

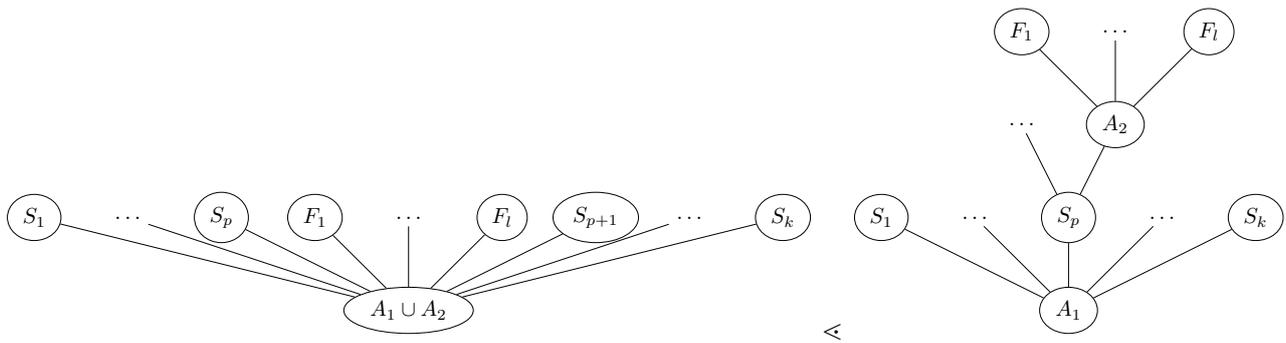


FIGURE 2.8.4 – Relations de couverture dans le poset des 2-partitions non croisées en termes d'arbre de parking.

Théorème 2.8.21 ([DJR22]). *Le poset ${}^2\widehat{\Pi}_n$ est épluchable et donc Cohen-Macaulay.*

Remarque 2.8.22. Il semble qu'il n'y ait pas de façon claire et simple de décrire la structure de poset de ${}^2\Pi_n$ directement en termes de mots $p_1 \dots p_n$ comme dans la définition 2.8.1. En effet, la relation de couverture est obtenue en considérant une lettre qui apparaît au moins deux fois et en l'augmentant. La principale difficulté consiste à décrire l'ensemble des valeurs que cette lettre peut prendre en augmentant.

Nous finissons ce paragraphe en décrivant les relations de couverture en termes d'arbres de parking. C'est la description que nous utilisons pour obtenir les formules d'énumérations de chaînes. Rappelons d'abord que l'on appelle *branche droite* le chemin de la feuille la plus à droite d'un arbre à sa racine. Partant d'un arbre de parking U , un autre arbre de parking T tel que $T < U$ est obtenu à partir de U par la suite d'opérations suivantes, représentées sur la figure 2.8.4 :

- On choisit un sommet non vide A_1 , et on note S_1, \dots, S_k les enfants de A_1 , en les énumérant de gauche à droite.
- On choisit un p dans $\llbracket 1; k \rrbracket$ et un sommet non vide A_2 sur la branche droite de l'arbre enraciné en S_p .
- On coupe le sous-arbre enraciné en A_2 et on ajoute les étiquettes de A_2 à celles de A_1 . Notant F_1, \dots, F_l les enfants de A_2 , les enfants du nouveau sommet $A_1 \cup A_2$ sont de gauche à droite : $S_1, \dots, S_p, F_1, \dots, F_l, S_{p+1}, \dots, S_k$ si A_2 est différent de S_p et $S_1, \dots, S_{p-1}, \emptyset, F_1, \dots, F_l, S_{p+1}, \dots, S_k$ sinon.

Énumération des chaînes

La motivation principale pour compter les chaînes est le lien entre les nombres de chaînes et l'homologie du poset, comme expliqué à la section 2.4. Pour ce faire, nous utilisons la théorie des espèces. Nous appelons k -multichaînes d'arbres de parking sur E le k -uplet (a_1, \dots, a_k) où les a_i sont des E -arbres de parking et $a_i \leq a_{i+1}$. L'espèce qui associe à un ensemble fini E l'ensemble des k -multichaînes d'arbres de parking sur E est notée $\mathbf{C}_{k,t}$.

Théorème 2.8.23 ([DJR22]). *Nous avons :*

$$\mathbf{C}_{k,t} = \sum_{p \geq 1} \mathbf{C}_{k-1,t}^p \times (t\mathbf{C}_{k,t} + 1)^p, \quad (2.8.5)$$

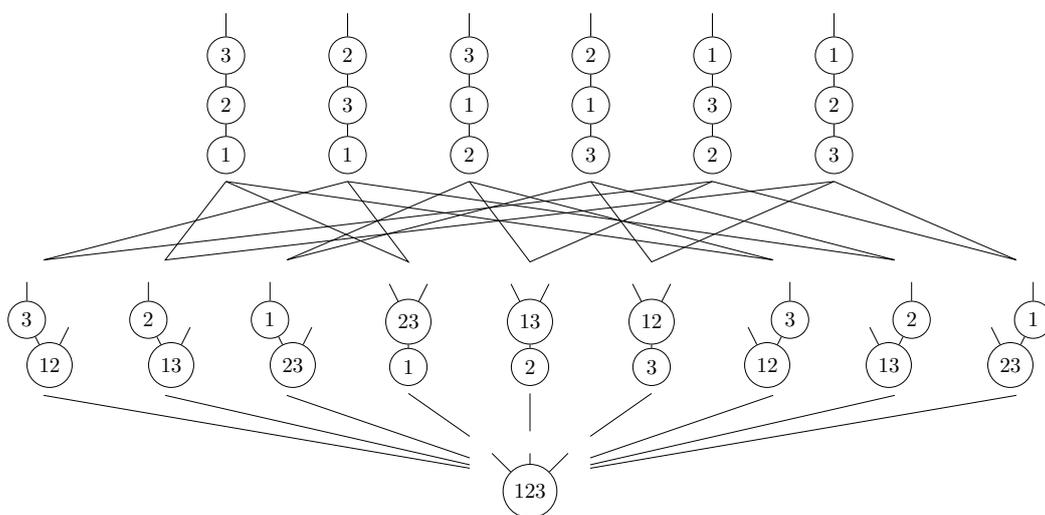


FIGURE 2.8.5 – Le poset des 2-partitions non croisées sur un ensemble à trois éléments en termes d’arbres de parking.

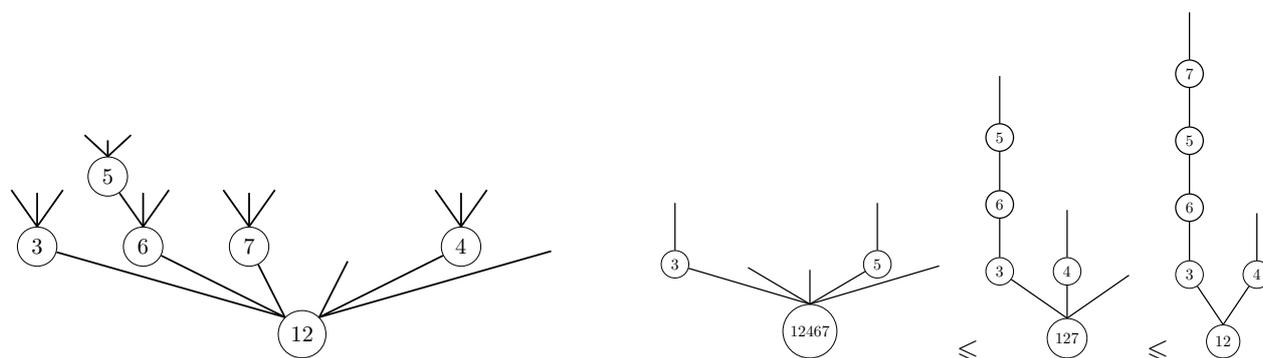


FIGURE 2.8.6 – Un 3-arbre de parking correspondant à la 3-fonction de parking 1 1 2 18 7 6 13 et la chaîne associé dans le poset ${}^2\Pi_7$.

où $C_{k-1,t}^p(E) = \delta_{|E|=p} C_{k-1,t}(E)$ pour tout ensemble fini E .
En termes de séries génératrices, cela se traduit en :

$$C_{k,t} = C_{k-1,t} \circ (x(tC_{k,t} + 1)). \quad (2.8.6)$$

Notez que comme l'équation fonctionnelle est écrite en termes d'espèce, il serait théoriquement possible de trouver une formule pour le caractère de l'action de \mathfrak{S}_n sur les chaînes décrites ci-dessus. Nous nous bornerons dans ce paragraphe à des résultats énumératifs.

Corollaire 2.8.24 ([DJR22]). *La série génératrice des k -multichaînes dans le poset des 2-partitions non croisées satisfait :*

$$C_{k,t}^l = \exp\left(x\left(tC_{k,t}^l + 1\right)^k\right) - 1. \quad (2.8.7)$$

D'après l'équation (2.8.7), $C_{k,t}^l$ est l'inverse compositionnel de $\ln(1+x)(1+tx)^{-k}$. En utilisant le théorème d'inversion de Lagrange, il est possible d'extraire les coefficients de la série et nous obtenons :

Corollaire 2.8.25 ([DJR22]). *Le nombre de chaînes $\phi_1 \leq \dots \leq \phi_k$ dans ${}^2\Pi_n$ où $\text{rk}(\phi_k) = \ell$ est :*

$$\ell! \binom{kn}{\ell} S_2(n, \ell + 1). \quad (2.8.8)$$

Nous donnons dans [DJR22] une preuve bijective de ce corollaire en utilisant la notion de k -arbres de parking, qui sont aux k -fonctions de parking ce que les arbres de parking sont aux fonctions de parking.

Définition 2.8.26 ([DJR22]). Un k -arbre de parking sur un ensemble E est un arbre enraciné plan T tel que :

- les sommets de T sont étiquetés par des sous-ensembles (éventuellement vides) de E . L'ensemble des étiquetages non vides forment une partition de E .
- tout sommet a k fois plus d'enfants que le cardinal de son étiquette.

Yan [Yan01] a introduit une variante de la notion de fonction de parking appelée k -fonction de parking.

Définition 2.8.27. Une k -fonction de parking de longueur n est un mot $w_1 \dots w_n$ sur l'alphabet \mathbb{N}^* , tel que pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $|\{i : w_i \leq k(j-1) + 1\}| \geq j$.

Il y a $(kn + 1)^{n-1}$ fonctions de parking de longueur n . Nous donnons maintenant l'analogie du lemme 2.8.14.

Lemme 2.8.28 ([DJR22]). *Il y a une bijection entre k -arbres de parking sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ et k -fonctions de parking de longueur n , qui préserve l'action du groupe symétrique.*

Nous retrouvons le corollaire 2.8.25, illustré par la figure 2.8.6 en établissant une bijection entre k -chaînes dans le poset ${}^2\Pi_n$ et k -arbres de parking sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. La formule énumérative est ensuite obtenue en comptant les k -arbres de parking via un codage de Prüfer. De manière claire, la formule (2.8.8) permet de retrouver le résultat suivant de [Ede80a], pour $k = 1$.

Proposition 2.8.29. [Ede80a; DJR22] Le nombre d'éléments de rang ℓ dans ${}^2\Pi_n$, appelé ℓ -ième nombre de Whitney de seconde espèce, est

$$W_\ell({}^2\Pi_n) = \ell! \binom{n}{\ell} S_2(n, \ell + 1), \quad (2.8.9)$$

où $S_2(n, k)$ est le nombre de Stirling de seconde espèce.

Pour $k = -1$, nous obtenons les nombres de Whitney de première espèce de ${}^2\Pi_n$:

$$w_\ell({}^2\Pi_n) := \sum_{\phi \in {}^2\Pi_n, \text{rk}(\phi) = \ell} \mu(\hat{0}, \phi) = (-1)^\ell \ell! \binom{n + \ell - 1}{n} S_2(n, \ell + 1).$$

Utilisant les résultats de [Del17, Proposition 1.7], nous obtenons :

Théorème 2.8.30 ([DJR22]). Le caractère pour l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_n sur l'unique groupe de cohomologie réduite non trivial $\tilde{H}^{n-2}({}^2\Pi_n)$ est donné par :

$$\sigma \mapsto (-1)^{n-z(\sigma)} (n-1)^{z(\sigma)-1}. \quad (2.8.10)$$

Notons que le calcul du caractère sur les k -multichaînes (ou de manière équivalente sur les k -fonctions de parking) figurait implicitement dans le travail de Rhoades [Rho14, Section 8].

Corollaire 2.8.31 ([DJR22]). Le nombre de Möbius de $\widehat{{}^2\Pi_n}$ est $\mu(\widehat{{}^2\Pi_n}) = (-1)^n (n-1)^{n-1}$.

2.8.4 Posets de Tamari-parking

Après avoir présenté le treillis de Tamari-parking, je présente dans cette section les résultats obtenus par Hélène Han, en stage de M2 co-encadré par Matthieu Josuat-Vergès au printemps 2024.

Étant donné E un ensemble fini de taille n , le treillis de Tamari-Parking est obtenu en transportant sur les chemins de Dyck étiquetés par E l'ordre de Tamari défini sur les chemins de Dyck de taille n . Si deux suites de pas montants se retrouvent à la même abscisse, leurs ensembles d'étiquettes fusionnent. Les relations de couverture de ce poset en termes d'arbres de parking sont représentées sur la figure 2.8.7. En toutes lettres, elles s'écrivent comme suit :

Définition 2.8.32. Un arbre de parking T est couvert par un arbre de parking S s'il existe un nœud V (étiqueté par $\{v_1, \dots, v_l\}$) de S de parent P (étiqueté par $\{p_1, \dots, p_k\}$) tel que T est obtenu à partir de S selon les règles suivantes

- si V est l'enfant le plus à gauche P , on coupe l'enfant le plus à droite R de V et on fusionne le nœud V et le nœud P . Les enfants de $V \cup P$ sont alors, de gauche à droite, les enfants de V , R et les enfants de P .
- si V a un frère F_i directement sur sa gauche, on coupe l'enfant le plus à droite R de V , on greffe V sur la feuille la plus à droite de F_i et on greffe R à l'ancienne place de V .

La définition de ce poset en termes de listes de Dyck est la suivante :

Définition 2.8.33 ([Han24]). Soient deux listes de Dyck de même longueur $C := (C_1, C_2, \dots, C_n)$ et $E := (E_1, E_2, \dots, E_n)$. La liste de Dyck E couvre la liste de Dyck C s'il existe i et r dans $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tels que

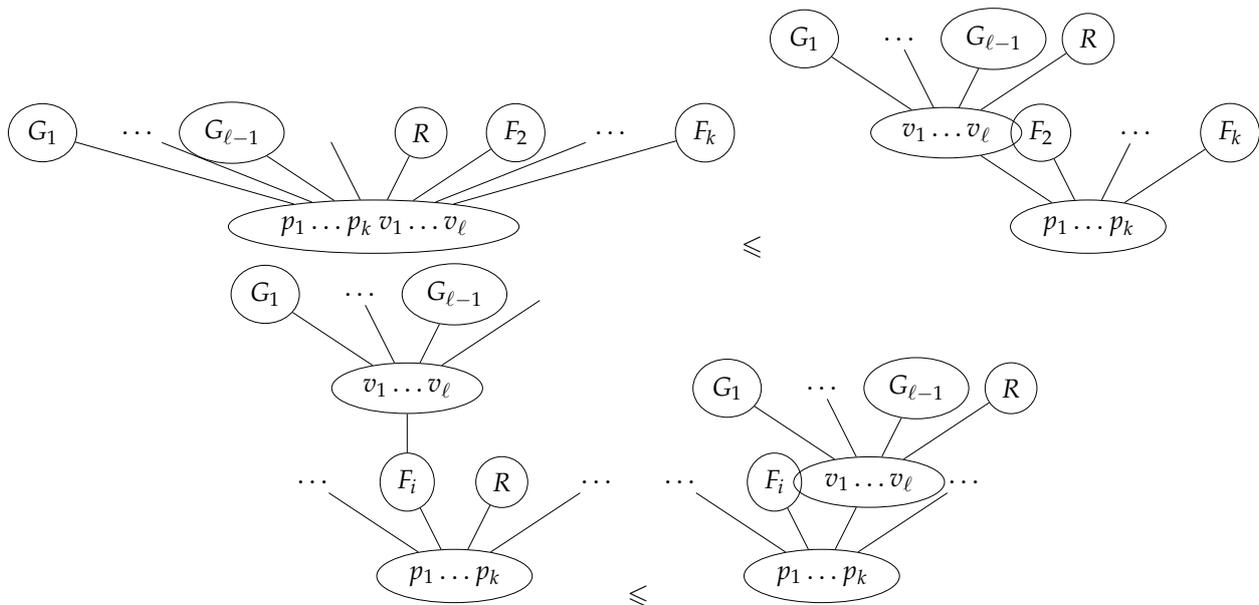


FIGURE 2.8.7 – Relations de couverture du poset de Tamari-Parking en termes d'arbres de parking

- $\sum_{k=i+1}^{i+r} |E_k| = r$ et $\forall \ell < r, \sum_{k=i+1}^{i+\ell} |E_k| > \ell$ (condition du premier retour à la diagonale en $i+r$),
- $\forall k \in \llbracket 1, i+1 \rrbracket \cup \llbracket i+r+1, n \rrbracket, C_k = E_k$ (localité de la relation),
- $C_i = E_i \sqcup E_{i+1}$ (fusion de deux colonnes/nœuds),
- $\forall k \in \llbracket i+1, i+r-1 \rrbracket, C_k = E_{k+1}$ (décalage des enfants),
- $C_{i+r} = \emptyset$ (création d'une feuille/une colonne vide).

On note TP_E le poset de Tamari-Parking sur les chemins de Dyck étiquetés par E . Ce poset a un unique élément minimal et $|E|!$ éléments maximaux. Chacun de ses intervalles maximaux est isomorphe au treillis de Tamari. Ce poset est apparu de manière indépendante dans le travail de Bouvel, Ferrari et Tenner [BFT24]. Nous notons \widehat{TP}_E le poset obtenu en ajoutant un maximum à TP_E . Bousquet-Mélou, Chapuy et Préville-Ratelle [BCP13] ont compté les intervalles du treillis de m -Tamari étiqueté. Pour $m = 1$, ces intervalles sont les classes d'intervalles du treillis de Tamari-Parking quotienté par la relation $[a, b] \sim [a, c]$ si et seulement si les chemins de Dyck étiquetés b et c ont le même chemin de Dyck sous-jacent. En d'autres termes, Bousquet-Mélou, Chapuy et Préville-Ratelle ne considèrent un étiquetage que sur le minimum de l'intervalle considéré. En utilisant les bijections de la section 2.8.1, on peut exprimer le poset de Tamari-Parking en termes de 2-partitions non croisées, de listes de Dyck et d'arbres de parking. Je le représente en termes d'arbres de parking à la figure 2.8.8. J'ai conjecturé le résultat suivant en le testant jusqu'à $n = 6$ avec Sage :

Conjecture 2.8.34. Le poset de Tamari-Parking \widehat{TP}_n est Cohen-Macaulay. Son complexe d'ordre est homotope à une sphère de dimension $n - 2$.

Han [Han24] a prouvé le premier résultat suivant grâce à un algorithme d'Euclide pour le calcul de la borne inférieure, adapté de celui de Friedman et Tamari [FT67] :

Proposition 2.8.35 ([Han24]). *Le poset de Tamari-Parking \widehat{TP}_n est un treillis.*

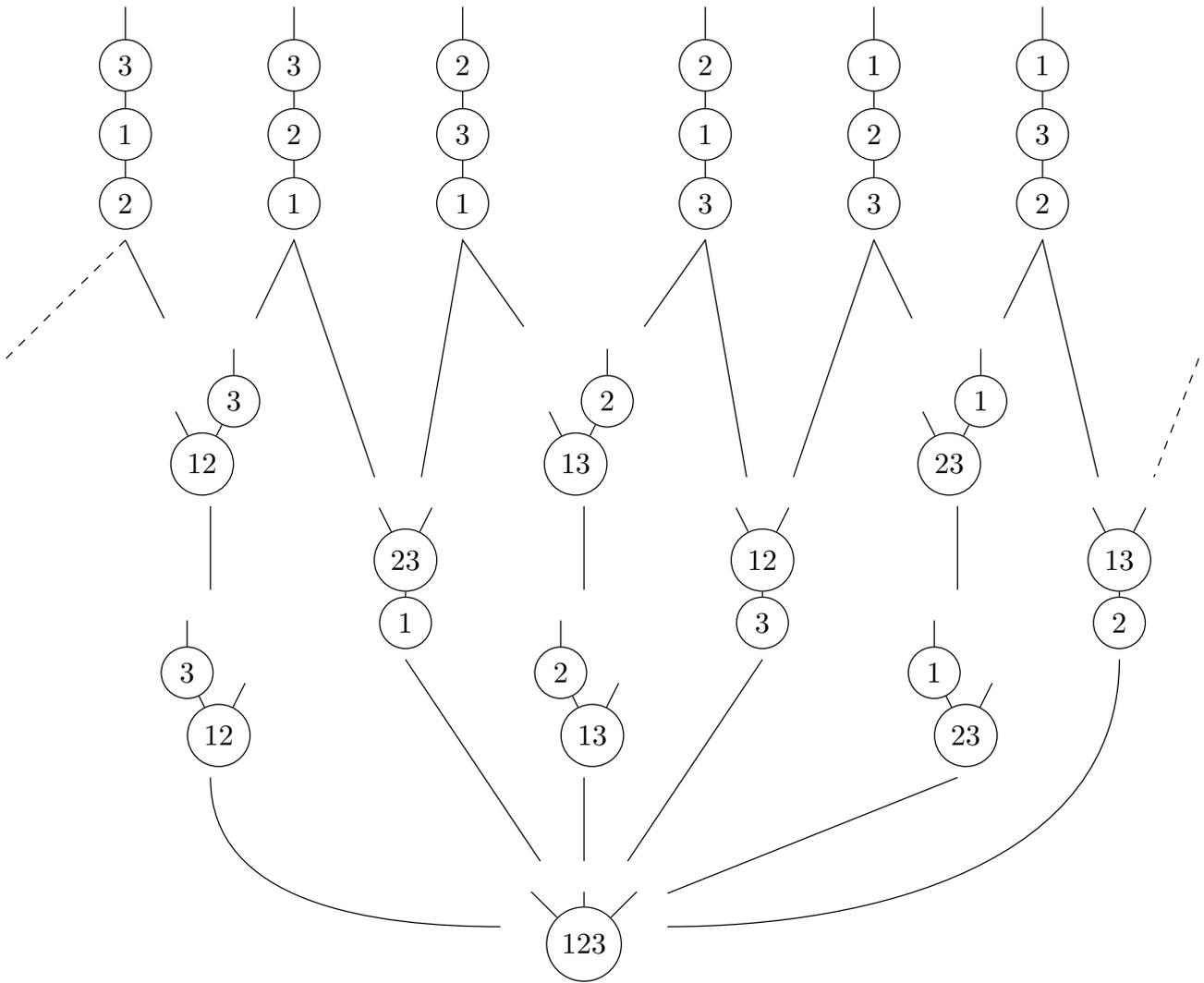


FIGURE 2.8.8 – Treillis de Tamari-Parking sur $\{1, 2, 3\}$ (l’arête en pointillés de gauche se recolle avec celle de droite)

Nous avons ensuite poursuivi le stage de Han sur l’étude des preuves du caractère Cohen-Macaulay du treillis de Tamari de la littérature [BS97; Müh15]. En raisonnant par l’absurde, Han a montré le résultat suivant :

Proposition 2.8.36 ([Han24]). *Le poset de Tamari-Parking \widehat{TP}_n n’est ni CL- ni EL-épluchable.*

L’étude des treillis de Tamari-Parking n’est qu’à son début et plusieurs avenues de recherche y sont reliées. Nous les détaillons au chapitre 6.

Opérades, monades et bigèbres combinatoires : aspects algébriques

3.1 Les opérades, des monades comme les autres ?

La notion d'opérade a été introduite au tournant des années 1970 par May [May72] et Boardman-Vogt [BV68; BV73] en topologie algébrique, pour caractériser les espaces de lacets itérés. Le nom "opérade" a été introduit par May comme un mot-valise pour "opérations" et "monades", les opérades formant un type particulier de monades (au sens de la théorie des catégories), comme je le détaillerai dans la suite.

Commençons d'abord par nous attarder sur la notion de monade. Cette notion apparaît à la fois en théorie des catégories et en sémantique des langages de programmation. Je commencerai ici par détailler la définition plus pratique avant de donner la définition catégorique, plus formelle. Les monades sont apparues en sémantique des langages de programmation dans les travaux précurseurs de Mulry [Mul98; Mul92] et ont été développées par de nombreux auteurs depuis lors [JP03; Mos11; OPM14; FKM16; Tas18; CT20; HT21; KS23]. Cette construction a rapidement été mise en œuvre dans des langages de programmation fonctionnelle. Rappelons que la programmation fonctionnelle est un paradigme de programmation qui repose sur l'utilisation de fonctions, par opposition à la programmation orientée objet qui repose sur la création et la manipulation d'objets, et la programmation impérative qui repose sur une suite d'instructions. Les langages de programmation fonctionnelle trouvent leur origine dans le lambda-calcul et la logique (et la théorie des catégories). Donnons maintenant un exemple concret de monade. Pour obtenir un programme complet, il est courant de vouloir appliquer des fonctions à des fonctions, ce qui n'est possible que si le type de sortie de la première fonction correspond au type d'entrée de la deuxième. À titre d'exemple, imaginons vouloir définir la fonction "inverse" qui à un entier n associe son inverse $\frac{1}{n}$. Tout étudiant de première année sera capable de dire que la composée d'"inverse" avec elle-même donnera l'identité. La subtilité que les compilateurs leur rappellent souvent est qu'on ne peut pas diviser par zéro. En appliquant "inverse" à un entier n , il y a donc deux résultats possibles : un entier $\frac{1}{n}$ ou une exception "on ne peut pas diviser par zéro". Les monades permettent de prendre en compte cela et de composer des fonctions générant des exceptions ou des effets de bord. De manière formelle, une monade pour un langage de programmation est une structure de programmes dans laquelle une partie des valeurs retournées est englobée dans un type pour pouvoir être réutilisée dans un

autre programme. L'élément clé de cette notion est la manière dont deux appels successifs vont se comporter, notamment comment les informations issues du premier appel seront traitées dans le second appel. L'utilisation de monades a été popularisée par le langage de programmation Haskell et est maintenant utilisée dans la plupart des langages de programmation tels que C/C++, Java, Javascript, OCaml, Python et Ruby. Une dernière anecdote intéressante : le langage Haskell tient son nom du logicien Haskell Curry, à l'origine de la correspondance de Curry-Howard-Lambek [Cur42; How80; Lam68; Lam69] dans le cadre de la logique combinatoire, qui établit l'équivalence entre une preuve, un programme et un foncteur dans une catégorie. Cette correspondance me tient particulièrement à cœur puisque c'est le paradigme sur lequel le pôle PPS (Preuves, Programmes, Systèmes) de l'IRIF, auquel appartient l'équipe *Algèbre et calcul*, s'est bâti.

D'un point de vue formel, une monade est une construction catégorique se comportant comme un monoïde dont elle tire son nom. Étant donné une catégorie \mathcal{C} et un endofoncteur $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, une monade est une loi de composition $\mu : T \circ T \rightarrow T$ associative, c'est-à-dire que $\mu \circ (\mu \otimes id_T) = \mu \circ (id_T \otimes \mu)$. Notez qu'une monade possède aussi une transformation naturelle du foncteur identité de \mathcal{C} dans T , que nous omettons. Par exemple, considérons la catégorie des ensembles Set et l'endofoncteur \mathbb{P} qui à un ensemble E associe l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$. La monade des puissances (*power set monad*) est la transformation naturelle $\mathbb{P} \circ \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ qui associe à un ensemble $\{V_1, \dots, V_k\}$ de sous-ensembles (non nécessairement disjoints) de E son union $\cup_{i=1}^k V_i$.

3.1.1 Opérades algébriques classiques

Dans les années 1990, une variante des opérades, appelée *opéradе algébrique*, a fait son apparition, avec de nouvelles applications algébriques. Cette introduction a été suivie d'une explosion du nombre de travaux reliés aux opérades, caractérisée de "Renaissance des opérades" [Lod96; LSV97]. Nous ne donnerons dans cette section qu'une présentation synthétique de ce sujet. Le lecteur curieux pourra se référer à [LV12] pour un traitement plus développé. Notez que nous nous intéressons particulièrement dans ce manuscrit à l'action du groupe symétrique et laisserons donc de côté les opérades non-symétriques, dont un traitement développé pourra être trouvé dans [Gir18].

Définition 3.1.1 ([LV12], 5.2.1). Une *opéradе (algébrique symétrique) ensembliste* (resp. *vectorielle*) $\mathcal{A} = (\mathbb{A}, \gamma, \nu)$ est un monoïde dans la catégorie des espèces ensemblistes (resp. vectorielle). C'est une espèce \mathbb{A} munie d'une transformation naturelle $\gamma : \mathbb{A} \circ \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$, appelée *composition* et d'une transformation naturelle $\eta : I \rightarrow \mathbb{A}$, appelée *unité*, satisfaisant les axiomes d'associativité et d'unité :

$$\gamma(\gamma \circ \text{Id}) = \gamma(\text{Id} \circ \gamma) \text{ et } \gamma(\eta \circ \text{Id}) = \gamma(\text{Id} \circ \eta). \quad (3.1.1)$$

Étant donné deux ensembles finis disjoints V et W , et un élément v de V , on peut aussi définir une composition partielle $\circ_v : \mathcal{A}(V) \otimes \mathcal{A}(W) \mapsto \mathcal{A}(V \cup W \setminus v)$.

Nous noterons $\mathcal{A}(n)$ pour $\mathbb{A}(\llbracket n \rrbracket)$. Dans tout ce mémoire, nous supposons $\mathcal{A}(n)$ fini (resp. de dimension finie).

Les opérades algébriques ont été introduites pour l'étude des types d'algèbres, c'est-à-dire des algèbres sur une opéradе \mathcal{A} fixée.

Définition 3.1.2 ([LV12], 5.2.3). Une *algèbre* sur une opéradе \mathcal{A} est un espace vectoriel A muni d'un morphisme \mathfrak{S}_n -équivariant $m_A^n : \mathcal{A}(n) \otimes A^{\otimes n} \rightarrow A$, compatible avec les morphismes η et γ de la structure opéradique. L'algèbre libre sur une opéradе \mathcal{A} sur l'espace

des générateurs V est définie par

$$\mathcal{A}(V) = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{A}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n}, \quad (3.1.2)$$

où $\sigma \cdot (v_1, \dots, v_n) := (v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(n)})$. Le foncteur de Vect dans Vect qui a un espace vectoriel V associe $\mathcal{A}(V)$ est appelé *foncteur de Schur*.

Définition 3.1.3 ([LV12], 5.7.1). Une *coopérade* $\mathcal{C}^* = (\mathcal{C}^*, \Delta, \varepsilon)$ est une espèce \mathcal{C}^* , munie de deux transformations naturelles $\Delta : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C}^* \circ \mathcal{C}^*$ et $\varepsilon : \mathcal{C}^* \rightarrow I$ (counité) qui satisfont des axiomes de coassociativité et de counitalité. Quand \mathcal{C} est une opérade, $\mathcal{C}^*(n) = \text{Hom}(\mathcal{C}(n), \mathbb{K})$, munie de la représentation duale, est une coopérade, appelée la *coopérade duale* de \mathcal{C} .

Définition 3.1.4 ([LV12], 5.7.3 et 5.7.4). Une *cogèbre* sur une opérade \mathcal{C} est un espace vectoriel C muni d'un morphisme \mathfrak{S}_n -équivariant $\gamma_C^n : \mathcal{C}(n) \otimes C \rightarrow C^{\otimes n}$, compatible avec la structure d'opérade de \mathcal{C} . La cofiltration $\mathcal{F}_n C$ est, pour tout \mathcal{C}^* -cogèbre C :

$$\mathcal{F}_n C = \{x \in C \mid \forall p > n, \forall \delta \in \mathcal{C}(p), \delta(x) = 0\}.$$

L'espace vectoriel $\mathcal{F}_1 C$ est l'espace vectoriel des *éléments primitifs*, aussi noté $\text{Prim}(C)$. Une \mathcal{C}^* -cogèbre C est *conilpotente* si $C = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n C$. La cogèbre (conilpotente) libre sur l'opérade \mathcal{C} , qui a V comme espace des primitifs, est :

$$\mathcal{C}^*(V) = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{C}^*(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n}. \quad (3.1.3)$$

Exemples 3.1.5. • L'opérade (\mathbb{E}^+, γ) , où γ est l'application qui transforme un ensemble d'ensembles $\{E_1, \dots, E_k\}$ en un ensemble $\bigcup_{i=1}^k E_i$, est l'opérade commutative Comm qui encode les algèbres associatives et commutatives.

- L'opérade (\mathbb{L}^+, γ) , où γ est l'application qui transforme une liste de listes (L_1, \dots, L_k) en une liste obtenue par la concaténation des L_i , est l'opérade associative Assoc qui encode les algèbres associatives.
- L'opérade dont l'espèce sous-jacente est l'espèce Lie est l'opérade Lie qui encode les algèbres de Lie.
- L'opérade $(\mathbb{E}^\bullet, \gamma)$, où γ est l'application qui transforme un ensemble pointé d'ensembles pointés $\{E_1, \dots, E_k\}$, pointé en E_1 , en un ensemble pointé $\bigcup_{i=1}^k E_i$, pointé au pointage de E_1 , est l'opérade permutative Perm introduite par Chapoton [Cha01]. Elle encode les algèbres permutatives, c'est-à-dire munies d'un produit binaire $*$ associatif et satisfaisant $x * y * z = x * z * y$.
- Il y a deux opérades dont l'espèce sous-jacente est \mathbb{A} : l'opérade PreLie introduite par [CL01] et l'opérade NAP introduite par [Liv06]. La différence entre ces deux opérades se trouve dans la composition opéradique γ , représentée sur un exemple sur la figure 3.1.1.

△

La suspension des séries indicatrices de cycles est issue d'une suspension définie au niveau des espaces vectoriels gradués :

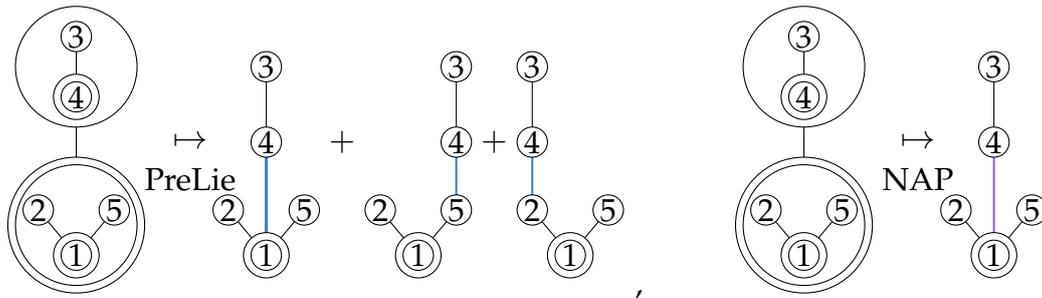


FIGURE 3.1.1 – Composition opéradique pour l'opérade pré-Lie (à gauche) et NAP (à droite).

Définition 3.1.6. [LV12, p159] Une *espèce (vectorielle) graduée* est un foncteur $\mathbb{G} : \text{Bij} \rightarrow \text{grVect}$, à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels gradués. À toute espèce vectorielle \mathbb{F} peut être associée une espèce graduée \mathbb{F}_{gr} concentrée en degré 0, c'est-à-dire que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $(\mathbb{F}_{gr})_j(E) = \delta_{j=0}\mathbb{F}(E)$ pour tout ensemble fini E .

La *suspension* d'une espèce graduée \mathbb{G} est l'espèce graduée $s\mathbb{G}$ vérifiant $s\mathbb{G}_p = \mathbb{G}_{p-1}$.

La *désuspension* d'une espèce graduée \mathbb{G} est l'espèce graduée $s\mathbb{G}$ vérifiant $s\mathbb{G}_p = \mathbb{G}_{p+1}$.

Ce décalage de degré se traduit au niveau des calculs par un signe. Quand on oublie la graduation, les signes obtenus correspondent à la suspension des espèces. Nous renvoyons à [LV12] pour plus de détails à ce sujet.

3.2 Opérades et posets

3.2.1 Partitions (bi)décorées par une opérade

Les partitions décorées par une opérade ont été introduites par Méndez et Yang [MY91]. Vallette a étudié dans [Val07] leur lien avec la dualité de Koszul des opérades. Nous en présentons ici une généralisation, les partitions décorées de Vallette correspondant à ce que nous appelons partitions décorées à droite dans ce qui suit.

Définition 3.2.1. Soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux opérades ensemblistes connexes ($\mathcal{P}(\emptyset) = \mathcal{Q}(\emptyset) = \emptyset$ et $\mathcal{P}(\{s\}) = \mathcal{Q}(\{s\}) = \{s\}$). Une partition $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -décorée (ou bidécorée) d'un ensemble E est un triplet $(\pi, {}^{\mathcal{P}}\xi, \xi^{\mathcal{Q}})$ où π est une partition de E , ${}^{\mathcal{P}}\xi$ est un élément de $\mathcal{P}(\pi)$, et $\xi^{\mathcal{Q}}$ est une collection d'éléments de $\xi_T^{\mathcal{Q}} \in \mathcal{Q}(T)$ pour $T \in \pi$. Nous notons ${}^{\mathcal{P}}\Pi^{\mathcal{Q}}(E)$ l'ensemble des partitions $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -décorées de E .

Remarque 3.2.2. Nous avons l'égalité d'espèces : ${}^{\mathcal{P}}\Pi^{\mathcal{Q}} = \mathcal{P} \circ \mathcal{Q}$.

L'ensemble des partitions $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -décorées peut être muni d'un ordre partiel : $(\pi, {}^{\mathcal{P}}\xi, \xi^{\mathcal{Q}}) \leq (\tau, {}^{\mathcal{P}}\eta, \eta^{\mathcal{Q}})$ si et seulement si

- $\pi \leq \tau$ en tant que partition
- pour toute part p de π , il existe un élément ${}^{\mathcal{P}}\mu_p \in \mathcal{P}(\tau|_p)$. Ces éléments vérifient

$${}^{\mathcal{P}}\eta = {}^{\mathcal{P}}\xi \circ \left({}^{\mathcal{P}}\mu_p \right)_{p \in \pi}$$

- pour toute part p de π , il existe un élément $\mu_p^{\mathcal{Q}} \in \mathcal{Q}(\tau|_p)$ tel que

$$\xi_p^{\mathcal{Q}} = \mu_p^{\mathcal{Q}} \circ \left(\eta_t^{\mathcal{Q}} \right)_{t \in \tau|_p}$$

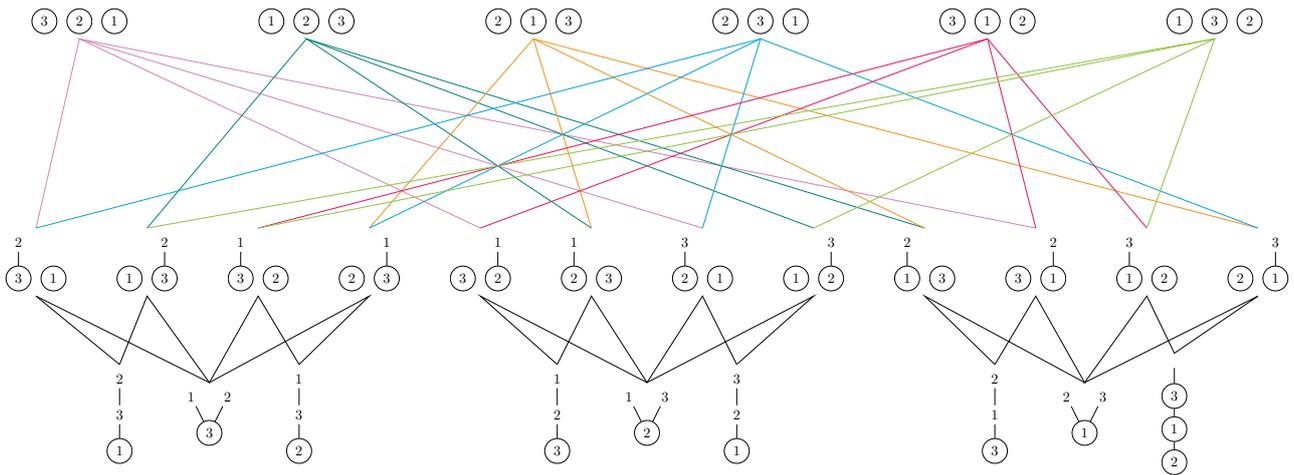


FIGURE 3.2.1 – Le poset $\text{Assoc}\Pi^{\text{NAP}}(\{1,2,3\})$

Muni de cet ordre, le foncteur qui a un ensemble fini E associe le poset ${}^{\mathcal{P}}\Pi^{\mathcal{Q}}(E)$ est une espèce en poset opéradique comme définie à la section 5.2.

Exemple 3.2.3. Le poset $\text{Assoc}\Pi^{\text{NAP}}(\{1,2,3\})$ est représenté sur la figure 3.2.1. △

Nous présentons maintenant deux cas particuliers de partitions $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -décorées : les partitions $(\mathcal{P}, \text{Comm})$ -décorées, que nous appelons partitions \mathcal{P} -décorées à gauche, et les partitions $(\text{Comm}, \mathcal{Q})$ -décorées, que nous appelons partitions \mathcal{Q} -décorées à droite. Ces noms viennent du fait que l’espèce des partitions \mathcal{P} -décorées à gauche est $\mathcal{P} \circ \text{Comm}$, avec \mathcal{P} à gauche et l’espèce des partitions \mathcal{Q} -décorées à droite est $\text{Comm} \circ \mathcal{Q}$, avec \mathcal{Q} à droite.

Partitions décorées à gauche

Définition 3.2.4. Une partition \mathcal{P} -décorée à gauche d’un ensemble E est une partition $(\mathcal{P}, \text{Comm})$ -décorée de E , c’est-à-dire un couple (π, ξ) où π est une partition de E et $\xi \in \mathcal{P}(\pi)$. On note ${}^{\mathcal{P}}\Pi(E)$ l’ensemble des partitions \mathcal{P} -décorées à gauche de E .

Pour l’étude des posets des partitions décorées à gauche, nous introduisons la notion suivante, analogue de la notion introduite par Vallette dans [Val07].

Définition 3.2.5. Une opérade ensembliste connexe \mathcal{P} est *basique à gauche* si pour tout ensemble fini E et toute partition \mathcal{P} -décorée à gauche (π, ξ) de E , la composition opéradique

$$\prod_{T \in \pi} \mathcal{P}(T) \longrightarrow \mathcal{P}(E), \quad (\mu_T)_{T \in \pi} \mapsto \xi \circ (\mu_T)_{T \in \pi} \tag{3.2.1}$$

est injective.

Exemples 3.2.6. Les opérades suivantes sont basiques à gauche

1. L’opérade Comm est basique à gauche et $\text{Com}\Pi = \Pi$.
2. L’opérade Assoc est basique à gauche et $\text{As}\Pi$ est le poset des compositions d’ensemble (cf. 2.6.2)

3. Nous introduisons maintenant une nouvelle opérade basique à gauche mais pas à droite (voir définition 3.2.8). Considérons l'opérade quadratique \mathcal{L} avec deux générateurs binaires \dashv et \vdash satisfaisant les relations suivantes pour tous a, b et c :

$$\begin{aligned}(a \dashv b) \vdash c &= (a \dashv b) \dashv c \\ (a \vdash b) \vdash c &= (a \vdash b) \dashv c \\ a \vdash (b \dashv c) &= a \dashv (b \dashv c) \\ a \vdash (b \vdash c) &= a \dashv (b \vdash c)\end{aligned}$$

Cette opérade est un quotient de l'opérade Magmatique sur deux générateurs \dashv et \vdash . Les relations consistent exactement à oublier les opérations des nœuds ayant au moins un enfant non feuille. Le cardinal de $\mathcal{L}(E)$ est donné par [OEI24, A025227], et son raffinement $2^k \times$ [OEI24, A091894].

△

Partitions décorées à droite

Nous présentons maintenant les partitions décorées à droite qui sont le cadre de [Val07].

Définition 3.2.7. Une partition \mathcal{Q} -décorée à droite d'un ensemble E est une partition $(\text{Comm}, \mathcal{Q})$ -décorée de E , c'est-à-dire un couple (π, ξ) où π est une partition de E et ξ un ensemble d'éléments $\xi_T \in \mathcal{Q}(T)$ pour $T \in \pi$. On note $\Pi^{\mathcal{Q}}(E)$ l'ensemble des partitions \mathcal{Q} -décorées à droite de E .

Définition 3.2.8. Une opérade ensembliste connexe \mathcal{Q} est *basique à droite* si pour tout ensemble fini E et toute partition \mathcal{Q} -décorée à droite (π, ξ) de E , la composition opéradique

$$\mathcal{Q}(\pi) \longrightarrow \mathcal{Q}(S), \nu \mapsto \nu \circ (\xi_T)_{T \in \pi}$$

est injective.

Remarque 3.2.9. Les opérades basiques à droite sont appelées *set-basic* dans [Val07].

Exemples 3.2.10. Les opérades suivantes sont basiques à droite (voir [Val07] pour plus d'exemples).

1. L'opérade Comm , est basique à droite et $\Pi^{\text{Com}} = \Pi$.
2. L'opérade Assoc est basique à droite.
3. L'opérade Perm est basique à droite. Le poset Π^{Perm} est le poset des partitions pointées introduit dans [CV06] (cf. 2.6.3). Notez que Perm est basique à droite mais pas à gauche.

△

3.2.2 Constructions cobar, cobar à niveaux et dualité de Koszul

Comme retracé dans [Fre04], l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des partitions a été calculée pour la première fois par Stanley [Sta82] et Hanlon [Han81]. Joyal a pointé dans [Joy86] le lien avec l'espèce sous-jacente à l'opérade Lie . Il a fallu attendre le travail de Fresse [Fre04] pour que le lien entre posets des partitions et opérade soit prouvé,

via les constructions bar et bar à niveaux. Nous renvoyons à [Fre04, Section 4] et [LV12, p. 3.1.2] pour une définition rigoureuse de ces constructions.

Si \mathcal{C}^* est une coopérade connexe, sa *construction cobar* $\Omega(\mathcal{C}^*)$ est l'opérade différentielle graduée qui à tout ensemble fini E associe le \mathbb{K} -espace vectoriel $\Omega(\mathcal{C}^*)(E)$ engendré par les arbres enracinés réduits (tout sommet non feuille a au moins deux enfants) dont les feuilles sont indexées par E et les sommets sont des éléments de \mathcal{C}^* . La graduation est le nombre de sommets et la différentielle est induite par la cocomposition opéradique de \mathcal{C}^* . La structure opéradique de $\Omega(\mathcal{C}^*)$ est la greffe d'arbres.

La *construction cobar à niveaux* est définie de même avec des *arbres à niveaux* : à chaque sommet est associé un entier, son *niveau*, de telle manière que le niveau soit strictement croissant de la racine aux feuilles et l'ensemble des niveaux forme un intervalle $\{1, \dots, n\}$ pour un entier naturel n . Pour tout ensemble fini E , le \mathbb{K} -espace vectoriel gradué $\Omega_{\text{level}}(\mathcal{C}^*)(E)$ est engendré par les arbres à niveaux enracinés réduits, dont les feuilles sont indexées par E et les sommets par des éléments de \mathcal{C}^* . La graduation est donnée par le nombre de niveaux et la différentielle par la cocomposition opéradique de \mathcal{C}^* . Le *morphisme de dénivellation* [Fre04, Theorem 4.1.8]

$$\Omega_{\text{level}}(\mathcal{C}^*) \longrightarrow \Omega(\mathcal{C}^*), \quad (3.2.2)$$

envoie un arbre à niveaux sur l'arbre sous-jacent si les sommets ont des niveaux distincts et sur 0 sinon. De plus, il commute avec la greffe des arbres. Les constructions bar et bar à niveaux ont les mêmes espaces vectoriels gradués sous-jacents aux constructions cobar et cobar à niveaux respectivement mais une différentielle donnée par la composition opéradique.

Fresse a établi un isomorphisme entre le complexe de chaînes des posets des partitions et la construction bar à niveaux. Vallette a ensuite étendu ces résultats dans [Val07] aux posets des partitions décorées à droite. Son travail s'adapte de manière transparente aux posets des partitions décorées à gauche et aux posets des partitions bidécorés.

Proposition 3.2.11 (adapté de [Val07]). *Le complexe de chaînes des posets des partitions \mathcal{Q} -décorées à droite (resp. \mathcal{P} -décorées à gauche, resp. $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -bidécorées) est isomorphe à la construction bar à niveaux sur l'opérade \mathcal{P} (resp. \mathcal{Q} , resp. $\mathcal{P} \otimes_{\mathbb{H}} \mathcal{Q}$).*

Lorsqu'un certain complexe de chaîne associé à l'opérade \mathcal{P} est acyclique, cette opérade est dite *de Koszul*. Le premier critère pratique pour montrer cette propriété pour les opérades a été introduit dans [Val07] et consiste à montrer le caractère Cohen-Macaulay du poset des partitions associé. Un critère algorithmique reposant sur l'existence d'une base de Gröbner (ou de manière duale d'une base de Poincaré-Birkhoff-Witt), a été introduit par Dotsenko et Khoroshkin [DK10] suivant le travail de Hoffbeck [Hof10]. Je reviendrai sur ce critère dans la section suivante. Lorsqu'une opérade \mathcal{P} est de Koszul, elle admet une duale de Koszul \mathcal{Q} dont l'espèce associée vérifie

$$\mathcal{P} \circ \Sigma \mathcal{Q} = \Sigma \mathcal{Q} \circ \mathcal{P} = \mathbb{X}. \quad (3.2.3)$$

La duale de Koszul admet aussi une définition directe dans le cas quadratique en termes de définition par générateurs et relations qui fait intervenir la suspension opéradique et le produit de Hadamard avec la représentation signature (voir [LV12, Proposition 7.2.4]).

Le résultat suivant permet de retrouver les résultats calculés par ailleurs sur l'homologie des posets des partitions décorées :

Proposition 3.2.12. *Si l'opérade \mathcal{P} est de Koszul, l'unique groupe d'homologie non nul de sa construction bar est la duale de la suspension de sa duale de Koszul $\mathcal{P}^i = (\Sigma \mathcal{P}^!)^*$.*

Il n'existe pas de structure d'opérade sur la construction bar mais il en existe une sur la construction cobar : c'est pourquoi dans [DD25b] nous considérons la cohomologie des

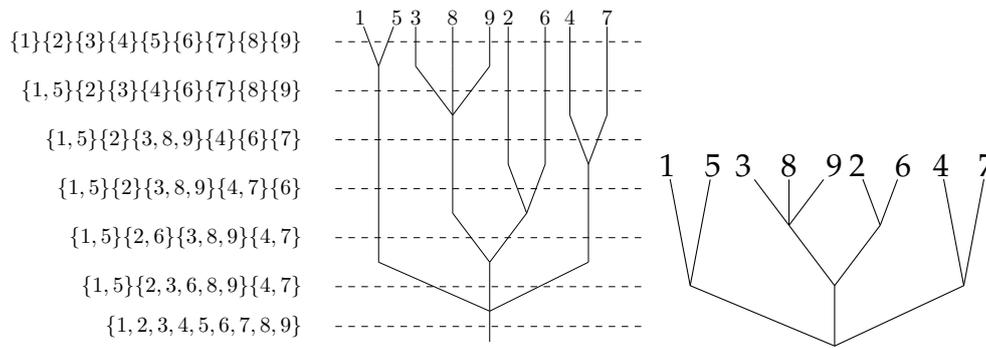


FIGURE 3.2.2 – À gauche, chaîne dans le poset des partitions. Au milieu, arbre de la construction bar à niveaux correspondant. À droite, arbre de la construction cobar correspondant.

posets des partitions (bi)décorées et la construction cobar associée. Je résume ces résultats dans la section 5. Je pointe aussi le lien entre construction cobar, construction cobar à niveaux et ensembles nichés dans la section 4.3.

3.2.3 Posets des partitions décorées et bases PBW

Je présente dans cette section les résultats de [BDH21]. Notez que ces résultats ont été obtenus dans le cadre des opérades shuffle, développé par Hoffbeck et Dotsenko–Khoroshkin [DK10]. La motivation pour ce travail vient des résultats présentés à la section précédente, en particulier des résultats de Vallette [Val07] reliant la Koszulité de l’opérade avec le fait que le poset des partitions décorées associé soit Cohen-Macaulay. D’un point de vue topologique, il existe plusieurs notions impliquant d’être Cohen-Macaulay, certaines d’entre elles présentées dans la section 2.2.2 : être totalement semi-modulaire, être CL-épluchable, être EL-épluchable, ... D’un point de vue algébrique, Dotsenko et Khoroshkin [DK10] ont introduit les notions de bases de Gröbner et bases de Poincaré-Birkhoff-Witt (abrégées dans la suite en bases PBW) pour les opérades. Commençons par rappeler les définitions d’opérade shuffle et de bases PBW pour une opérade :

Définition 3.2.13. Une *espèce shuffle* est un foncteur de la catégorie des ensembles ordonnés à valeurs dans la catégorie des \mathbb{K} -espaces vectoriels. Étant données deux espèces shuffles \mathcal{P} et \mathcal{Q} , la composée de \mathcal{P} et \mathcal{Q} est l’espèce

$$(\mathcal{P} \circ_{sh} \mathcal{Q})(I) = \bigoplus_k \mathcal{P}(k) \otimes \left(\bigoplus_{f:I \rightarrow \{1, \dots, k\}} \mathcal{Q}(f^{-1}(1)) \otimes \dots \otimes \mathcal{Q}(f^{-1}(k)) \right),$$

où f parcourt l’ensemble des surjections satisfaisant $\min f^{-1}(i) < \min f^{-1}(j)$ pour tout $i < j$. Une *opérade shuffle* est alors une transformation naturelle associative $\pi : \mathcal{P} \circ_{sh} \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$.

En particulier, la composition partielle de deux éléments p et q d’une opérade shuffle n’est pas juste donnée par un \circ_i comme pour une opérade symétrique, mais par un $\circ_{i,w}$ où w est le battage des entrées de p et de celles de q tel que le premier élément de q vienne immédiatement après le $(i-1)$ -ième élément de p . Un tel w est appelé *battage pointé*. Il y a un foncteur d’oubli de la catégorie des opérades symétriques dans la catégorie des opérades shuffles, noté $(-)_{sh}$, qui consiste à oublier l’action du groupe symétrique. Une opérade symétrique \mathcal{P} et son opérade shuffle associée \mathcal{P}_{sh} ont le même \mathbb{K} -espace vectoriel sous-jacent.

Enfin, l'opérade shuffle libre sur un ensemble de générateurs E , $\mathcal{T}_{sh}(E)$, a son espace vectoriel sous-jacent engendré par les arbres enracinés plans dont les sommets sont étiquetés par E et les feuilles par les entiers de 1 à l'arité de l'arbre de telle manière que la feuille la plus à gauche de chaque sous-arbre soit la plus petite feuille de son sous-arbre. Toute opérade shuffle peut être décrite comme un quotient d'une opérade shuffle libre. Nous renvoyons à la section 8.2 de [LV12] pour plus de détails.

Définition 3.2.14. Une *base de Poincaré-Birkhoff-Witt* (abrégée en base PBW) pour l'opérade $\mathcal{P} = \mathcal{T}(E)/(R)$ est un sous-ensemble $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{B}^{\mathcal{T}(E)}$ tel que $1 \in \mathcal{B}^{\mathcal{P}}$, $\mathcal{B}^E \subset \mathcal{B}^{\mathcal{P}}$, et $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$ soit une base du \mathbb{K} -espace vectoriel \mathcal{P} . La base $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$ doit de plus satisfaire les conditions suivantes :

1. pour $\alpha, \beta \in \mathcal{B}^{\mathcal{P}}$ et w un battage pointé de la composition $\alpha \circ_i \beta$, ou bien $\alpha \circ_{i,w} \beta \in \mathcal{B}^{\mathcal{P}}$, ou $\alpha \circ_{i,w} \beta = \sum_{\gamma} c_{\gamma} \gamma$, où les γ sont dans $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$ et satisfont $\gamma < \alpha \circ_{i,w} \beta$ dans la base ordonnée de $\mathcal{T}(E)$;
2. un tenseur $\alpha = \otimes_{v \in V(\tau)} m_v$ basé sur un arbre τ est dans $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$ si et seulement si le tenseur restreint $\alpha|_{\tau_e}$ est dans $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$ pour toute arête interne e de τ . (Le sous-arbre τ_e de τ est le sous-arbre maximal de τ ayant uniquement l'arête interne e .)

Nous présentons maintenant la réponse élaborée dans [BDH21] à la question présentée en introduction de l'analogie en termes "topologie des espèces" du fait que l'opérade associée admette une base PBW.

Théorème 3.2.15. Soit $\tilde{\mathcal{P}}$ une opérade ensembliste quadratique basique à droite et soient $\Pi_{\tilde{\mathcal{P}}}$ les posets des partitions décorées à droite par \mathcal{P} associés. Si les posets $\left\{ \Pi_{\tilde{\mathcal{P}}}^{(d)} \right\}_d$ admettent des étiquetages CL-compatibles avec les isomorphismes de sous-posets, alors l'opérade algébrique $\mathcal{P} = \mathcal{T}(E)/(R)$ associée à $\tilde{\mathcal{P}}$ admet une base PBW comme définie à la définition 3.2.14.

La réciproque est plus complexe : nous montrons dans [BDH21] un exemple d'opérade PBW dont les posets associés n'admettent pas d'étiquetage CL-compatibles avec l'isomorphisme de sous-posets.

Ces résultats expliquent une partie des "jumeaux de Whitney" constatés dans l'article [DHD23]. Contrairement à notre travail, ces auteurs ne s'intéressent qu'aux dimensions et non à des invariants plus fins et ne sont pas en mesure de distinguer deux opérades ayant des espaces vectoriels sous-jacents de même dimension : ils obtiennent donc beaucoup plus de couples que ceux issus de la dualité de Koszul.

3.3 Théorèmes de rigidité et bigèbres généralisées

L'une des questions qui motivent les algébristes est de trouver des systèmes générateurs, voire des bases si possible, pour les algèbres. La réponse est claire lorsque l'on sait que l'algèbre considérée est libre sur un ensemble de générateurs donné, mais beaucoup plus complexe en général. Je présente dans cette section les résultats issus de [BD19] et [BD20].

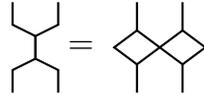
Dans toute la section, nous considérons deux opérades algébriques \mathcal{P} (qui encodera le produit) et \mathcal{C} (qui encodera le coproduit). Les opérades considérées sont *connexes*, c'est-à-dire telles que $\mathcal{P}(0) = \mathcal{C}(0) = \emptyset$ et $\mathcal{P}(1) = \mathcal{C}(1) = \mathbb{K} \cdot \text{id}$ et telles que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{C}(n)$ sont de dimension finie.

3.3.1 Exemple de base : algèbres de Hopf

Le type de bigèbre le plus connu est celui d'*algèbre de Hopf*. Une algèbre de Hopf $(\mathcal{H}, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ est un espace vectoriel \mathcal{H} muni d'une structure d'algèbre (\mathcal{H}, μ, η) et de cogèbre $(\mathcal{H}, \Delta, \varepsilon)$ telles que Δ et ε soient des morphismes d'algèbres (ou de manière équivalente, telles que μ et η soient des morphismes de cogèbres). Nous omettrons ici les axiomes liés à l'antipode S . Pour un produit μ binaire, cela se traduit en équation pour tous x et y de \mathcal{H} par :

$$\Delta(\mu(x, y)) = \mu(\Delta(x)_1, \Delta(y)_1) \otimes \mu(\Delta(x)_2, \Delta(y)_2), \quad (3.3.1)$$

où on utilise la notation de Sweedler $\Delta(x) = \Delta(x)_1 \otimes \Delta(x)_2$ et $\Delta(y) = \Delta(y)_1 \otimes \Delta(y)_2$. En termes de schémas, on illustre cette propriété par le diagramme suivant :



où on note Y le produit et X le coproduit.

Remarque 3.3.1. Une algèbre de Hopf est aussi munie d'un antipode, mais nous omettrons ce détail ici.

Exemple 3.3.2. Considérons l'algèbre des polynômes $\mathbb{C}[X]$ munie du produit usuel \times et du coproduit

$$\Delta(X^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k \otimes X^{n-k} \quad (3.3.2)$$

Alors $(\mathbb{C}[X], \times, \Delta)$ est une algèbre de Hopf. △

Dans l'exemple précédent, on constate que l'algèbre des polynômes est engendrée par X en tant qu'algèbre et que les éléments de $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$ sont les seuls éléments qui satisfont :

$$\Delta(y) = 1 \otimes y + y \otimes 1. \quad (3.3.3)$$

Les éléments qui satisfont cette propriété sont appelés *éléments primitifs*. L'algèbre $\mathbb{C}[X]$ est donc engendrée par ses éléments primitifs. C'est cette propriété que généralise le théorème de Milnor-Moore :

Théorème 3.3.3 ([MM65]). *Toute algèbre de Hopf connexe, graduée, commutative et cocommutative A satisfaisant $\dim A_n < +\infty$, pour tout n , est une algèbre commutative libre engendrée par ses éléments primitifs.*

qui est un corollaire du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt :

Théorème 3.3.4 ([Bir37; Wit37]). *Toute algèbre de Hopf connexe, graduée et associative cocommutative A satisfaisant $\dim A_n < +\infty$, pour tout n , est isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie libre sur ses éléments primitifs.*

3.3.2 Bigèbres généralisées

Intéressons-nous à un autre exemple combinatoire. Étant donné un ensemble fini \mathcal{A} appelé *alphabet*, l'ensemble \mathcal{A}_n des *mots* de longueur n sur \mathcal{A} est l'ensemble des applications de $\llbracket n \rrbracket$ dans \mathcal{A} . On note $m_1 \dots m_n := m(1) \dots m(n)$ un mot de longueur n . On appelle *mot vide* et on note ε le mot de longueur 0. L'espace vectoriel $\mathcal{A}^* = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{K} \cdot \mathcal{A}_n$ est l'espace

vectorel des mots sur \mathcal{A} . L'opération \cdot qui a deux mots $a_1 \dots a_p$ et $b_1 \dots b_q$ associe le mot $a_1 \dots a_p b_1 \dots b_q$ est appelée la *concaténation*. Son dual, c'est-à-dire le coproduit qui à un mot m associe $\sum_{m=uv} u \otimes v$ est la *déconcaténation*. D'un point de vue algébrique, \mathcal{A}^* est l'algèbre associative libre sur l'espace vectoriel engendré par \mathcal{A} , $\mathbb{K}\mathcal{A}$. L'espace vectoriel des éléments primitifs est $\mathbb{K}\mathcal{A}$: \mathcal{A}^* est donc libre sur l'espace vectoriel de ses éléments primitifs. Cependant, il est facile de vérifier que le coproduit n'est pas un morphisme d'algèbre : ce cas offre une motivation forte pour relâcher la notion de bigèbre (de Hopf) en bigèbres généralisées (voir [Lod08]).

Les bigèbres généralisées sont des généralisations des algèbres de Hopf où le coproduit n'est plus nécessairement un morphisme d'algèbre. De manière formelle, une bigèbre généralisée $(\mathcal{H}, \mathcal{P}, \mathcal{C})$ est un espace vectoriel \mathcal{H} qui est muni d'une structure de \mathcal{P} -algèbre et d'une structure de \mathcal{C}^* -cogèbre (voir §3.1.1), telles que les structures d'algèbres et de cogèbres vérifient des lois mixtes distributives λ (voir [FM97]). Le nom "loi distributive" vient de la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition. Elles ont d'abord été formulées pour deux types d'algèbres différentes (voir [Bec69; Bur73]) avant d'être étendues aux opérades par Markl [Mar96a] puis à un couple formé d'une opérade et d'une co-opérade par Markl et Fox [FM97]. Notez que cette notion a été introduite de manière indépendante pour des couples formés d'une monade et d'une comonade sur la même catégorie [Van73], notamment dans un cadre sémantique [SK93; TP97; PW02], ainsi que pour des théories de Lawvere [Che20]. Je finirai ce paragraphe en citant plusieurs résultats pour les opérades et/ou les monades reliés au travail de [BD19] : liés à la non-existence de lois distributives [ZM22], à leur calcul explicite [Bon+15; BM19] ou encore aux bigèbres généralisées [LMW15].

Markl et Fox définissent comme suit une loi mixte distributive reliant une opérade \mathcal{P} et une coopérade \mathcal{C}^* :

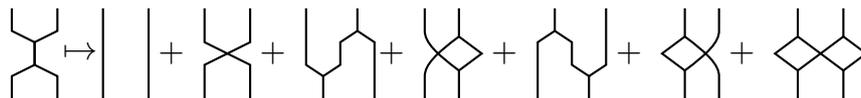
Définition 3.3.5 ([FM97]). Une *loi mixte distributive* λ est une transformation naturelle $\mathcal{P} \circ \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C}^* \circ \mathcal{P}$ compatible avec la structure opéradique de \mathcal{P} et coopéradique de \mathcal{C}^* . Pour tout espace vectoriel V , l'algèbre $\mathcal{P}(\mathcal{C}^*(V))$ est alors munie d'une structure de \mathcal{C}^* -cogèbre et la cogèbre $\mathcal{C}^*(\mathcal{P}(V))$ d'une structure de \mathcal{P} -algèbre.

Remarque 3.3.6. Ces lois sont écrites dans [Lod08] comme des lois $\{\lambda(m, n)\}$ satisfaisant

$$\lambda(m, n) : \mathcal{C}(m) \otimes \mathcal{P}(n) \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{S}_{t_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{t_m}} \mathcal{P}(t_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(t_m) \otimes_{\mathfrak{S}_N} \mathbb{K}[\mathfrak{S}_N] \otimes_{\mathfrak{S}_{s_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{s_n}} \mathcal{C}(s_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{C}(s_n),$$

où la somme parcourt l'ensemble des $N \geq 1$ et $s_1 + \dots + s_n = t_1 + \dots + t_m = N$. Nous établissons le lien entre ces deux écritures dans [BD19].

Exemple 3.3.7. Pour les bigèbres commutatives cocommutatives, l'analogie non-unitaire (pour les algèbres sans unité) des relations de Hopf s'écrit diagrammatiquement :



Comme une loi mixte distributive est compatible avec les structures opéradiques et co-opéradiques de \mathcal{P} et \mathcal{C} respectivement, il suffit de les donner sur les opérations génératrices de ces (co)opérades. △

Définition 3.3.8 ([Lod08]). Étant données \mathcal{P} et \mathcal{C} deux opérades et λ une loi mixte distributive, une $\mathcal{C}^* -_{\lambda} \mathcal{P}$ -bigèbre \mathcal{H} est un espace vectoriel \mathcal{H} qui est une \mathcal{P} -algèbre, une \mathcal{C}^* -cogèbre et tel que λ est une loi mixte distributive reliant \mathcal{P} et \mathcal{C} satisfaite sur tous les éléments de \mathcal{H} .

3.3.3 Théorème de rigidité

Les bigèbres généralisées peuvent satisfaire des théorèmes analogues au théorème de Milnor-Moore, appelés *théorèmes de rigidité*. L'article [BD19] prouve l'existence systématique de théorèmes de rigidité quand l'opérade et la coopérade ont la même espèce sous-jacente. La difficulté restante se situe dans le calcul des lois de confluence associées. Nous rappelons dans un premier temps l'énoncé du théorème de rigidité tel que formulé par Loday :

Théorème 3.3.9 ([Lod08]). *Soit \mathcal{H} une $\mathcal{C}^* -_{\lambda}$ \mathcal{P} -bigèbre vérifiant :*

(H0) *λ est une loi mixte distributive,*

(H1) *toute \mathcal{P} -algèbre libre est munie d'une structure de $\mathcal{C}^* -_{\lambda}$ \mathcal{P} -bigèbre,*

(H2iso) *le morphisme de \mathcal{C}^* -cogèbre $\varphi(V) : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{C}^*(V)$ est un isomorphisme.*

Alors toute $\mathcal{C}^ -_{\lambda}$ \mathcal{P} -bigèbre conilpotente \mathcal{H} est libre et colibre sur l'espace vectoriel de ses éléments primitifs.*

$$\mathcal{P}(\text{Prim } \mathcal{H}) \cong \mathcal{H} \cong \mathcal{C}^*(\text{Prim } \mathcal{H}).$$

De plus, l'espace vectoriel engendré par les éléments primitifs est aussi engendré par les éléments irréductibles.

Les théorèmes de rigidité ont été étendus au cadre monadique dans [LMW15]. Ils permettent notamment de donner des bases d'algèbres explicites (voir [BCR15] par exemple). L'objet de [BD19] est la question suivante : il n'existe pas de théorème de rigidité pour les bigèbres pré-Lie copré-Lie et Lie coLie : est-ce parce qu'il n'en existe aucun ou parce que les lois mixtes distributives associées sont difficiles à calculer ? Pour répondre à cette question, nous avons dû relâcher un peu les contraintes entre algèbre et cogèbre et considérer une *loi de confluence* à la place d'une loi mixte distributive.

Définition 3.3.10 ([BD19]). *Une loi de confluence α entre deux opérades \mathcal{P} et \mathcal{C} est une transformation naturelle*

$$\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}^* \circ \mathcal{P}, \quad (3.3.4)$$

compatible avec la structure d'opérade de \mathcal{C} .

Remarque 3.3.11. Ces lois pourront être réécrites comme des familles de lois $\alpha(E, S)$ satisfaisant pour tous ensembles finis E et S :

$$\alpha(E, S) : \mathcal{C}(S) \otimes \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}^{\otimes S}(E),$$

où $\mathcal{P}^{\otimes S}(E) = \bigoplus_{f:E \rightarrow S} \bigotimes_{x \in E} \mathcal{P}(f^{-1}(x))$.

Théorème 3.3.12 ([BD19]). *Soient \mathcal{P} et \mathcal{C} deux opérades algébriques connexes, telle que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{C}(n)$ soient de dimension finie. À toute famille d'isomorphismes de \mathfrak{S}_n -modules $\varphi_n : \mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{C}^*(n)$ peut être associée une loi de confluence α telle que toute $\mathcal{C}^* -_{\alpha}$ \mathcal{P} -bigèbre conilpotente soit libre et colibre sur l'espace vectoriel engendré par ses éléments primitifs :*

$$\mathcal{P}(\text{Prim } \mathcal{H}) \cong \mathcal{H} \cong \mathcal{C}^*(\text{Prim } \mathcal{H}).$$

Le corollaire suivant est immédiat :

Corollaire 3.3.13 ([BD19]). *Étant données deux opérades algébriques connexes \mathcal{C} et \mathcal{P} et une loi de confluence α induite par un isomorphisme $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}^*$, une \mathcal{P} -algèbre \mathcal{H} est libre, si et seulement si il est possible de définir sur \mathcal{H} une loi de confluence α .*

\mathcal{P}	\mathcal{C}	référence
Comm	Comm	[Bor53]
Assoc	Assoc	[LR06]
Zinbiel	Assoc	[Bur10]
Leibniz	Assoc	[BD19]
Poisson	Assoc	[BD19]
Zinbiel	Leibniz	[BD19]
Dend	Dend	[Foi07]
Dend	Dup	[BD20]
Dend	Dup-gauche	[BD20]
Tridend	Tridend	[BD20]
Tridend	Terplcial	[BD20]
Terplcial	Terplcial	[BD20]
NAP	preLie	[Liv06]
preLie	preLie	[BD19]
Perm	Perm	[BD19]
NAP	NAP	[BD19]
PAN	PAN	[BD19]
Perm	PAN	[BD19]
2-as	Dipt	[BD19]

TABLE 3.1 – Exemples de théorèmes de rigidité

3.3.4 Exemples de théorèmes de rigidité obtenus par dualité

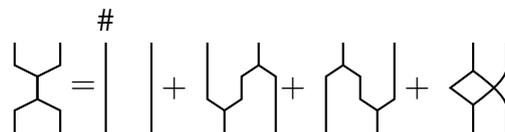
En dualisant les produits connus de différentes algèbres, nous avons ainsi obtenu de nouveaux théorèmes de rigidité. Nous résumons ces théorèmes dans le tableau 3.1.

Bigèbres pré-Lie coprè-Lie

L'exemple des bigèbres pré-Lie coprè-Lie a été la motivation pour l'introduction des lois de confluence. En effet, notant \curvearrowright le produit pré-Lie, celui-ci se relie à son coproduit dual pour $T \in \text{PreLie}(n)$ et $S \in \text{PreLie}(k)$ par :

$$\Delta(T \curvearrowright S) = n \times T \otimes S + (T \curvearrowright S_1) \otimes S_2 + (T_1 \curvearrowright S) \otimes T_2 + T_1 \otimes (T_2 \curvearrowright S), \quad (3.3.5)$$

où $\Delta(T) = T_1 \otimes T_2$, $\Delta(S) = S_1 \otimes S_2$. En termes de schémas :



Ce théorème de rigidité a été appliqué dans [BD19] pour montrer que les algèbres pré-Lie sur les arbres en boîtes (box trees, voir [Foi15; Oge13b]), les hyperarbres et les arbres gras (voir [Zas02]) sont libres.

Bigèbres NAP coNAP

Considérant l'opérade NAP [CL01; DL02], Livernet a montré dans [Liv06] l'existence d'une loi mixte distributive pour les bigèbres pré-Lie coNAP. La loi de confluence pour les

bigèbres NAP coNAP est donnée par :

$$\Delta(T \cdot S) = T \otimes S + T_1 \cdot S \otimes T_2,$$

où $\Delta(T) = T_1 \otimes T_2$ (notation de Sweedler).

Le théorème de rigidité associé a été appliqué dans [BD19] pour montrer que les algèbres NAP sur les arbres en boîtes (box trees, voir [Foi15; Oge13b]), les hyperarbres et les arbres gras (voir [Zas02]) sont libres. Ces structures d'algèbres NAP ont été obtenues en ne retenant que les termes de greffe sur la racine dans le produit pré-Lie du paragraphe précédent.

Bigèbres coPAN

Nous appelons PAN la duale de Koszul de l'opérade NAP. En utilisant les méthodes de Dotsenko et Hoffbeck (voir [Hof10; DK07]), le produit PAN \leftarrow sur un espace vectoriel V satisfait pour tous x, y et z de V :

$$\begin{aligned} x \leftarrow (y \leftarrow z) &= 0 \\ (x \leftarrow y) \leftarrow z &= (x \leftarrow z) \leftarrow y \end{aligned}$$

Une base de $\text{PAN}(n)$ est donnée par l'ensemble des ensembles pointés sur n éléments. On notera ici que comme NAP et preLie ont la même espèce sous-jacente, PAN et Perm ont eux-aussi la même espèce sous-jacente. Notant alors en gras l'élément pointé de l'ensemble, le produit PAN se réécrit :

$$\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} \leftarrow \{y_1, \dots, y_l\} = \delta_{l=1} \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, y_1, \dots, y_l\}. \quad (3.3.6)$$

La loi de confluence est alors donnée par :

$$\Delta(u \leftarrow v) = \delta_{v \in \text{PAN}(1)} (u \otimes v + u_1 \cdot v \otimes u_2), \quad (3.3.7)$$

où $\Delta(u) = u_1 \otimes u_2$ et $\text{PAN}(1)$ est l'espace vectoriel des éléments primitifs pour le coproduit coPAN.

La loi de confluence pour un produit Perm \times et le coproduit coPAN associé Δ est donnée par :

$$\Delta(u \times v) = \delta_{v \in \text{PAN}(1)} u \otimes v + u_1 \times v \otimes u_2 + u \times v_1 \otimes v_2 + \delta_{v_1 \in \text{PAN}(1)} u \times v_2 \otimes v_1, \quad (3.3.8)$$

où $\Delta(u) = u_1 \otimes u_2$, $\Delta(v) = v_1 \otimes v_2$ et $\text{PAN}(1)$ est l'espace vectoriel des éléments primitifs pour le coproduit coPAN.

3.3.5 Algèbres dendriformes et tridendriformes

Les derniers exemples de théorème de rigidité concernent les algèbres dendriformes et tridendriformes et sont issus de [BD20]. Je commence ici par rappeler les définitions des algèbres dendriformes et tridendriformes et les résultats de la littérature les concernant. Le lien entre ces algèbres et les associaèdres et permutoèdres sera développé au chapitre 4.

Algèbre dendriforme

L'opérade dendriforme (qui encode les algèbres dendriformes) a été introduite par Loday comme duale de Koszul de l'opérade diassociative.

Définition 3.3.14. Une algèbre *dendriforme* est un espace vectoriel A muni de deux produits $\prec: A \otimes A \rightarrow A$ et $\succ: A \otimes A \rightarrow A$ tels que :

$$\begin{aligned} (a \prec b) \prec c &= a \prec (b \prec c + b \succ c), \\ (a \succ b) \prec c &= a \succ (b \prec c), \\ (a \prec b + a \succ b) \succ c &= a \succ (b \succ c). \end{aligned}$$

L'espèce sous-jacente à l'opérade dendriforme est celle qui associe à un ensemble E l'espace vectoriel engendré par les arbres binaires plans aux sommets internes indexés par E , notée $\text{PBT}(E)$ (voir 2.7.1). Notons $T = r_T(t_g; t_d)$ un arbre binaire T de racine $r_T \in E$ qui a pour sous-arbre gauche t_g et pour sous-arbre droit t_d (ceux-ci sont éventuellement vides). Les opérations \prec, \succ sont définies sur deux arbres T et S par

$$\begin{aligned} T \succ \emptyset &= \emptyset \prec T = 0, & \emptyset \succ T &= T \prec \emptyset = T, \\ T \prec S &= r_T(t_g; t_d \prec S + t_r \succ S) & \text{et } T \succ S &= r_S(T \prec s_g + T \succ s_g; s_d). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Exemple 3.3.15. Les structures dendriformes libres ont été étudiées par Loday et Ronco dans [LR98]. L'algèbre dendriforme libre sur un espace vectoriel V est

$$\text{Dend}(V) := \text{PBT}(\llbracket n \rrbracket) \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n}.$$

Notamment, l'algèbre dendriforme libre sur \mathbb{K} est l'algèbre des arbres binaires plans (non indexés). Nous détaillons dans les derniers paragraphes de cette section d'autres exemples d'algèbres dendriformes. \triangle

Le produit $* := \prec + \succ$ est un produit associatif appelé *produit de battage*. Celui-ci a été décrits sur les arbres binaires plans par Loday et Ronco [LR98].

Dans [BD20], nous dualisons les algèbres dendriformes en cogèbres codendriformes grâce auxquelles nous établissons des théorèmes de rigidité que nous omettons ici, dans un souci de concision. Le coproduit coassociatif décrit dans [BD20] correspond au coproduit éclair décrit dans [Cat23] et [Ber+23].

Algèbre dupliciale

Étant donnée une opérade \mathcal{P} , les lois de confluence obtenues en considérant les coopérations associées à une opérade ensembliste sur la même espèce sont souvent plus simples que celles obtenues en dualisant \mathcal{P} : ceci nous a amené à considérer les algèbres dupliciales, introduites par Loday dans [Lod08].

Définition 3.3.16. Une *algèbre dupliciale* est un espace vectoriel A muni d'un couple de produits binaires $\triangleright: A \otimes A \rightarrow A$ et $\triangleleft: A \otimes A \rightarrow A$ tels que, pour tous x, y, z de A :

$$\begin{aligned} \triangleright \text{ et } \triangleleft &\text{ sont associatifs,} \\ (x \triangleright y) \triangleleft z &= x \triangleright (y \triangleleft z). \end{aligned}$$

L'espèce sous-jacente à cette opérade est PBT , la même que pour l'opérade dendriforme. Avec les mêmes notations que précédemment, les opérations \triangleleft et \triangleright sont définies sur deux arbres T et S par

$$T \triangleright \emptyset = \emptyset \triangleleft T = 0, \quad \emptyset \triangleright T = T \triangleleft \emptyset = T \quad (3.3.10)$$

$$T \triangleright S = r_S(T \triangleright s_g; s_d) \text{ et } \quad T \triangleleft S = r_T(t_g; t_d \triangleleft S) \quad (3.3.11)$$

Exemple 3.3.17. L'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre dupliciale libre sur un espace vectoriel V est l'espace vectoriel $\text{Dend}(V)$ décrit précédemment. \triangle

Dualisant cette structure, le coproduit coduplicial Δ_{\triangleright} (resp. Δ_{\triangleleft}) est obtenu en coupant une arête sur le chemin de la racine à la feuille la plus à gauche (resp. droite), la partie racine allant à droite du coproduit (resp. gauche). De manière inductive, cela se traduit par les équations :

$$\begin{aligned} \Delta_{\triangleright}(T) &= t_l \otimes \vee(\emptyset, t_r) + \Delta_{\triangleright}(t_l)_1 \otimes \vee(\Delta_{\triangleright}(t_l)_2, t_r) \\ \Delta_{\triangleleft}(T) &= \vee(t_l, \emptyset) \otimes t_r + \vee(t_l, \Delta_{\triangleleft}(t_r)_1) \otimes \Delta_{\triangleleft}(t_r)_2, \\ &\text{avec } \Delta_{\triangleleft}(\vee(t_l, \emptyset)) = \Delta_{\triangleright}(\vee(\emptyset, t_r)) = 0. \end{aligned}$$

Ces coproduits satisfont le dual des relations dupliciales : les coproduits Δ_{\triangleright} et Δ_{\triangleleft} sont coassociatifs et $(\Delta_{\triangleright} \otimes id) \circ \Delta_{\triangleleft} = (id \otimes \Delta_{\triangleright}) \circ \Delta_{\triangleleft}$. Les algèbres et cogèbres (co)dupliciales sont utilisées pour établir des théorèmes de rigidité à la section 3.3.6.

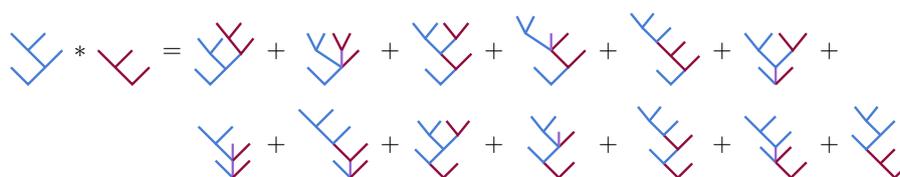
Algèbre tridendriforme

Loday et Ronco ont introduit dans [LR98] un produit de battage sur les arbres de Schröder, c'est-à-dire les arbres plans sans nœud unaire. Notons $\vee(t_1, \dots, t_n)$ un arbre de Schröder T dont les fils de la racine sont, de gauche à droite, les arbres de Schröder t_1, \dots, t_n . Le produit de battage $T * S$ des arbres $T = \vee(t_1, \dots, t_n)$ et $S = \vee(s_1, \dots, s_p)$ est alors donné récursivement par :

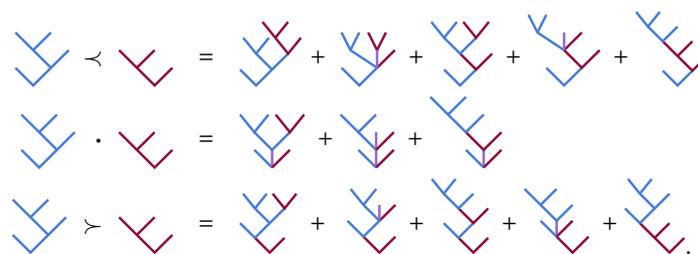
$$T * S := \vee(S * t_1, t_2, \dots, t_n) + \vee(s_1, \dots, s_{p-1}, s_p * t_1, t_2, \dots, t_n) + \vee(s_1, \dots, s_{p-1}, s_p * T), \tag{3.3.12}$$

avec la convention $\vee() * S = S = S * \vee()$.

Loday et Ronco [LR04] ont constaté qu'il était possible de subdiviser le produit $*$ selon l'origine de sa racine en trois parties, chacune encodée par l'un des trois produits " \prec ", " \succ " et " \cdot ", avec $*$ = (\prec) + (\succ) + (\cdot). La structure obtenue est l'algèbre tridendriforme libre sur un générateur. Par exemple, le produit suivant



se divise en



Burgunder et Ronco [BR10] ont introduit une généralisation des algèbres tridendriformes dépendant d'un paramètre $q \in \mathbb{K}$, appelées algèbres q -tridendriformes. Une algèbre q -tridendriforme est un espace vectoriel A muni de trois produits \prec, \cdot et \succ satisfaisant pour

tous a, b et c de A et $a * b = a \prec b + a \succ b + q(a \cdot b)$:

$$\begin{array}{ll}
(a \prec b) \prec c = a \prec (b * c) & (\prec *) \\
(a \succ b) \prec c = a \succ (b \prec c) & (\succ \prec) \\
(a * b) \succ c = a \succ (b \succ c) & (* \succ) \\
(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) & (\cdot \text{ass}) \\
(a \succ b) \cdot c = a \succ (b \cdot c) & (\succ \cdot) \\
(a \prec b) \cdot c = a \cdot (b \succ c) & (\prec \cdot \succ) \\
(a \cdot b) \prec c = a \cdot (b \prec c) & (\cdot \prec)
\end{array}$$

et l'opération $*$ est associative. Le cas $q = 1$ est le cas des algèbres tridendriformes tandis que le cas $q = 0$ est celui des K -algèbres introduites par Chapoton dans [Cha02b].

Cette définition est motivée a posteriori par la proposition suivante :

Proposition 3.3.18. [CDO25b] Posant $a * b := \lambda_1(a \prec b) + \lambda_2(a \cdot b) + \lambda_3(a \succ b)$ et supposant que \prec, \succ et \cdot satisfont les équations tridendriformes (avec cette définition de $*$), alors $*$ est associative si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$.

Structure dendriforme sur les permutations

L'algèbre de Hopf sur les arbres binaires plans introduite par Loday et Ronco [LR98] se relie à l'algèbre de Hopf de Malvenuto-Reutenauer sur les permutations [MR95], introduite indépendamment par Duchamp, Hivert et Thibon sous le nom **FQSym** [DHT02]. Une permutation σ de \mathfrak{S}_n peut être représentée comme un mot $\sigma(1) \dots \sigma(n)$. La structure dendriforme sur les permutations se définit à partir d'un produit de battage, comme dans le cas des arbres binaires plans. Pour définir celui-ci, nous avons besoin du produit de battage auxiliaire suivant :

Définition 3.3.19 (Produit de battage sur les mots). Soit \mathcal{A} un alphabet fini. Pour toutes lettres a et b de \mathcal{A} et tous mots m et n de \mathcal{A}^* , on définit le *produit de battage* par :

$$a.m \sqcup b.n = a.(m \sqcup b.n) + b.(a.m \sqcup n), \quad (3.3.13)$$

avec $\varepsilon \sqcup m = m \sqcup \varepsilon = m$.

Définition 3.3.20 (Produit de battage horizontal sur les permutations). Étant données deux permutations σ et τ de \mathfrak{S}_m et \mathfrak{S}_n respectivement, le produit de battage horizontal de ces permutations est défini par :

$$\sigma \sqcup_h \tau = \sigma \sqcup (\tau + m) \quad (3.3.14)$$

où $\tau + m$ est le mot dont la j ème lettre est $\tau(j) + m$ pour tout $1 \leq j \leq n$ et \sqcup est le produit de battage sur les mots.

Exemple 3.3.21. $123 \sqcup_h 21 = 12354 + 12534 + 12543 + 15234 + 15243 + 15423 + 51234 + 51243 + 51423 + 54123 \quad \triangle$

Une permutation σ de $\llbracket n \rrbracket$ est représentée sous forme de tableau de taille $n \times n$ avec un point à chaque coordonnée $(i, \sigma(i))$ (voir figure 3.3.1). J'appelle ce battage *battage horizontal* parce qu'il consiste en un battage des colonnes du tableau associé à la concaténation de σ et $\tau + m$.

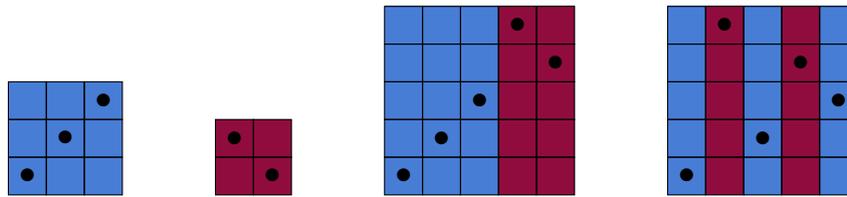


FIGURE 3.3.1 – Représentations sous forme de tableaux des permutations 123, 21, 12354 et 15243 (de gauche à droite).

Définition 3.3.22 (Produit de battage vertical sur les permutations). En battant les lignes du tableau plutôt que les colonnes, nous obtenons le battage vertical défini, étant données deux permutations σ et τ de \mathfrak{S}_m et \mathfrak{S}_n respectivement, par :

$$\sigma \sqcup_v \tau = \sum_{\substack{\text{std}(s)=\sigma \\ \text{std}(t)=\tau}} s.t, \quad (3.3.15)$$

où $\text{std}(t) = \phi \circ t$ avec ϕ l'unique bijection croissante de $\text{Im}(t)$ dans $\llbracket |\text{Im}(t)| \rrbracket$.

Exemple 3.3.23. $123 \sqcup_v 21 = 12354 + 12453 + 13452 + 23451 + 12543 + 13542 + 23541 + 14532 + 24531 + 34521$ \triangle

Il est possible de couper le produit de battage horizontal $\sigma \sqcup_h \tau$ en deux produits dendri-formes suivant la lettre par laquelle commence la permutation : les permutations de $\sigma \sqcup_h \tau$ commençant par σ_1 contribuent à \prec_h et celles commençant par $\tau_1 + m$ contribuent à \succ_h .

De même, il est possible de couper le produit de battage vertical $\sigma \sqcup_v \tau$ en deux produits dendri-formes suivant le minimum de la permutation : les permutations ω de $\sigma \sqcup_v \tau$ pour lesquelles $\omega^{-1}(1) \in \llbracket 1; m \rrbracket$ contribuent à \prec_v et les autres à \succ_v .

Proposition 3.3.24 ([Foi07 ; Von16 ; BD20]). Les algèbres dendri-formes $(\mathbb{K}\mathfrak{S}, \prec_h, \succ_h)$ et $(\mathbb{K}\mathfrak{S}, \prec_v, \succ_v)$ associées respectivement aux battages horizontal et vertical sur les permutations sont dendri-formes libres.

Structure tridendri-formes sur les surjections

L'une des généralisations des permutations est l'ensemble des surjections (ou *mots tassés*) qui étiquettent les faces du permutoèdre (voir 4.1.1). Burgunder et Ronco ont introduit un produit de battage sur les surjections dans [BR10], qui correspond aux produits tridendri-formes de **WQSym** introduits par Novelli et Thibon [NT06].

À toute application $h : \llbracket m \rrbracket \rightarrow \llbracket n \rrbracket$ peut être associée la surjection

$$\text{std}(h) := \phi \circ h : \llbracket m \rrbracket \rightarrow \llbracket |\text{Im}(h)| \rrbracket,$$

où ϕ est l'unique bijection croissante de $\text{Im}(h)$ dans $\llbracket |\text{Im}(h)| \rrbracket$. D'un point de vue plus combinatoire, il s'agit de renuméroter les lettres du mot considéré de 1 à $|\text{Im}(h)|$ en respectant l'ordre sur les lettres.

Burgunder et Ronco ont appliqué aux surjections une division ternaire analogue à celle de Loday et Ronco et obtenu une structure tridendri-forme. Nous rappelons maintenant les

définitions des quatre produits suivants qui permettent de munir les surjections d'une structure d'algèbre tridendriforme :

$$\begin{aligned}
 f \prec g &= \sum_{\substack{\text{std}(h)=f \\ \text{std}(k)=g, \\ \max(h) > \max(k)}} h.k & f \cdot g &= \sum_{\substack{\text{std}(h)=f \\ \text{std}(k)=g, \\ \max(h)=\max(k)}} h.k \\
 f \succ g &= \sum_{\substack{\text{std}(h)=f \\ \text{std}(k)=g, \\ \max(h) < \max(k)}} h.k & f * g &= \sum_{\substack{\text{std}(h)=f \\ \text{std}(k)=g}} h.k
 \end{aligned}$$

Exemple 3.3.25. Pour $f := 121$ et $g := 21$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 f \prec g &:= 2\bar{3}2\bar{2}1 + 1\bar{3}1\bar{2}1 + 1\bar{4}1\bar{3}2 + 2\bar{4}2\bar{3}1 + 3\bar{4}3\bar{2}1 \\
 f \cdot g &:= 1\bar{2}1\bar{2}1 + 1\bar{3}1\bar{3}2 + 2\bar{3}2\bar{3}1 \\
 f \succ g &:= 1\bar{2}1\bar{3}1 + 1\bar{2}1\bar{3}2 + 1\bar{2}1\bar{4}3 + 1\bar{3}1\bar{4}2 + 2\bar{3}2\bar{4}1.
 \end{aligned}$$

△

Burgunder, Curien et Ronco [BCR15] ont montré de plus que cette structure était tridendriforme libre. Nous avons retrouvé ce résultat dans [BD20] via un théorème de rigidité.

Reprenant la représentation sous forme de tableau introduite au paragraphe précédent sur les permutations, le produit de battage $*$ correspond à une généralisation du battage vertical où une même ligne peut contenir des éléments venant à la fois de f et de g . Il n'existe aucune généralisation tridendriforme du battage horizontal, puisqu'il faudrait alors que deux lettres soient à la même place du mot.

Structure tridendriforme sur les fonctions de parking

Les fonctions de parking dont j'ai rappelé la définition à la section 2.8 sont une généralisation des surjections. Dans [NT07], Novelli et Thibon ont introduit sur l'espace vectoriel engendré par les fonctions de parking un produit de battage et une structure d'algèbre tridendriforme, appelée **PQSym**. À toute application $f : \llbracket k \rrbracket \rightarrow \llbracket n \rrbracket$, vue comme une composition d'ensembles éventuellement vides $(f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(n))$, peut être associée une fonction de parking que nous notons ici $\text{std}(f)$ obtenue en supprimant itérativement de la composition d'ensemble les $f^{-1}(i)$ tels que $|\cup_{j=1}^i f^{-1}(j)| < i$.

La fonction de parking $\text{std}(f)$ est appelée "parkisation" de f et notée $\text{park}(f)$ dans [NT07]. Muni de la parkisation $\text{std}(f)$, le produit tridendriforme sur les fonctions de parking est défini de manière analogue aux surjections (les formules sont formellement identiques en remplaçant "surjection" par "fonction de parking" et "standardisation" par "parkisation").

Proposition 3.3.26 ([Von16; BD20]). *L'algèbre PQSym n'est pas tridendriforme libre.*

3.3.6 Théorème de rigidité pour les algèbres dendriformes et tridendriformes

En appliquant les techniques développées dans [BD19] et rappelées au paragraphe 3.3.3, nous avons étudié dans [BD20] les théorèmes de rigidité pour les algèbres dendriformes et tridendriformes. Des théorèmes de rigidité pour les algèbres dendriformes avaient déjà été formulés dans [Foi07]. Loday et Ronco ont de plus formulé un analogue du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (et non un théorème de rigidité) pour les algèbres dendriformes co-associatives [LR06]. D'autres théorèmes de ce type ont été depuis formulés pour les bigèbres

tridendriformes par Catoire [Cat23]. Cependant, l'objectif de Foissy et Catoire est d'obtenir des théorèmes de rigidité où les produit et coproduit de battage correspondants (obtenus en sommant les produits et coproduits tridendriformes ou dendriformes) satisfont une relation de Hopf (le coproduit est un morphisme d'algèbre). Notre objectif ici est d'obtenir des relations pour lesquelles le produit et le coproduit sont duaux (donc avec un terme $x \otimes y$ dans le coproduit du produit de x avec y).

Nous donnons dans [BD20] une description combinatoire des algèbres dendriformes et tridendriformes libres, de manière analogue à [Cat23] et [Ber+23], en termes de chemins de coupe (figures 3.3.2 et 3.3.3) et chemins de battage (figures 3.3.4 et 3.3.5). Le lecteur pourra consulter [BD20] pour des définitions formelles de ces chemins et des produits et coproduits associés.

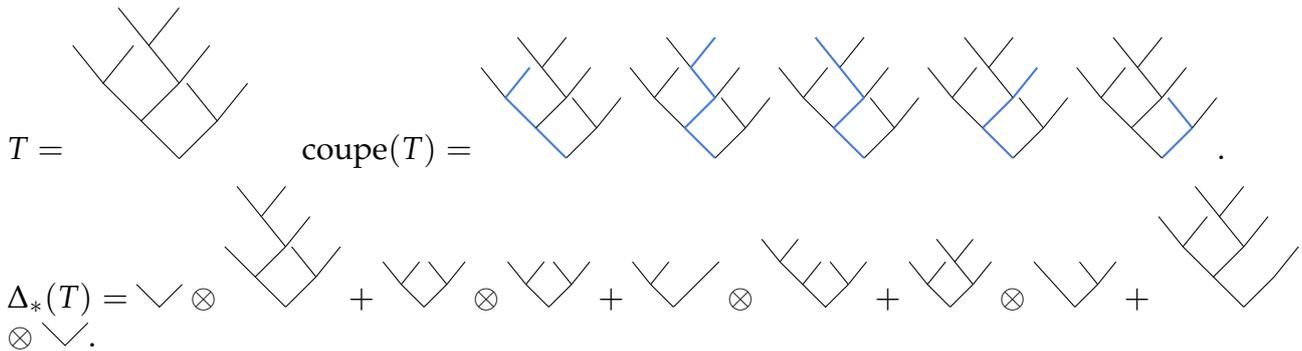


FIGURE 3.3.2 – Coproduit Δ_* en termes de chemins de coupe (le coproduit est obtenu en découpant suivant la ligne bleue).

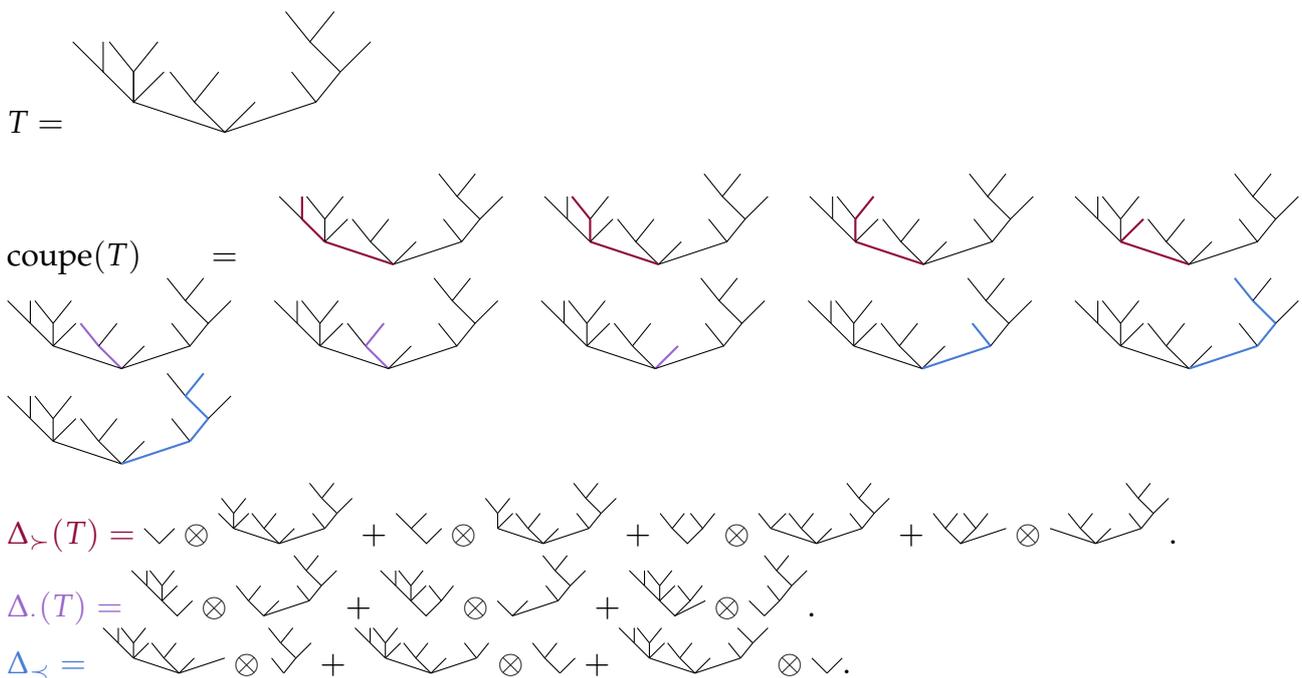


FIGURE 3.3.3 – Raffinement de la figure 3.3.2 : les coproduits cotridendriformes $\Delta_{>}$, Δ , et $\Delta_{<}$ sont exprimés en termes de chemins de coupe.

Nous introduisons dans les paragraphes suivants deux opérades ensemblistes dont les espèces associées sont isomorphes aux espèces sous-jacentes aux opérades dendriformes et tridendriformes que nous appelons respectivement *duplicial gauche* et *terplicial*. Nous donnons dans les paragraphes suivants les définitions des nouvelles opérades introduites et

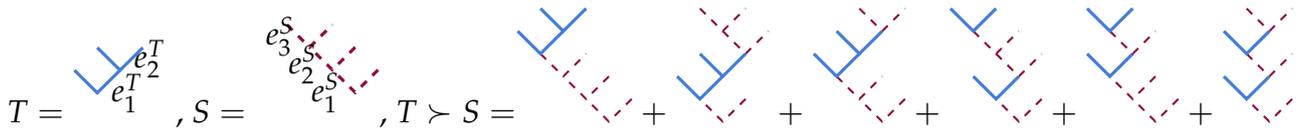


FIGURE 3.3.4 – Considérant deux arbres binaires T et S , on numérote de bas en haut les arêtes de la branche la plus à droite de T par e_1^T, \dots, e_k^T et celles de la branche la plus à gauche de S par e_1^S, \dots, e_ℓ^S . L'ensemble des battages droits (commençant par une arête de S) est $P_r = \{\{e_1^S, e_2^S, e_3^S, e_1^T, e_2^T\}, \{e_1^S, e_1^T, e_2^T, e_2^S, e_3^S\}, \{e_1^S, e_2^S, e_1^T, e_2^T, e_3^S\}, \{e_1^S, e_1^T, e_2^S, e_3^S, e_2^T\}, \{e_1^S, e_2^S, e_1^T, e_3^S, e_2^T\}, \{e_1^S, e_1^T, e_2^S, e_2^T, e_3^S\}\}$. À chacun de ces battages est associé un terme de $T \succ S$ représenté ci-dessus.

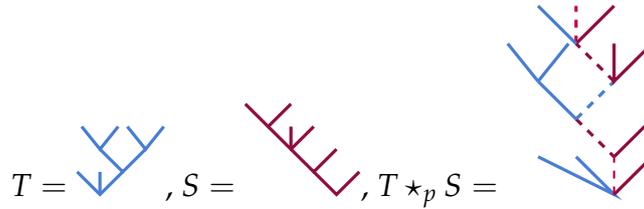


FIGURE 3.3.5 – Reprenant la convention d'étiquetage d'arêtes de la figure 3.3.4, étant donné deux arbres plans et un battage contractant $p = (\{e_1^T, e_1^S\}, e_2^S, e_2^T, e_3^S, \{e_3^T, e_4^S\})$, on associe un produit $T \star_p S$. Le chemin en pointillé correspond au battage contractant. L'ensemble des termes de $T \star S$ est obtenu en sommant les $T \star_p S$ pour p parcourant l'ensemble des chemins de battage contractants.

des relations distributives correspondantes. Le lecteur pourra se référer à [BD20] pour les preuves correspondantes et les exemples associés.

Bigèbres dupliciales, dupliciales gauches et dendriformes

Nous commençons par énoncer les théorèmes de rigidité relatifs aux produits et coproduits dendriformes et dupliciaux avant d'introduire la notion de "dupliciale gauche" et de donner les théorèmes de rigidité reliés.

Définition 3.3.27 ([BD20] Bigèbre dendriforme-codupliciale). Soit \mathcal{H} un espace vectoriel, muni d'une structure d'algèbre dendriforme $(\mathcal{H}, \prec, \succ)$ et d'une structure de cogèbre codupliciale $(\mathcal{H}, \Delta_\triangleright, \Delta_\triangleleft)$. Si pour tous $x, y \in \mathcal{H}$ les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \Delta_\triangleright(x \succ y) &= x \otimes y + x * (\Delta_\triangleright(y))_1 \otimes (\Delta_\triangleright(y))_2 + (\Delta_\triangleright(x))_1 \otimes (\Delta_\triangleright(x))_2 \succ y, \\ \Delta_\triangleright(x \prec y) &= (\Delta_\triangleright(x))_1 \otimes (\Delta_\triangleright(x))_2 \prec y, \\ \Delta_\triangleleft(x \succ y) &= x \succ (\Delta_\triangleleft(y))_1 \otimes (\Delta_\triangleleft(y))_2, \\ \Delta_\triangleleft(x \prec y) &= T \otimes S + x \prec (\Delta_\triangleleft(y))_1 \otimes (\Delta_\triangleleft(y))_2 + (\Delta_\triangleleft(x))_1 \otimes (\Delta_\triangleleft(x))_2 * y, \end{aligned}$$

où $*$ $= \succ + \prec$, alors \mathcal{H} est appelée *bigèbre codupliciale-dendriforme*.

Théorème 3.3.28 ([BD20] Théorème de rigidité pour les bigèbres dendriforme-codupliciale). Toute bigèbre dendriforme-codupliciale est libre et colibre sur l'espace vectoriel de ses éléments primitifs.

Dans [BD20], nous appliquons ces critères pour montrer que les algèbres dendriformes sur les mots tassés et les fonctions de parking respectivement sont libres (voir aussi [Foi07; Foi12; Von16]).

Il est impossible d'ajouter un produit à l'opérade dupliciale qui permettrait d'obtenir une opérade "terplicative", c'est-à-dire une opérade symétrique ensembliste qui partagerait le même \mathfrak{S}_n -module sous-jacent que l'opérade tridendriforme et dont les produits gauche et droit seraient associatifs. L'opérade terplicative dans la section suivante est obtenue comme extension d'une nouvelle opérade que nous avons appelée *opérade dupliciale gauche*, engendrée par deux produits binaires \blacktriangleleft et \blacktriangleright qui satisfont pour tous éléments x, y et z :

$$\begin{aligned}(x \blacktriangleright y) \blacktriangleright z &= x \blacktriangleright (y \blacktriangleright z) \\ (x \blacktriangleright y) \blacktriangleleft z &= x \blacktriangleright (y \blacktriangleleft z) \\ (x \blacktriangleleft y) \blacktriangleleft z &= x \blacktriangleleft (y \blacktriangleright z)\end{aligned}$$

Proposition 3.3.29. *Comme les algèbres dupliciales et dendriformes libres sur un générateur, l'algèbre dupliciale gauche libre sur un générateur est engendrée en tant qu'espace vectoriel par les arbres binaires plans. Les opérations \blacktriangleleft et \blacktriangleright sont définies sur deux arbres binaires plans $S = \vee(S_l, S_r)$ et $T = \vee(T_l, T_r)$ par :*

$$T \blacktriangleright S = \vee(T \blacktriangleright S_l, S_r) \text{ et } T \blacktriangleleft S = \vee(T_l, T_r \blacktriangleright S).$$

Les coproduits codupliciaux gauches satisfont les relations duales.

Nous pouvons alors formuler les théorèmes de rigidité correspondants :

Proposition 3.3.30 ([BD20] Théorème de rigidité pour les bigèbres dendriformes codupliciales gauches). *Toute bigèbre connexe dendriforme codupliciale gauche satisfaisant les relations mixtes distributives suivantes est libre et colibre sur l'espace vectoriel de ses éléments primitifs :*

$$\begin{aligned}\Delta_{\blacktriangleleft}(T \succ S) &= T \succ \Delta_{\blacktriangleleft}(S)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleleft}(S)_2 \\ \Delta_{\blacktriangleleft}(T \prec S) &= T \otimes S + T \prec \Delta_{\blacktriangleright}(S)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleright}(S)_2 + \Delta_{\blacktriangleleft}(T)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleleft}(T)_2 * S \\ \Delta_{\blacktriangleright}(T \succ S) &= T \otimes S + T * \Delta_{\blacktriangleright}(S)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleright}(S)_2 + \Delta_{\blacktriangleright}(T)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleright}(T)_2 \succ S \\ \Delta_{\blacktriangleright}(T \prec S) &= \Delta_{\blacktriangleright}(T)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleright}(T)_2 \prec S\end{aligned}$$

Proposition 3.3.31 ([BD20] Théorème de rigidité pour les bigèbres dupliciales codupliciales gauches). *Toute bigèbre connexe dupliciale codupliciale gauche satisfaisant les relations mixtes distributives suivantes est libre et colibre sur l'espace vectoriel de ses éléments primitifs :*

$$\begin{aligned}\Delta_{\blacktriangleleft}(T \triangleright S) &= T \triangleright \Delta_{\blacktriangleleft}(S)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleleft}(S)_2 \\ \Delta_{\blacktriangleleft}(T \triangleleft S) &= \Delta_{\blacktriangleleft}(T)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleleft}(T)_2 \triangleleft S \\ \Delta_{\blacktriangleright}(T \triangleright S) &= T \otimes S + T \triangleright \Delta_{\blacktriangleright}(S)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleright}(S)_2 + \Delta_{\blacktriangleright}(T)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleright}(T)_2 \triangleright S \\ \Delta_{\blacktriangleright}(T \triangleleft S) &= \Delta_{\blacktriangleright}(T)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleright}(T)_2 \triangleleft S\end{aligned}$$

Proposition 3.3.32 ([BD20] Théorème de rigidité pour les bigèbres dupliciales gauches codupliciales gauches). *Toute bigèbre connexe dupliciale gauche codupliciale gauche satisfaisant les relations mixtes distributives suivantes est libre et colibre sur l'espace vectoriel de ses éléments primitifs :*

$$\begin{aligned}\Delta_{\blacktriangleleft}(T \blacktriangleleft S) &= T \otimes S + \Delta_{\blacktriangleleft}(T)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleleft}(T)_2 \blacktriangleright S + T \blacktriangleleft \Delta_{\blacktriangleright}(S)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleright}(S)_2 \\ \Delta_{\blacktriangleleft}(T \blacktriangleright S) &= T \blacktriangleright \Delta_{\blacktriangleleft}(S)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleleft}(S)_2 \\ \Delta_{\blacktriangleright}(T \blacktriangleleft S) &= \Delta_{\blacktriangleright}(T)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleright}(T)_2 \blacktriangleleft S \\ \Delta_{\blacktriangleright}(T \blacktriangleright S) &= T \otimes S + \Delta_{\blacktriangleright}(T)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleright}(T)_2 \blacktriangleright S + T \blacktriangleright \Delta_{\blacktriangleright}(S)_1 \otimes \Delta_{\blacktriangleright}(S)_2\end{aligned}$$

Exemple 3.3.33. Les produits introduits par Vong dans [Von16] pour prouver la liberté de l'algèbre dendriforme $FQSym$ sur les mots tassés satisfont les relations codupliciales gauches. Dualiser ces opérations en coproduits donne une réécriture algébrique de la preuve de Vong puisque les opérations dendriformes et codupliciales gauches satisfont les lois mixtes distributives du théorème 3.3.30. \triangle

Opérate dendriforme et treillis de Tamari

Un corollaire de l'étude des relations de compatibilité pour les bigèbres dendriformes codendriformes est l'énumération du cardinal de certains intervalles du treillis de Tamari dont nous rappelons la définition dans la section §2.7.3. Le lien entre treillis de Tamari et opérade dendriforme a été établi par Loday et Ronco et nous permet de calculer le cardinal des intervalles du treillis de Tamari de la forme $[T \triangleright S; T \triangleleft S]$ où \triangleright et \triangleleft sont les produits dupliciaux sur les arbres binaires plans définis ci-dessus §3.3.5.

Proposition 3.3.34 ([LR02; Cha07]). *Le produit de battage $*$ et les produits dupliciaux sur les arbres binaires plans sont reliés par :*

$$[T \triangleright S; T \triangleleft S] = \{X \mid X \in T * S\},$$

pour tous arbres binaires plans T et S .

Proposition 3.3.35 ([BD20]). *Le nombre d'éléments dans les intervalles de type $[T \triangleright S; T \triangleleft S]$ est donné par :*

$$|[T \triangleright S; T \triangleleft S]| = \binom{R_T + L_S - 1}{L_S}$$

où R_T est le nombre de sommets sur la branche la plus à droite de l'arbre binaire plan T et L_S est le nombre de sommets sur la branche la plus à gauche de l'arbre binaire plan S , pour tous arbres binaires plans T et S .

Bigèbres terplciales et tridendriformes

Définition 3.3.36. Une *algèbre terplciale* est un espace vectoriel V muni de trois produits binaires $\{\triangleleft, \nabla, \triangleright\}$ satisfaisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\triangleright \text{ et } \nabla \text{ sont associatives,} \\ &(x \triangleleft y) \triangleleft z = x \triangleleft (y \triangleright z) \\ &(x \triangleright y) \triangleleft z = x \triangleright (y \triangleleft z) \\ &(x \nabla y) \triangleleft z = x \nabla (y \triangleleft z) \\ &(x \triangleright y) \nabla z = x \triangleright (y \nabla z) \\ &(x \triangleleft y) \nabla z = x \nabla (y \triangleright z) \end{aligned}$$

Toutes les équations sauf la deuxième et la dernière coïncident avec les relations satisfaites par l'algèbre terplciale introduite par Novelli et J.-Y. Thibon dans [NT20].

Nous pouvons maintenant décrire les algèbres terplciales libres.

Théorème 3.3.37 ([BD20]). *Comme l'algèbre tridendriforme libre, l'algèbre terplciale libre sur un espace vectoriel V est engendrée en tant qu'espace vectoriel par les arbres plans dont les feuilles sont décorées par les éléments d'une base de V : $\text{Ter}(V) = \bigoplus \mathbb{K}.T_n \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n}$, où T_n désigne l'ensemble des arbres plans avec n feuilles. Ainsi, la dimension de l'espace des opérations d'arité n est donnée par les nombres de Schroeder-Hipparchus. Les opérations $\triangleleft, \triangleright$ et ∇ sur les algèbres terplciales libres sont définies récursivement comme suit, pour tous arbres plans $T = \vee(t_1, \dots, t_n)$ et $S = \vee(s_1, \dots, s_m)$, notant \emptyset l'arbre vide :*

$$\begin{aligned} T \triangleleft S &= \vee(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n \triangleright S) \\ T \nabla S &= \vee(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n \triangleright s_1, s_2, \dots, s_m) \\ T \triangleright S &= \vee(T \triangleright s_1, s_2, \dots, s_m), \end{aligned}$$

avec $\emptyset \triangleright T = T \triangleright \emptyset = T$.

Exemple 3.3.38. Si $T = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array}$ et $S = \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array}$, les produits sont donnés par :

$$T \triangleright S = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array}, T \triangleleft S = \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \text{ et } T \nabla S = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}. \quad \triangle$$

En dualisant les relations précédentes, nous obtenons la notion de cogèbre coterpliciale, ce qui nous permet de définir les bigèbres terpliciales.

Définition 3.3.39. Une *bigèbre terpliciale* est un espace vectoriel \mathcal{H} muni d'une structure d'algèbre terpliciale $(\mathcal{H}, \triangleright, \nabla, \triangleleft)$ et de cogèbre coterpliciale $(\mathcal{H}, \Delta_{\triangleright}, \Delta_{\nabla}, \Delta_{\triangleleft})$ satisfaisant les lois mixtes distributives suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta_{\triangleright}(T \triangleright S) &= T \otimes S + \Delta_{\triangleright}(T)_1 \otimes \Delta_{\triangleright}(T)_2 \triangleright S + T \triangleright \Delta_{\triangleright}(S)_1 \otimes \Delta_{\triangleright}(S)_2 \\ \Delta_{\triangleright}(T \nabla S) &= \Delta_{\triangleright}(T)_1 \otimes \Delta_{\triangleright}(T)_2 \nabla S \\ \Delta_{\triangleright}(T \triangleleft S) &= \Delta_{\triangleright}(T)_1 \otimes \Delta_{\triangleright}(T)_2 \triangleleft S \\ \Delta_{\nabla}(T \triangleright S) &= T \triangleright \Delta_{\nabla}(S)_1 \otimes \Delta_{\nabla}(S)_2 \\ \Delta_{\nabla}(T \nabla S) &= T \otimes S + \Delta_{\nabla}(T)_1 \otimes \Delta_{\nabla}(T)_2 \nabla S + T \nabla \Delta_{\nabla}(S)_1 \otimes \Delta_{\nabla}(S)_2 \\ &\quad + \Delta_{\triangleleft}(T) \otimes \Delta_{\triangleleft}(T)_2 \triangleright S + T \triangleleft \Delta_{\triangleright}(S)_1 \otimes \Delta_{\triangleright}(S)_2 \\ \Delta_{\nabla}(T \triangleleft S) &= \Delta_{\nabla}(T)_1 \otimes \Delta_{\nabla}(T)_2 \triangleleft S \\ \Delta_{\triangleleft}(T \triangleright S) &= T \triangleright \Delta_{\triangleleft}(S)_1 \otimes \Delta_{\triangleleft}(S)_2 \\ \Delta_{\triangleleft}(T \nabla S) &= T \nabla \Delta_{\triangleleft}(S)_1 \otimes \Delta_{\triangleleft}(S)_2 \\ \Delta_{\triangleleft}(T \triangleleft S) &= T \otimes S + \Delta_{\triangleleft}(T)_1 \otimes \Delta_{\triangleleft}(T)_2 \triangleright S + T \triangleleft \Delta_{\triangleright}(S)_1 \otimes \Delta_{\triangleright}(S)_2. \end{aligned}$$

Proposition 3.3.40 ([BD20] Théorème de rigidité pour les bigèbres terpliciales coterpliciales). *Toute bigèbre conilpotente terpliciale (coterpliciale) est libre et colibre sur l'espace vectoriel de ses éléments primitifs.*

Définition 3.3.41. Une *bigèbre tridendriforme coterpliciale* est un espace vectoriel \mathcal{H} muni d'une structure de cogèbre coterpliciale $(\mathcal{H}, \Delta_{\triangleright}, \Delta_{\nabla}, \Delta_{\triangleleft})$ et d'une structure d'algèbre tridendriforme $(\mathcal{H}, \prec, \cdot, \succ)$ satisfaisant les lois mixtes distributives suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta_{\triangleright}(T \prec S) &= (\Delta_{\triangleright}(T))_1 \otimes (\Delta_{\triangleright}(T))_2 \prec S \\ \Delta_{\triangleright}(T \cdot S) &= (\Delta_{\triangleright}(T))_1 \otimes (\Delta_{\triangleright}(T))_2 \cdot S \\ \Delta_{\triangleright}(T \succ S) &= T \otimes S + (\Delta_{\triangleright}(T))_1 \otimes (\Delta_{\triangleright}(T))_2 \succ S + T * (\Delta_{\triangleright}(S))_1 \otimes (\Delta_{\triangleright}(S))_2 \\ \Delta_{\nabla}(T \prec S) &= (\Delta_{\nabla}(T))_1 \otimes (\Delta_{\nabla}(T))_2 \prec S \\ \Delta_{\nabla}(T \cdot S) &= T \otimes S + (\Delta_{\nabla}(T))_1 \otimes (\Delta_{\nabla}(T))_2 \cdot S + T \cdot (\Delta_{\nabla}(S))_1 \otimes (\Delta_{\nabla}(S))_2 + \\ &\quad (\Delta_{\triangleleft}(T))_1 \otimes (\Delta_{\triangleleft}(T))_2 \succ S + T \prec (\Delta_{\triangleright}(S))_1 \otimes (\Delta_{\triangleright}(S))_2 \\ \Delta_{\nabla}(T \succ S) &= T \succ (\Delta_{\nabla}(S))_1 \otimes (\Delta_{\nabla}(S))_2 \\ \Delta_{\triangleleft}(T \prec S) &= T \otimes S + (\Delta_{\triangleleft}(T))_1 \otimes (\Delta_{\triangleleft}(T))_2 * S + T \prec (\Delta_{\triangleright}(S))_1 \otimes (\Delta_{\triangleright}(S))_2 \\ \Delta_{\triangleleft}(T \cdot S) &= T \cdot (\Delta_{\triangleleft}(S))_1 \otimes (\Delta_{\triangleleft}(S))_2 \\ \Delta_{\triangleleft}(T \succ S) &= T \succ (\Delta_{\triangleleft}(S))_1 \otimes (\Delta_{\triangleleft}(S))_2 \end{aligned}$$

où $*$ = $\succ + \prec + \cdot$.

Proposition 3.3.42 ([BD20] Théorème de rigidité pour les bigèbres tridendriformes coterpliciales). *Toute bigèbre conilpotente tridendriforme coterpliciale est libre et colibre sur l'espace vectoriel de ses éléments primitifs.*

Posets, algèbres et polytopes : de l'associaèdre aux nestoèdres

Je présente dans ce chapitre deux travaux reliés aux polytopes : d'une part, la construction d'une structure tridendriforme sur les faces de certaines familles de polytopes d'hypergraphe, qui se relie à un ordre sur ces mêmes faces [CDO25b ; CDO25a]. D'autre part, je présente comment l'étude d'une variante de posets des partitions permet le calcul du nombre de régions de n copies de l'arrangement de tresses en position générique et les conséquences algébriques de ce calcul en termes de diagonale du permutoèdre [Del+23].

4.1 Associaèdres et permutoèdres

Les associaèdres (aussi appelés *polytopes de Stasheff*) [Sta63 ; Pos09 ; CFZ02 ; Lod04] et les permutoèdres [Pos09] sont des réalisations géométriques du treillis de Tamari (voir 2.7.3) et de l'ordre faible sur les permutations (voir l'exemple 2.1.1) respectivement. Ils sont des cas particuliers d'associaèdres de graphes [CDF11] et de polytopes d'hypergraphe [DP15] (aussi connu sous le nom *nestoèdre* [Pos09]). Nous faisons dans cette section un court rappel des structures algébriques connues sur les faces de ces deux polytopes.

4.1.1 Posets sur les faces de l'associaèdre et du permutoèdre

Les faces de dimension $n - k$ de l'associaèdre de dimension n sont indexées par les arbres de Schröder (voir 3.3.5) avec $k + 1$ sommets internes et $n + 2$ feuilles. Ses sommets sont plus spécifiquement en bijection avec l'ensemble des arbres binaires plans à $n + 2$ feuilles. Le treillis des faces de l'associaèdre est donné par l'inclusion des faces, qui correspond à la contraction des arêtes internes d'un arbre de Schröder. L'associaèdre de dimension 2 est représenté à gauche de la figure 4.1.1.

Palacios et Ronco [PR06, Définition 30] ont muni l'ensemble des faces de l'associaèdre de l'ordre partiel obtenu par clôture transitive des relations de couvertures de la figure 4.1.2, qui étend l'ordre de Tamari défini sur les sommets de l'associaèdre.

Chapoton [Cha00] a montré que les faces de dimension $n - k$ du permutoèdre de dimension n sont en bijection avec l'ensemble des surjections de $\llbracket n \rrbracket$ dans $\llbracket k \rrbracket$, aussi appelées *compositions d'ensemble* (voir 2.6.2) et *mots tassés* [NT06] (voir 3.3.5). Les sommets du permutoèdre sont plus spécifiquement en bijection avec les permutations de $\llbracket n \rrbracket$. Le treillis des faces

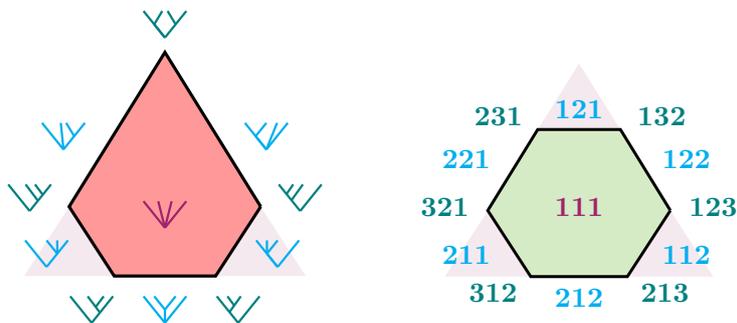


FIGURE 4.1.1 – À gauche : L’étiquetage des faces de l’associaèdre $\mathbf{K}^{x < y < z}$ en termes d’arbres plans.

À droite : l’étiquetage des faces du permutoèdre $\mathbf{P}^{\{x,y,z\}}$ par des surjections $f : \{x, y, z\} \rightarrow [i]$, pour $1 \leq i \leq 3$, notant $f(x)f(y)f(z)$ pour $(f(x), f(y), f(z))$.

©Image de Jovana Obradović

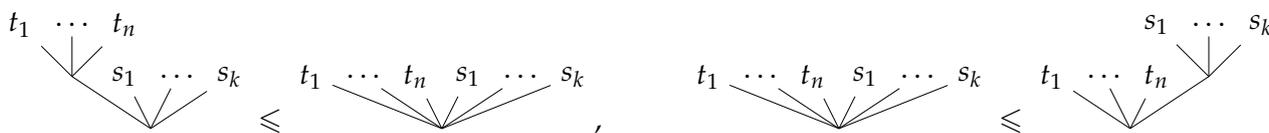


FIGURE 4.1.2 – Relations de couverture de l’ordre de Palacios-Ronco sur les faces de l’associaèdre qui étend l’ordre de Tamari

du permutoèdre (pour l’inclusion) est le treillis des compositions d’ensembles (voir 2.6.2). Le permutoèdre de dimension 2 est représenté à droite de la figure 4.1.1.

Nous avons établi dans [DJR22] le lien entre poset des 2-partitions non croisées (voir 2.8.3) et faces du permutoèdre :

Proposition 4.1.1. [DJR22] *Le sous-poset de ${}^2\Pi_n$ des arbres de parking qui sont des peignes droits est isomorphe au treillis des faces du permutoèdre.*

Palacios et Ronco [PR06, Lemme 17] ont introduit l’ordre obtenu par clôture transitive des relations de couverture suivantes. Cet ordre étend aux compositions d’ensembles l’ordre de Bruhat faible des permutations :

$$\begin{aligned} (A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n) &\leq (A_1, \dots, A_{i-1}, A_i \cup A_{i+1}, \dots, A_n) \\ (A_1, \dots, A_{i-1}, A_i \cup A_{i+1}, \dots, A_n) &\leq (A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, A_i, \dots, A_n) \end{aligned}$$

si $x < y$, pour tout $x \in A_i$ et $y \in A_{i+1}$ (ce que nous noterons $A_i < A_{i+1}$ dans la suite).

4.1.2 Lien entre produits algébriques et ordres

Nous avons rappelé dans la section 3.3.5 les structures dendriformes sur les sommets de l’associaèdre (arbres binaires plans) et du permutoèdre (permutations). Loday et Ronco [LR02] ont de plus montré les résultats suivants reliant structures dendriformes et dupliciales sur les arbres binaires plans (resp. sur les permutations) et treillis de Tamari (resp. ordre faible) :

Proposition 4.1.2 ([LR02], (2)). *Soient b et d deux arbres binaires plans. Le produit de battage $*$ de ces deux arbres se relie à l’ordre de Tamari \leq_T comme suit*

$$b * d = \sum_{b > d \leq_T c \leq_T b < d} c \tag{4.1.1}$$

où $(\triangleright, \triangleleft)$ sont les deux produits dupliciaux sur l'espace vectoriel des arbres binaires plans (voir 3.3.5). Soient σ et τ deux permutations. Le produit de battage $*$ de ces deux permutations se relie à l'ordre faible \leq_W comme suit

$$\sigma * \tau = \sum_{\sigma.(\tau+m) \leq_W c \leq_W (\tau+m).\sigma} c. \quad (4.1.2)$$

Les produits associatifs des algèbres de Hopf de Loday-Ronco et Malvenuto-Reutenauer ont été étendus en des produits associatifs sur l'ensemble des faces de l'associaèdre et du permutoèdre, c'est-à-dire les arbres de Schröder et les surjections, par Loday-Ronco [LR02] et Burgunder-Ronco [BR10] (voir §3.3.5). Palacios et Ronco ont formulé des liens analogues à la proposition 4.1.2 reliant les produits de battage aux ordres définis dans le même papier et rappelés à la section précédente [PR06, Théorème 51 et Proposition 58].

4.2 polytopes d'hypergraphe aka nestoèdres

Les associaèdres et les permutoèdres sont deux instances d'un certain type de polytope appelé *nestoèdre*. Les nestoèdres ont été introduits de manière indépendante par Postnikov dans [Pos09] et Feichtner et Sturmfels dans [FS05]. Ils peuvent être définis dans un premier temps comme des sommes de Minkowski de simplexes, dont les faces sont indexées par des ensembles nichés. Généralisant les associaèdres de graphes introduits dans [CD06; Zel06], Došen et Petrić [DP11] en ont donné une interprétation en termes de troncations de simplexes encodées par un hypergraphe, les nommant *polytopes d'hypergraphes*. Nous rappelons d'abord leur définition au paragraphe §4.2.1, suivi d'un paragraphe d'exemples §4.2.2.

4.2.1 Définitions des polytopes d'hypergraphes

Nous considérons un hypergraphe \mathbf{H} sur n sommets tel qu'introduit au paragraphe 2.5 avec les conditions supplémentaires que $V(\mathbf{H}) \in E(\mathbf{H})$ et pour tout $v \in V(\mathbf{H})$, $v \in E(\mathbf{H})$. De plus, dans tout ce chapitre, nous identifions \mathbf{H} et $E(\mathbf{H})$ et notons simplement H pour $V(\mathbf{H})$.

On identifie les facettes (faces de codimension 1) du simplexe de dimension $n - 1$ avec les sommets de \mathbf{H} . Pour chaque sous-ensemble connexe X de \mathbf{H} de taille au moins 2, le nestoèdre (ou polytope d'hypergraphe) correspondant est obtenu en tronquant l'intersection des facettes étiquetées par un élément de X . Si toutes les arêtes de \mathbf{H} sont de cardinal 2, le polytope obtenu est un *associaèdre de graphes*, tel qu'introduit dans [CD06; Zel06].

Exemple 4.2.1. L'hypergraphe à gauche de la figure 4.2.1 prescrit les troncations du simplexe décrites à droite de cette même figure. En effet, à l'arête $\{x, u, v\}$ correspond la troncation du sommet opposé à la face y (intersection des faces x, u et v) et aux arêtes $\{y, x\}$, $\{x, u\}$, $\{x, v\}$ et $\{u, v\}$ correspondent les troncations de quatre arêtes de la figure. \triangle

Si \mathbf{H} est un hypergraphe et X un sous-hypergraphe connexe de \mathbf{H} , on note $\mathbf{H}_X := \{Z \mid Z \in \mathbf{H} \text{ et } Z \subseteq X\}$, et $\mathbf{H} \setminus X = \mathbf{H}_{H \setminus X}$. Si $\mathbf{H}_1^X, \dots, \mathbf{H}_n^X$ sont les composantes connexes de l'hypergraphe $\mathbf{H} \setminus X$, nous noterons :

$$\mathbf{H}, X \rightsquigarrow \mathbf{H}_1^X, \dots, \mathbf{H}_n^X,$$

en omettant les exposants X quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple 4.2.2. Reprenant l'hypergraphe de la figure 4.2.1, nous avons la décomposition :

$$\mathbf{H}, \{x\} \rightsquigarrow \{y\}, \{\{u\}, \{v\}, \{u, v\}\}.$$

\triangle

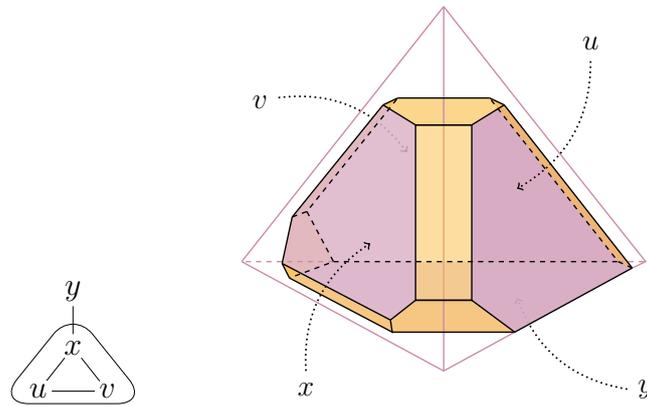


FIGURE 4.2.1 – À gauche, un hypergraphe. À droite, le polytope correspondant, vu comme un tétraèdre tronqué.

©Image de Jovana Obradović

Les faces du polytope d'hypergraphe associé à un hypergraphe \mathbf{H} sont en bijection avec des arbres de Cayley, que nous appelons *constructions*, dont les sommets sont décorés par des ensembles non vides de sommets de \mathbf{H} . Les constructions sont définies récursivement :

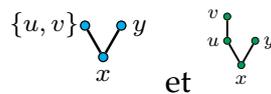
Définition 4.2.3 ([COI19]). Soit $\emptyset \neq Y \subseteq V(\mathbf{H})$.

Si $Y = H$, alors l'arbre a un seul sommet étiqueté par Y est une construction que nous notons Y .

Si $\mathbf{H}, Y \rightsquigarrow \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n$, et si T_1, \dots, T_n sont des constructions respectives de $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n$, alors l'arbre obtenu en greffant T_1, \dots, T_n sur un sommet décoré par Y est une construction de \mathbf{H} . Nous la notons $Y(T_1, \dots, T_n)$ et notons $Y = \text{root}(Y(T_1, \dots, T_n))$.

Nous notons $T : \mathbf{H}$ si T est une construction de \mathbf{H} et notons $\mathcal{C}(\mathbf{H})$ l'espace vectoriel engendré par les constructions de \mathbf{H} .

Remarque 4.2.4. Nous représenterons les singletons sans accolade. Par exemple, à la place de $\{x\}(\{u, v\}, \{y\})$ et $\{x\}(\{u\}(\{v\}), \{y\})$, nous écrirons $x(\{u, v\}, y)$ et $x(u(v), y)$ et les représenterons graphiquement comme suit :



respectivement.

Exemple 4.2.5. Reprenant l'hypergraphe de la figure 4.2.1, l'arbre



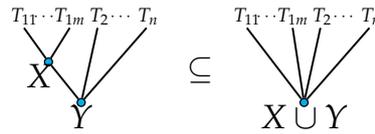
de l'hypergraphe, mais les arbres



et x ne le sont pas. △

Remarquons que les constructions sont des pré-posets, c'est-à-dire des relations binaires réflexives et transitives.

La représentation des faces comme constructions encode alors particulièrement bien l'inclusion : la contraction d'une arête d'une construction c représentant une face de dimension p correspond à la construction encodant une face de dimension $p + 1$ contenant c , comme représenté ci-après :



Un raffinement de cet ordre sera introduit au paragraphe 4.5.1.

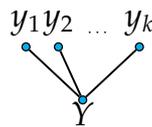
4.2.2 Familles de polytopes d'hypergraphes

Nous donnons maintenant des exemples de familles de polytopes d'hypergraphes, en commençant par la famille des simplexes, qui est celle obtenue sans aucune troncation. Une vue synthétique (mais non exhaustive) des familles de polytopes présentées est disponible sur la figure 4.2.2.

Exemple 4.2.6. Les **simplexes** sont "encodés" par les hypergraphes

$$S^X = \{\{x\} \mid x \in X\} \cup \{\{X\}\},$$

qui n'ont qu'une seule arête contenant tous les sommets. Les constructions associées ont la forme suivante :



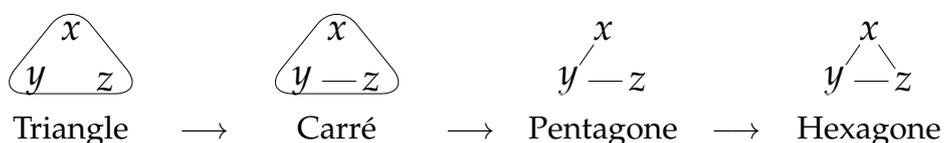
où $\emptyset \subsetneq Y \subseteq X$ et $\{y_1, \dots, y_k\} = H \setminus Y$. Les constructions sont alors en bijection avec chacune des deux familles d'objets suivantes :

- sous-ensembles non vides de X ,
- ensembles pointés, c'est-à-dire les paires (X, Y) représentant l'ensemble X dont on a pointé une partie des éléments (Y).

Dans l'illustration de la figure 4.2.3, nous associons à chaque face du simplexe $S^{\{x,y,u,v\}}$ la construction correspondante. Les faces du tétraèdre sont associées avec les éléments de l'ensemble $\{x, y, u, v\}$ (en gris et désigné par des flèches en pointillés). La construction associée à une face définie comme l'intersection des facettes contenues dans un sous-ensemble $\emptyset \subsetneq Y \subsetneq \{x, y, u, v\}$ a sa racine étiquetée par $\{x, y, u, v\} \setminus Y$. De plus l'intérieur du simplexe est la construction à un seul sommet $\{x, y, u, v\}$. En particulier, les faces de dimension k sont étiquetées par les constructions dont la racine est un ensemble de taille $k + 1$. \triangle

Nous illustrons dans l'exemple suivant comment associer à un hypergraphe les troncations correspondantes et comment les constructions étiquettent les faces de cette troncation.

Exemple 4.2.7. Considérons la suite d'hypergraphes suivantes sur l'ensemble des sommets $\{x, y, z\}$, qui s'étend de l'hypergraphe sans arête de taille 2 jusqu'à l'hypergraphe complet, chaque hypergraphe de la suite étant obtenu à partir du précédent par l'ajout d'une unique arête de taille 2.



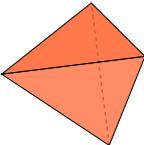
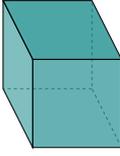
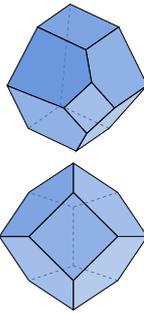
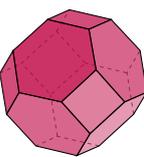
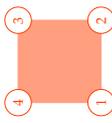
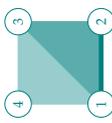
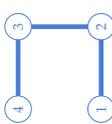
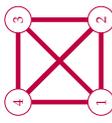
Polytopes	Simplexe	Hypercube	Associaèdre	Permutaoèdre
Photo d'identité				
Hypergraphe associé				
Objets combinatoires associés (Faces de dim k dans un espace de dim n)	Ensembles de $n + 1$ éléments avec $k + 1$ éléments pointés	Chemins à pas E, NE+ et NE- de $(0, 0)$ à $(n, n - k)$	Dissections d'un $n + 3$ -gone en $n - k + 1$ régions = Arbres plans à $n - k + 1$ sommets internes et $n + 2$ feuilles	Surjections de $\{1, \dots, n + 1\}$ dans $\{1, \dots, n - k + 1\}$
Cardinaux	$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} = 2^{n+1} - 1$ (A074909)	$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$ (A013609)	$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n+k+2}{k}$ (Super-Catalan ou petits nbres de Schroeder A001003) (A033282)	$\sum_{k=0}^n (k + 1)! S_2(n + 1, k + 1)$ (Nbres de Fubini A000670) (A019538)
1-squelette	??	Treillis booléen	Ordre de Tamari	Ordre de Bruhat faible
Algèbres et opérades associées	Trias/Com Trias [Cha02b]	?? (filtré : [Cha02a])	Tridendriforme [LR04; Cha02b]	ST (version graduée de [Cha02b])

FIGURE 4.2.2 – Présentation synthétique des principaux polytopes d'hypergraphes

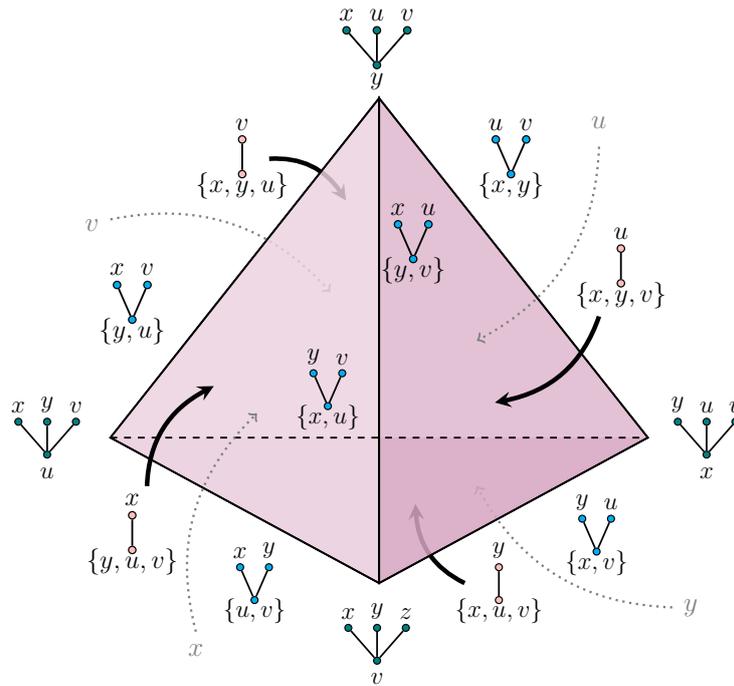


FIGURE 4.2.3 – Simplexe dont les faces sont étiquetées par les constructions correspondantes.

©Image de Jovana Obradović

Ces quatre hypergraphes encodent tous les polytopes d'hypergraphe de dimension 2 possibles. Nous illustrons sur la figure 4.2.4 ci-après la description complète du treillis des faces de ces polytopes en termes de constructions (et sur la figure 4.2.5 en termes de tubages).

Nous expliquons maintenant la suite des troncations correspondant à un hypergraphe donné. Partant d'un simplexe de dimension 2 (un triangle donc) dont les facettes sont identifiées avec x, y et z , le polytope correspondant à l'hypergraphe du triangle n'a aucune troncation et est donc un simplexe. L'hypergraphe du carré encode une troncation du sommet en bas à gauche (à l'intersection des facettes y et z). L'hypergraphe du pentagone prescrit en supplément une troncation du sommet en bas à droite (à l'intersection des facettes x et y). Pour finir, l'hypergraphe de l'hexagone impose de plus une troncation du sommet le plus haut (à l'intersection des facettes x et z) : le polytope d'hypergraphe correspondant a ainsi tous ses sommets tronqués.

L'association des constructions aux faces géométriques suit ensuite les règles suivantes. Pour le triangle, nous procédons comme décrit à l'exemple 4.2.6. Du triangle au carré, la troncation du coin en bas à gauche se traduit combinatoirement par le fait que l'arbre $\begin{matrix} y & z \\ & \diagdown \diagup \\ & x \end{matrix}$, qui est une construction de l'hypergraphe du triangle, n'est pas une construction de l'hypergraphe du carré. En effet, comme $\{y, z\}$ est connexe dans l'hypergraphe carré, $\begin{matrix} y & z \\ & \diagdown \diagup \\ & x \end{matrix}$ se trouve remplacé par trois nouvelles constructions encodant deux sommets et une arête :

$$\begin{matrix} y \\ z \\ x \end{matrix}, \quad \begin{matrix} z \\ y \\ x \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} \{y, z\} \\ x \end{matrix}.$$

Les autres faces du carré ont la même description en termes de constructions que dans le

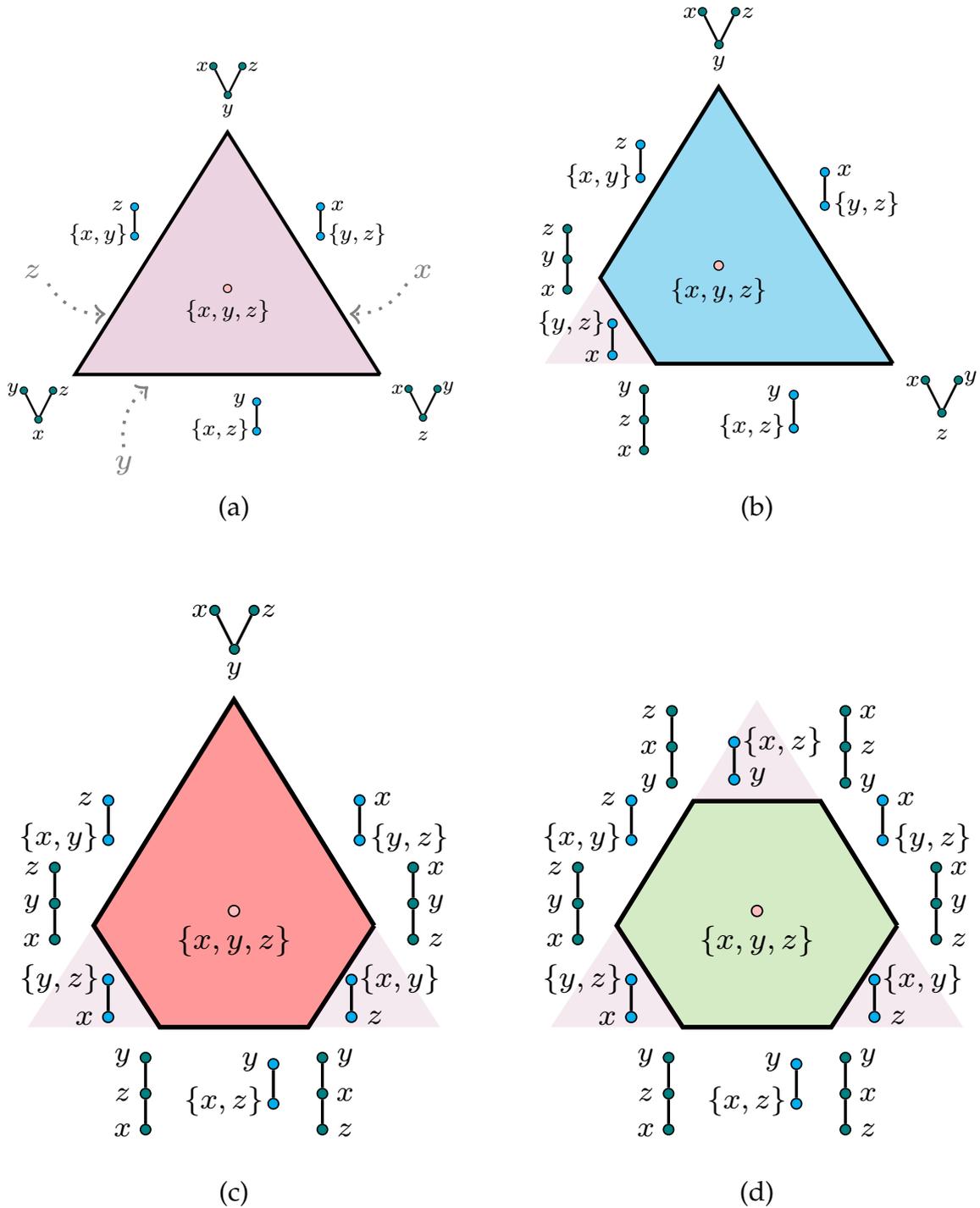


FIGURE 4.2.4 – Les polytopes d'hypergraphe de dimension 2 (à isomorphisme près)

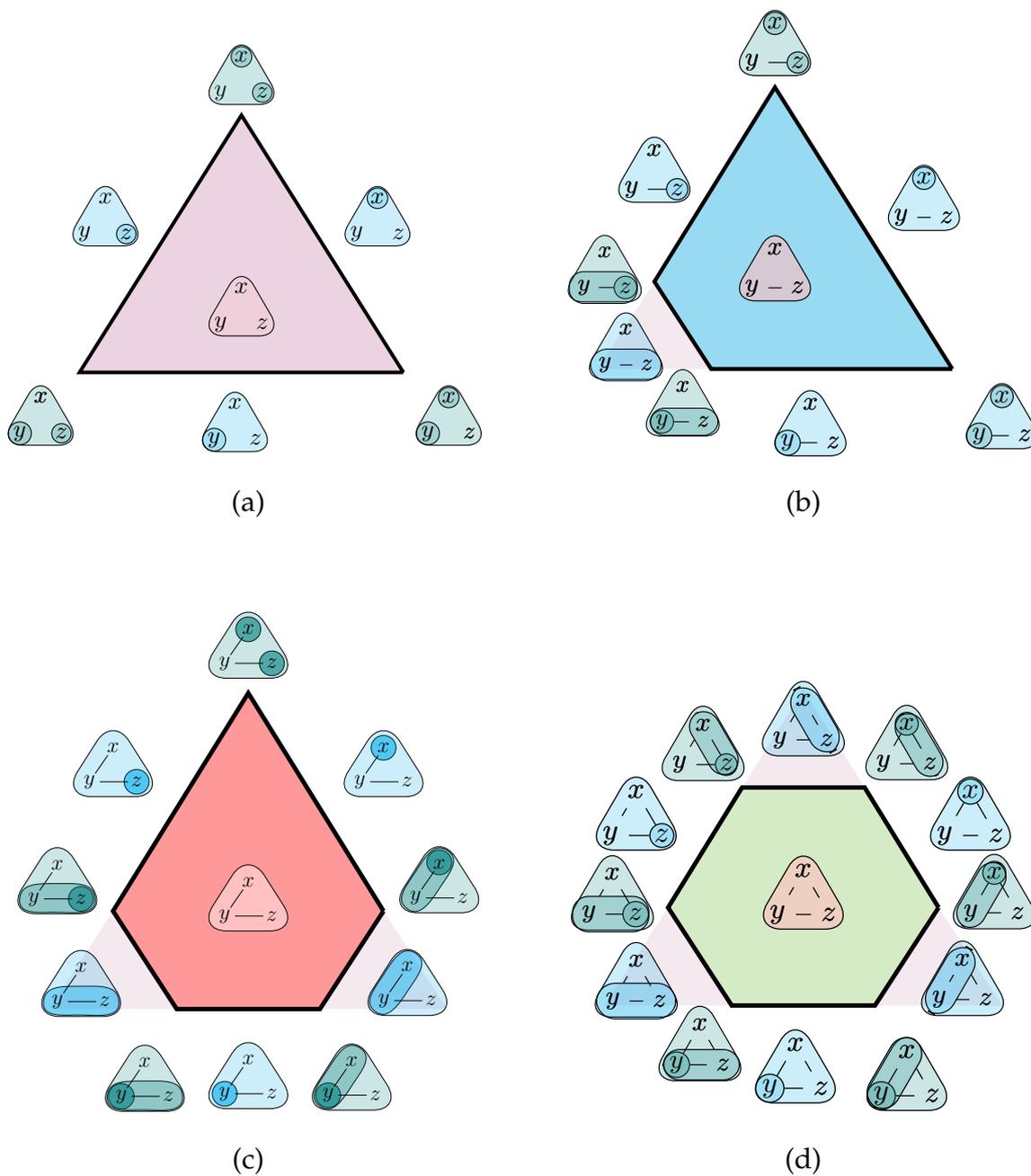


FIGURE 4.2.5 – Figure 4.2.4 en termes de tubages (cf. [CD06, Figure 1]).

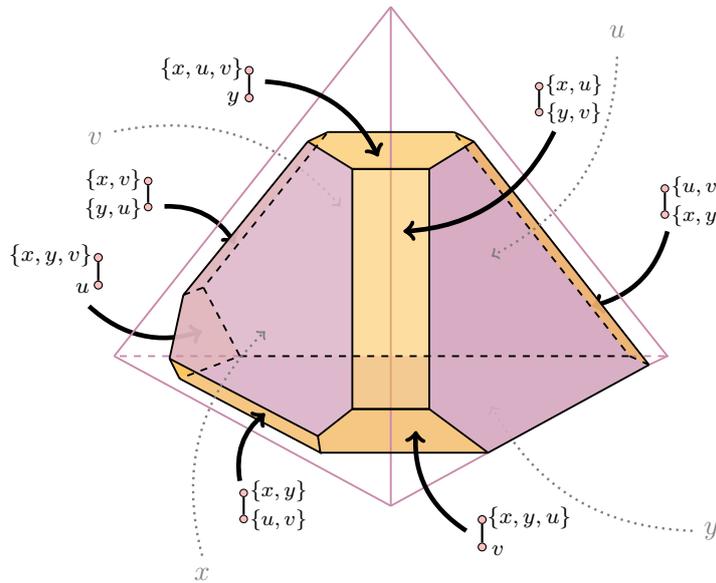


FIGURE 4.2.6 – L'appariement des constructions aux facettes du polytope encodé par l'hypergraphe ayant pour arêtes $\mathbf{H} = \{\{x, y\}, \{x, u\}, \{x, v\}, \{u, v\}, \{x, y, u, v\}\}$.
 ©Image de Jovana Obradović

triangle. On procède ensuite de même pour les troncations suivantes qui mènent au pentagone (associaèdre de dimension 2), puis à l'hexagone (permutoèdre de dimension 2) : chaque troncation remplace un sommet par deux sommets et une arête. △

Exemple 4.2.8. Un exemple un peu plus développé que celui de l'exemple 4.2.7 est présenté sur la figure 4.2.6. Les quatre faces de dimensions 2 (roses) issues du simplexe originel ont une description de leur construction associée analogue. Par exemple, la face correspondant à la face du simplexe étiquetée par x sera étiquetée par la construction $\begin{matrix} \circ \\ | \\ \circ \end{matrix} \begin{matrix} x \\ \circ \end{matrix}$. Nous n'indiquons donc que les constructions différant de celles du simplexe sur des facettes. En effet, le lien entre facette et constructions s'étend de manière non ambiguë aux faces de dimension plus petite. Par exemple, l'unique arête commune aux faces $\begin{matrix} \circ \\ | \\ \circ \end{matrix} \begin{matrix} x, u, v \\ \circ \end{matrix}$ et $\begin{matrix} \circ \\ | \\ \circ \end{matrix} \begin{matrix} x, u \\ \circ \end{matrix}$ est associée à la construction $\begin{matrix} \circ \\ | \\ \circ \end{matrix} \begin{matrix} x, u \\ \circ \end{matrix}$ (nous ne la précisons donc pas sur la figure). △

Nous donnons maintenant deux exemples de polytopes d'hypergraphe qui ne rentrent pas dans le cadre des associaèdres de graphes : les hypercubes et les érosoèdres.

Exemple 4.2.9 (Hypercubes). Pour un ensemble fini ordonné $X = \{x_1 < \dots < x_n\}$, considérons l'hypergraphe

$$\mathbf{C}^X = \{\{x_1\}, \dots, \{x_n\}\} \cup \{\{x_j \mid 1 \leq j \leq i\} \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Les constructions de \mathbf{C}^X sont en bijection avec les mots de longueur n sur l'alphabet $\{+, -, \bullet\}$ qui commencent par $+$, et décorent donc les faces d'un hypercube de dimension $(n - 1)$ (voir [CDO25b]). Nous avons d'ores-et-déjà listé les constructions de l'hypercube $\mathbf{C}^{\{y < z < x\}}$ en haut à droite de la figure 4.2.4. △

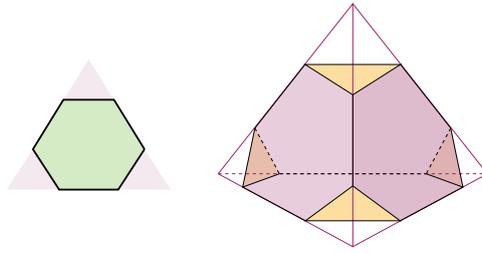


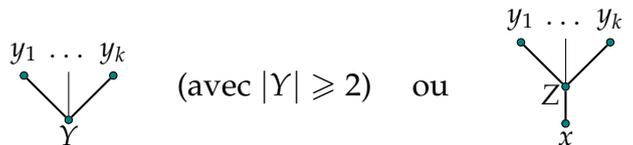
FIGURE 4.2.7 – Erosoèdres en dimension 2 et 3

Exemple 4.2.10 (Érosoèdre). Ils sont obtenus en tronquant tous les sommets du simplexe. Leur nom vient de l’analogie avec l’érosion des rochers. Les érosoèdres de dimension 2 et 3 sont représentés sur la figure 4.2.7. Les hypergraphes associés sont donnés par :

$$E^X = \{\{x_1\}, \dots, \{x_n\}\} \cup \{\{x_j \mid j \neq i\} \mid 1 \leq i \leq n\},$$

où $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Les constructions de l’érosoèdre sont de la forme :



Le nombre des faces de l’érosoèdre est donné par :

Lemme 4.2.11. *Le nombre de sommets de l’érosoèdre de dimension n est $n(n + 1)$ et le nombre de faces de dimension k est $(n - k) \binom{n}{k+1}$. Le nombre total de faces est donc de $2^{n-1}(n + 2) - 2n - 1$ pour $n > 1$.*

△

Exemples 4.2.12. Les **associaèdres** et les **permutoèdres** introduits à la section 4.1 sont aussi des polytopes d’hypergraphe (et même des associaèdres de graphes). Ils sont obtenus à partir des graphes linéaires et complets respectivement :

$$K^X = \{\{x_1\}, \dots, \{x_n\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{n-1}, x_n\}, \{x_1, \dots, x_n\}\},$$

pour $X = \{x_1 < \dots < x_n\}$, et

$$P^X = \{\{x_1\}, \dots, \{x_n\}, \{x_1, \dots, x_n\}\} \cup \{\{x_i, x_j\} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

pour $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Les constructions de K^X (resp. P^X) sont en effet en bijection avec les arbres plans (resp. les surjections). L’étiquetage permettant d’identifier les arbres plans avec les constructions de l’associaèdre est obtenu en généralisant la bijection des arbres binaires de recherche : étant donné un arbre plan dont la racine est d’arité $p + 1$, on étiquette la racine par $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\}$, et chaque sous-arbre T_0, \dots, T_p récursivement de telle manière que la condition $\max T_j < x_{i_{j+1}} < \min T_{j+1}$ soit vérifiée pour tout $0 \leq j \leq p - 1$.

Pour les permutations, on peut ordonner l’image d’une surjection $f : [m] \rightarrow [n]$ comme une construction linéaire $f^{-1}(n)(f^{-1}(n - 1)(\dots(f^{-1}(1))))$ de hauteur n . Dans la figure 4.1.1, nous montrons la correspondance entre arbres plans (resp. surjections) et constructions de

l'associaèdre (resp. permutoèdre) de dimension 2 comme représentées sur la figure 4.2.4(c) (resp. figure 4.2.4(d)).

△

Nous introduisons dans la section 4.4.4 une manière de construire des familles de polytopes d'hypergraphe qui satisfassent les conditions (cf. 4.4.1) pour la construction d'un produit associatif. Nous y présentons un dernier exemple de famille de polytope d'hypergraphe appelée *frisoèdre*.

4.3 Tubages, ensembles nichés et constructions

Les constructions introduites dans [COI19] et utilisées dans [CDO25b] et [CDO25a] sont une description alternative des tubes et tubages (tubings) et des ensembles nichés présents dans la littérature des associaèdres de graphes [CD06] et des nestoèdres [Pos09]. Rappelons d'abord la définition des tubes ou ensembles de construction (*building set* en anglais) et des tubages ou ensembles nichés (*nested set* en anglais). Les ensembles nichés ont été introduits par De Concini et Procesi [DP95] dans le contexte des arrangements d'hyperplans. Ils ont été formulés en termes de semi-treillis supérieur (c'est-à-dire des posets dont tout sous-ensemble admet une borne supérieure) par Feichtner et Müller [FM05a]. Ils ont aussi été utilisés pour la description des faces des nestoèdres par Postnikov [Pos09]. Nous reprenons ici les définitions d'ensembles de constructions (tubes) et ensembles nichés (tubages) selon Feichtner et Müller parce que ce sont les plus générales que nous utilisons (dans [DD25a]). Les définitions de Postnikov correspondent à prendre des sous-treillis du treillis booléen, obtenu en prenant les sous-ensembles de sommets connexes des graphes considérés.

Définition 4.3.1. [FM05a, Définition 2.1] Soit \mathcal{L} un semi-treillis supérieur dont le maximum est noté $\hat{1}$. Un sous-ensemble \mathcal{G} de $\mathcal{L}_{<\hat{1}}$ (\mathcal{L} privé de son maximum) est un *ensemble de briques* (en anglais, *building set* ou *tube*) si, pour tout élément $x \in \mathcal{L}_{<\hat{1}}$ et $\min\{g \in \mathcal{G} \mid g \geq x\} = \{g_1, \dots, g_k\}$, il y a un isomorphisme de posets

$$\prod_{j=1}^k [g_j, \hat{1}] \xrightarrow{\sim} [x, \hat{1}] \quad (4.3.1)$$

envoyant $(\hat{1}, \dots, g_j, \dots, \hat{1})$ sur g_j .

Exemple 4.3.2. Dans le poset Π_n , l'ensemble de briques le plus petit B_{\min} est l'ensemble des partitions ayant exactement une part non triviale (de cardinal supérieur ou égal à 2). L'ensemble de briques le plus grand B_{\max} est $\Pi_n \setminus \hat{1}$.

Dans le treillis booléen dual B_E^* (ordonné par la contenance, dont le maximum est l'ensemble vide), cette condition revient à celle de Postnikov : un ensemble de briques est un ensemble B de sous-ensembles non vides tels que, pour tout ensemble non vide v , l'intervalle $[v; \emptyset]$ soit isomorphe au produit $[b_1; \emptyset] \times \dots \times [b_k; \emptyset]$, où pour tout i , $b_i \in B$, $b_i \subseteq x$ et il n'existe pas de $c \in B$ tel que $b_i \subsetneq c \subseteq x$. Cela n'est possible que si l'ensemble $\{b_1, \dots, b_k\}$ forme une partition de x . Postnikov [Pos09, Définition 7.1] a reformulé ces conditions comme :

- Si $I, J \in B$ et $I \cap J \neq \emptyset$, alors $I \cup J \in B$
- B contient tous les singletons.

△

Définition 4.3.3. [FM05a, Definition 2.2] Soit \mathcal{L} un semi-treillis supérieur et \mathcal{G} un ensemble de briques de \mathcal{L} . Un sous-ensemble \mathcal{S} de \mathcal{G} est un *ensemble niché* si, pour tout k -uplet d'éléments incomparables (x_1, \dots, x_k) de \mathcal{S} ($k \geq 2$) la borne inférieure x_1, \dots, x_k existe et n'est pas dans \mathcal{G} .

Exemple 4.3.4. Je présente dans la section 5.7.2 des ensembles nichés associés au poset des hyperarbres, appelés *arbres de fusion*.

Considérant le treillis booléen, on retrouve la définition d'ensembles nichés de Postnikov [Pos09, Definition 7.3]. \triangle

L'ensemble des \mathcal{G} -ensembles nichés forme un complexe simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{L}, \mathcal{G})$. Le complexe d'ordre niché $\mathcal{N}(\mathcal{L}, \mathcal{L}_{<\infty})$ coïncide avec le complexe d'ordre $\Delta(\mathcal{L}_{<\hat{1}})$. Plus généralement, nous avons :

Proposition 4.3.5. [FM05a, Proposition 3.3] Le complexe des ensembles nichés $\mathcal{N}(\mathcal{L}, \mathcal{G})$ est homotope au complexe d'ordre $\Delta(\mathcal{L}_{<\hat{1}})$.

Exemple 4.3.6. Pour les posets des partitions Π_n , le complexe $\mathcal{N}(\Pi_n, B_{\min})$ des ensembles nichés muni du cobord coïncide avec la construction cobar et le complexe $\mathcal{N}(\Pi_n, B_{\max})$ des ensembles nichés muni du cobord coïncide avec la construction cobar à niveaux (cf. section 3.2.2). \triangle

Nous établissons maintenant le lien entre constructions et ensembles nichés. Considérons un hypergraphe \mathbf{H} et une construction C de \mathbf{H} . L'union des étiquettes $L(S) = \cup_{v \in V(S)} v$ d'un sous-arbre S de C correspond à un ensemble de briques (*building set*). L'ensemble $\{L(S) | S \text{ sous-arbre de } C\}$ correspond alors à un ensemble niché (*nested set*). Dans le cas où l'hypergraphe \mathbf{H} considéré est un graphe, chaque $L(S)$ correspond à un tube tel qu'introduit dans [CD06]. Un exemple de cette correspondance est proposé à la Figure 4.2.5 qui reprend la figure 4.2.4 en termes de tubages / ensembles nichés. Une caractérisation inductive des constructions en termes d'ensembles nichés est proposée dans [COI19, Proposition 2].

4.4 Produit de battage et produits q -tridendriformes sur les faces des nestoèdres

La description des faces des polytopes d'hypergraphe en termes de constructions donnée dans [COI19] est le cadre idéal pour adapter les algèbres de battage et tridendriformes présentées à la fin de la section 4.1.2 à d'autres familles de polytopes. Le produit de battage que nous présentons dans cette section sur les faces de certaines familles de nestoèdres étend celui introduit par Ronco [Ron12] sur les associaèdres de graphes [CD06] en l'adaptant à de nouvelles familles, telles que les restrictoèdres et les frisoèdres.

Dans §4.4.1, nous introduisons une condition (nommée "stricte") sur la famille de polytopes considérée pour que l'ensemble des faces soit muni d'un produit de battage et d'une structure q -tridendriforme, pour un q arbitraire. Ces produits sont ensuite définis récursivement §4.4.2. Nous montrons que les associaèdres et les permutoèdres rentrent dans ce cadre, de même que toutes les familles de type restrictoèdres, étudiées au §4.4.4, qui sont obtenues par restriction d'un hypergraphe infini donné.

Nous introduisons ensuite au §4.4.5 une définition non récursive du produit de battage obtenu en termes de restrictions qui s'avère être capitale à la fois pour l'extension de §4.4.6 et pour la preuve du lien entre ordre sur les faces et produit de battage de §4.5.2.

En affaiblissant les conditions demandées sur la famille de polytopes, nous sommes en mesure au §4.4.6 de définir un produit de battage et des produits -1 -tridendriformes sur

une classe d'exemples plus large contenant le simplexe, l'hypercube, le cycloèdre et une nouvelle famille de polytopes que nous appelons l'érosoèdre.

4.4.1 Équipes strictes, clans et délégations

La première étape pour pouvoir définir le produit de battage est de fournir un cadre adéquat. Lorsque l'on définit une application, il est important de définir les ensembles de départ et d'arrivée considérés. De même, avant de définir nos produits, il est important de préciser les polytopes d'hypergraphe dont nous considérons les constructions. Pour alléger les notations, nous identifierons le polytope considéré et un hypergraphe associé.

Commençons d'abord par expliquer sur l'exemple du permutoèdre le type de condition nécessaire à une définition inductive d'un produit de battage. La première étape est de reformuler le produit introduit dans §3.3.5 en termes de constructions. La surjection $f = 121$ de l'exemple précédent est alors une surjection de $\llbracket 3 \rrbracket$ dans $\llbracket 2 \rrbracket$, avec $f^{-1}(1) = \{1, 3\}$ et $f^{-1}(2) = \{2\}$. Nous représentons donc f comme une construction $2(\{1, 3\})$ de $\mathbf{P}^{\llbracket 3 \rrbracket}$. La surjection $g = 21$ est représentée comme une surjection $4(5)$ de $\mathbf{P}^{\{4,5\}}$. En termes de constructions, $f \cdot g$ et $f \prec g$ se reformulent alors :

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \{2, 4\}(\{1, 3, 5\}) + \{2, 4\}(5(\{1, 3\})) + \{2, 4\}(\{1, 3\}(5)) \\ f \prec g &= 2(\{1, 3, 4\}(5)) + 2(4(\{1, 3, 5\})) + 2(4(5(\{1, 3\}))) + 2(4(\{1, 3\}(5))) + 2(\{1, 3\}(4(5))), \end{aligned}$$

où $\{2, 4\}(\{1, 3, 5\})$ correspond à la surjection 12121, etc. .

De manière combinatoire, pour obtenir une construction C apparaissant dans $f * g$ nous procédons comme suit : nous choisissons la racine de C comme étant celle de f , celle de g ou l'union des racines de f et g , puis construisons récursivement le reste de C . Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \{2, 4\}(\{1, 3\} * 5) \\ f \prec g &= 2(\{1, 3\} * 4(5)) \\ &= 2(\{1, 3, 4\}(5)) + 2(4(\{1, 3\} * 5)) + 2(\{1, 3\}(4(5))), \end{aligned}$$

et $f \succ g$ de manière analogue.

Ici, chacun des produits est une application de $\mathcal{C}(\mathbf{P}^{\llbracket 3 \rrbracket}) \times \mathcal{C}(\mathbf{P}^{\{4,5\}}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbf{P}^{\llbracket 5 \rrbracket})$. *A priori*, on ne souhaite calculer que des produits de $\mathcal{C}(\mathbf{P}^{\llbracket 1:k \rrbracket}) \times \mathcal{C}(\mathbf{P}^{\llbracket k+1:n \rrbracket})$ dans $\mathcal{C}(\mathbf{P}^{\llbracket n \rrbracket})$. Néanmoins, la définition récursive du produit fait intervenir des calculs de produits de $\mathcal{C}(\mathbf{P}^V) \times \mathcal{C}(\mathbf{P}^W)$ dans $\mathcal{C}(\mathbf{P}^{V \cup W})$ pour n'importe quels ensembles finis V et W . Dans l'exemple considéré, le produit $\{1, 3\} * 5$ apparaît. Cependant, étant donnée une famille d'hypergraphes \mathfrak{U} , considérer tous les produits $\mathcal{C}(\mathbf{H}) \times \mathcal{C}(\mathbf{I})$ dans $\mathcal{C}(\mathbf{J})$, avec $J = H \cup I$ et $\mathbf{H}, \mathbf{I}, \mathbf{J} \in \mathfrak{U}$ serait trop contraignant puisque certains de ces triplets d'hypergraphes pourraient ne pas vérifier les conditions permettant l'associativité.

Suivant la terminologie introduite dans [CDO25b], on appelle *équipe* les couples qui "rentrent en jeu", c'est-à-dire les $(\{\mathbf{H}_a \mid a \in A\}, \mathbf{H})$ (avec A fini et $H = \bigsqcup_{a \in A} \mathbf{H}_a$) pour lesquels on considère des produits $\prod_{a \in A} \mathbf{H}_a \rightarrow \mathbf{H}$, *clan* l'ensemble des équipes en jeu, *univers* l'ensemble des hypergraphes considérés et *délégation* une paire

$$\delta = (\{C_a : \mathbf{H}_a \mid a \in A\}, \mathbf{H}) \quad \text{telle que} \quad \tau := (\{\mathbf{H}_a \mid a \in A\}, \mathbf{H}) \in \Xi,$$

où C_a est une combinaison linéaire de constructions de \mathbf{H}_a , sur laquelle le produit s'applique. Notez qu'un univers donné peut contenir plusieurs hypergraphes différents sur un ensemble de sommets fixé : c'est le cas de l'univers des érosoèdres (exemple 4.4.24) qui contient à la fois les hypergraphes des érosoèdres et ceux des simplexes.

Exemple 4.4.1. Considérons l'univers contenant tous les (hypergraphes de) permutoèdres \mathbf{P}^X . Un exemple d'équipe est donné par :

$$\tau^{\mathbf{P}} = \left(\{ \mathbf{P}^{\{\heartsuit, \diamondsuit\}}, \mathbf{P}^{\{\clubsuit, \spadesuit\}}, \mathbf{P}^{\{\ast\}}, \mathbf{P}^{\{\star\}} \}, \mathbf{P}^{\{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit, \ast, \star\}} \right). \quad (4.4.1)$$

△

4.4.2 Produit de battage d'une délégation

Considérons maintenant un univers \mathfrak{U} d'hypergraphes connexes, on définit le produit de battage d'une délégation $\delta = (C_a)_{a \in A}$ constituée entièrement de constructions (et non de combinaison linéaire de constructions), avant de l'étendre par linéarité :

Définition 4.4.2 ([CDO25b]). Le produit de battage d'une délégation $\delta = (C_a)_{a \in A}$ sur une équipe $(\{\mathbf{H}_a \mid a \in A\}, \mathbf{H})$, où C_a est une construction de racine X_a pour tout $a \in A$, est donné par :

$$\ast(\delta) = \sum_{\emptyset \subsetneq B \subseteq A} q^{|B|-1} \ast_B(\delta), \quad \text{où } \ast_B(\delta) = \left(\bigcup_{b \in B} X_b \right) (\ast(\delta_1^B), \dots, \ast(\delta_{n_B}^B)). \quad (4.4.2)$$

Ce produit de battage coïncide avec celui introduit par Loday et Ronco [LR02] et Burgunder et Ronco [BR10] sur les associaèdres et permutoèdres respectivement.

Pour assurer l'associativité de ce produit, nous devons imposer une condition sur l'ensemble des équipes considérées pour que deux éléments comparables dans un des termes du produit restent comparables dans le résultat final.

Définition 4.4.3 ([CDO25b]). Une équipe $(\{\mathbf{H}_a \mid a \in A\}, \mathbf{H})$ est *stricte* si pour tout $a \in A$ et pour toute arête e de \mathbf{H}_a , e est connexe dans \mathbf{H} .

Commençons par donner un exemple d'équipe non stricte :

Exemple 4.4.4. Considérons l'équipe associée aux hypercubes (cf. exemple 4.2.9) :

$$\left(\left\{ \mathbf{H}_1 = \mathbf{C}^{\{1\}}, \mathbf{H}_2 = \mathbf{C}^{\{2,3\}}, \mathbf{H}_3 = \mathbf{C}^{\{4\}} \right\}, \mathbf{C}^{\{1,2,3,4\}} \right)$$

Choisissant $B = 1$ et $X_1 = \{1\}$, nous obtenons que \mathbf{H}_2 n'est pas inclus dans une composante connexe de $\mathbf{H} \setminus \{1\}$: cette équipe n'est pas stricte (mais quasi-stricte cf. §4.4.6). △

Exemple 4.4.5. Les équipes associées aux permutoèdres, associaèdres et frisoèdres respectivement sont strictes. △

Nous représentons cette condition comme des cobords sur la figure 4.4.1.

Un *clan strict* est un ensemble Ξ d'équipes strictes tel que, pour toute équipe $\tau \in \Xi$, et toute décomposition $\tau, \bigcup_{b \in B} X_b \xrightarrow{\simeq} \tau_1, \dots, \tau_n$, nous ayons $\tau_i \in \Xi$ pour tout i . L'ensemble des équipes des univers associés aux associaèdres, frisoèdres et permutoèdres, respectivement, forment des clans stricts.

Cette condition sera relâchée dans la section §4.4.6 dans un cadre appelé *semi-strict* dans lequel le produit ci-dessus ne sera associatif que pour $q = -1$.

Avant d'arriver au théorème d'associativité de \ast , nous avons besoin de conditions supplémentaires sur les clans :

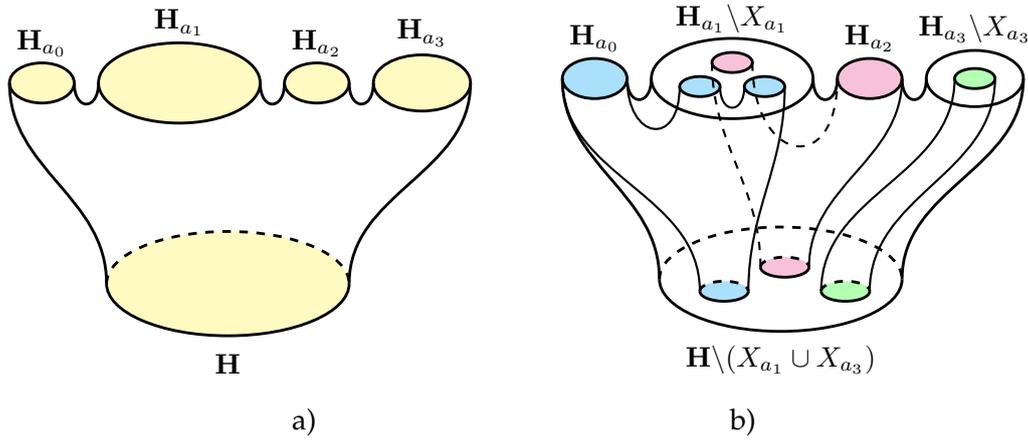


FIGURE 4.4.1 – a) Une équipe $\tau = (\{\mathbf{H}_{a_0}, \mathbf{H}_{a_1}, \mathbf{H}_{a_2}, \mathbf{H}_{a_3}\}, \mathbf{H})$ est représentée comme un cobord. Les hypergraphes auxquels appartiennent les constructions dont on fait le produit sont représentés comme des cercles sur la bordure haute du cobord. L'hypergraphe dans lequel vit le produit obtenu est représenté comme un cercle sur la bordure basse du cobord. b) Pour $X_{a_1} \subseteq H_{a_1}$ et $X_{a_3} \subseteq H_{a_3}$, les décompositions $\mathbf{H}_{a_1} \setminus X_{a_1} \rightsquigarrow \mathbf{H}_{(a_1,1)}, \mathbf{H}_{(a_1,2)}, \mathbf{H}_{(a_1,3)}$, $\mathbf{H}_{a_3} \setminus X_{a_3} \rightsquigarrow \mathbf{H}_{(a_3,1)}$ et $\mathbf{H} \setminus (X_{a_1} \cup X_{a_3}) \rightsquigarrow \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3$ sont représentées par des encastres de petits disques dans des grands disques, chaque petit disque correspondant à une composante connexe et leur complément correspondant à l'ensemble enlevé. Cela nous permet de visualiser les équipes induites $\tau, X_{a_1} \cup X_{a_3} \rightsquigarrow \tau_1, \tau_2, \tau_3$ comme des cobords à l'intérieur de τ .

Définition 4.4.6 ([CDO25b]). Un clan Ξ est *associatif* si, pour tout

$$\tau = (\{\mathbf{H}_a \mid a \in A\}, \mathbf{H}) \in \Xi, a_0 \in A, \tau' = (\{\mathbf{H}_{(a_0, a')} \mid a' \in A'\}, \mathbf{H}_{a_0}) \in \Xi,$$

nous avons

$$\tau'' := (\{\mathbf{H}_a \mid a \in A \setminus \{a_0\}\} \cup \{\mathbf{H}_{(a_0, a')} \mid a' \in A'\}, \mathbf{H}) \in \Xi.$$

τ'' sera appelé la greffe de τ' sur τ en a_0 .

Cette associativité est illustrée sur la figure 4.4.2.

Le théorème suivant établit l'associativité du produit de battage pour les clans stricts associatifs.

Théorème 4.4.7 ([CDO25b]). Soient Ξ un clan associatif strict, deux équipes (strictes) $\tau = (\{\mathbf{H}_a \mid a \in A\}, \mathbf{H}) \in \Xi, a_0 \in A$, et $\tau' = (\{\mathbf{H}_{(a_0, a')} \mid a' \in A'\}, \mathbf{H}_{a_0}) \in \Xi$, et des constructions $C_a : \mathbf{H}_a$ pour tout $a \in A \setminus \{a_0\}$ et $C_{(a_0, a')} : \mathbf{H}_{(a_0, a')}$ pour tout $a' \in A'$. Notant τ'' la greffe de τ' sur τ en a_0 et posant $A'' := (A \setminus \{a_0\}) \cup \{(a_0, a') \mid a' \in A'\}$, nous notons les délégations correspondantes $\delta'' = (\tau'', \{C_{a''} \mid a'' \in A''\})$ et $\delta' = (\tau', \{C_{(a_0, a')} \mid a' \in A'\})$. Nous avons alors, pour tout $\emptyset \neq B'' \subseteq A''$, l'équation suivante (appelée polydendriforme) :

$$*_B''^{\tau''}(\delta'') = \begin{cases} *_B''^{\tau}(\{C_a \mid a \in A \setminus \{a_0\}\} \cup \{*_B^{\tau'}(\delta')\}), & \text{si } B'' \subseteq A \setminus \{a_0\} \\ *_B^{\tau}(\{C_a \mid a \in A \setminus \{a_0\}\} \cup \{*_B^{\tau'}(\delta')\}), & \text{si } B'' \not\subseteq A \setminus \{a_0\} \end{cases}$$

où les exposants permettent de suivre les équipes correspondantes, et où, dans le second cas, $B = (B'' \cap (A \setminus \{a_0\})) \cup \{a_0\}$ et $B' = \{a' \in A' \mid (a_0, a') \in B''\}$. De plus, cette équation implique l'associativité du produit :

$$*_B^{\tau''}(\delta'') = *_B^{\tau}(\{C_a \mid a \in A \setminus \{a_0\}\} \cup \{*_B^{\tau'}(\delta')\}).$$

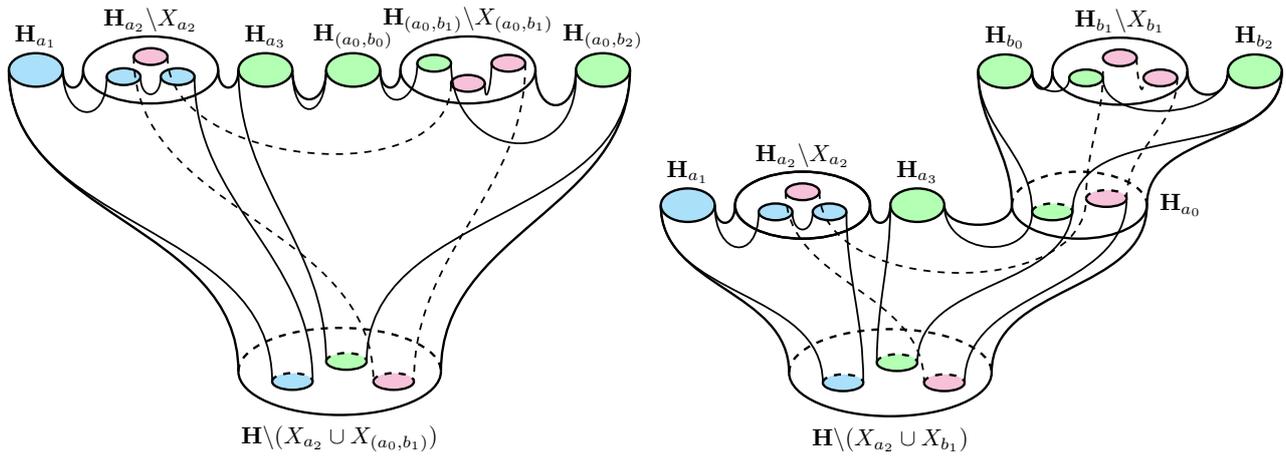


FIGURE 4.4.2 – Illustration de l'associativité par des cobords. Nous avons $A = \{a_0, \dots, a_3\}$, $A' = \{b_0, \dots, b_2\}$, $A'' = \{a_1, \dots, a_3, (a_0, b_0), (a_0, b_1), (a_0, b_2)\}$, $B'' = \{a_2, (a_0, b_1)\}$, $B' = b_1$ et $B = a_2, a_0$.

4.4.3 Cadre ordonné et équations tridendriformes

Pour établir le lien entre l'équation polydendriforme du théorème 4.4.7 et les équations tridendriformes de la section §3.3.5, nous avons besoin d'introduire un ordre sur les sommets des hypergraphes et des versions ordonnées des univers, équipes et clans.

Nous considérons d'abord un ensemble totalement ordonné, par exemple \mathbb{Z} . Pour $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{Z}$, nous noterons $X_1 < X_2$ si $\max(X_1) < \min(X_2)$. Un *univers ordonné* est un univers \mathfrak{U} tel que, pour tout $\mathbf{H} \in \mathfrak{U}$, $H \subseteq \mathbb{Z}$, et tel que toute décomposition $\mathbf{H}, X \rightsquigarrow \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_p$ soit indexée de telle manière que $H_i < H_{i+1}$ pour tout i . Une *équipe ordonnée* est une paire $((\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_p), \mathbf{H})$ telle que $(\{\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_p\}, \mathbf{H})$ est une équipe et telle que $H_1 < \dots < H_p$. Un *clan ordonné* est un clan dont toutes les équipes sont ordonnées.

Nous pouvons maintenant relier les structures polydendriforme et tridendriforme et montrer qu'une structure polydendriforme induit une structure tridendriforme dans le cadre ordonné.

Soit Ξ un clan associatif strict ordonné et supposons avoir

$$\{((\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_{2'}), \mathbf{H}), ((\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3), \mathbf{H}_{2'}), ((\mathbf{H}_{1'}, \mathbf{H}_3), \mathbf{H}), ((\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2), \mathbf{H}_{1'})\} \in \Xi.$$

Notons τ_1'' la greffe de $((\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2), \mathbf{H}_{1'})$ sur $((\mathbf{H}_{1'}, \mathbf{H}_3), \mathbf{H})$ en $1'$, et τ_2'' la greffe de $((\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3), \mathbf{H}_{2'})$ sur $((\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_{2'}), \mathbf{H})$ en $2'$. Ces équipes sont toutes de la forme générique $((\mathbf{H}_l, \mathbf{H}_r), \mathbf{L})$. Nous notons alors

$$\prec := *_{\{l\}} \quad \cdot := *_{\{l, r\}} \quad \succ := *_{\{r\}}.$$

Proposition 4.4.8. *Dans le cadre ordonné, les équations tridendriformes proviennent des équations polydendriformes pour l'équipe $\tau'' = ((\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3), \mathbf{H})$. Plus précisément, les sept équations de Loday et Ronco rappelées à la section §3.3.5 correspondent aux cas où B'' vaut $\{1\}$ ($\prec *$), $\{2\}$ ($\succ \prec$), $\{3\}$ ($* \succ$), $\{1, 2, 3\}$ (\cdot_{ass}), $\{2, 3\}$ ($\succ \cdot$), $\{1, 3\}$ ($\prec \cdot \succ$), $\{1, 2\}$ ($\cdot \prec$), respectivement.*

Nous obtenons ainsi une grande palette de structures tridendriformes, notamment celles associées aux restrictoèdres. Nous traiterons le cas d'une famille de graphes Γ^k à la proposition 4.4.11 qui interpole entre les associaèdres (pour $k = 1$) et les permutoèdres (pour $k = 2$). Le cas $k = 2$ est celui du frisoèdre traité dans la section suivante.

4.4.4 Restrictoèdres

Notre réserve principale de clan strict provient des restrictoèdres. Soit \mathbf{R} un hypergraphe (possiblement infini), et soit $\mathfrak{U}_{\mathbf{R}}$ l'univers consistant en tous les hypergraphes \mathbf{R}_X , tel que $X \subseteq R$ est fini et non vide, et \mathbf{R}_X est connexe : nous les appelons \mathbf{R} -*restrictoèdres*, ou restrictoèdres quand l'hypergraphe \mathbf{R} peut être déduit du contexte. Soit $\Xi_{\mathbf{R}}$ l'ensemble des paires $(\{\mathbf{R}_{V_a} | a \in A\}, \mathbf{R}_V)$ où $V \subseteq R$, $\{V_a\}_{a \in A}$ forme une partition de V , et les hypergraphes \mathbf{R}_{V_a} et \mathbf{R}_V sont tous dans $\mathfrak{U}_{\mathbf{R}}$. Nous nous placerons dans un contexte ordonné si \mathbf{R} est compatible à l'ordre, c'est-à-dire si $R \subseteq \mathbb{Z}$ et si les composantes connexes $\mathbf{R}_{V_1}, \dots, \mathbf{R}_{V_p}$ de \mathbf{R}_V peuvent être indexées de telle manière que $V_i < V_{i+1}$ pour tout i , pour tout ensemble fini $V \subseteq \mathbb{Z}$ tel que \mathbf{R}_V ne soit pas connexe. Un bon nombre de graphes compatibles à l'ordre sont fournis par la proposition 4.4.11 ci-après.

Exemple 4.4.9. L'hypergraphe suivant n'est pas compatible à l'ordre

$$\mathbf{R}^{nof} := \{\{a\} | a \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{n, -n\} | n \in \mathbb{N}^*\}.$$

En effet, les composantes connexes de $\mathbf{R}^{nof}_{\{-2,1,2\}}$ sont $\mathbf{R}^{nof}_{\{-2,2\}}$ et $\mathbf{R}^{nof}_{\{1\}}$. △

Proposition 4.4.10. Pour tout \mathbf{R} , $\Xi_{\mathbf{R}}$ est un clan associatif strict. Si \mathbf{R} est compatible avec l'ordre, alors la restriction de $\Xi_{\mathbf{R}}$ à ses équipes ordonnées est un clan associatif strict ordonné.

Proposition 4.4.11. Pour tout $1 \leq k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, le graphe suivant est compatible à l'ordre :

$$\Gamma^k := \{\{a\} | a \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{a, a+l\} | a \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}, 1 \leq l \leq k\}.$$

Le clan associé Ξ_{Γ^k} est donc un clan associatif strict ordonné.

Exemples 4.4.12. Dans les cas extrêmes $k = 1$ et $k = \infty$, nous retrouvons l'associaèdre ($\Gamma_X^1 = \mathbf{K}^X$ pour X un intervalle de \mathbb{Z}) et le permutoèdre ($\Gamma_X^\infty = \mathbf{P}^X$ pour un sous-ensemble fini X de \mathbb{Z}) respectivement. Pour $k = 2$, nous obtenons une famille d'hypergraphes que nous appelons *frisoèdres*. Plus précisément, considérons le graphe infini \mathbf{F} sur \mathbb{Z} avec l'ensemble des arêtes $\{(x, y) | |x - y| \leq 2\}$, et ses restrictions \mathbf{F}_X aux ensembles finis $X = \{x_1 < \dots < x_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ tels que \mathbf{F}_X soit connexe (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de i dans X tel que $x_{i+1} - x_i > 2$). Nous portons une attention particulière aux *frisoèdres compactes*, qui sont les frisoèdres tels que X soit un intervalle de \mathbb{Z} . Le terme "frisoèdre" vient de la forme de l'hypergraphe d'un frisoèdre compact pour X suffisamment grand, comme illustré sur la figure 4.4.3.

Nous n'avons pas à l'heure actuelle d'interprétation combinatoire "simple" des constructions des frisoèdres compacts. Nous donnons en figure 4.4.4, le nombre de constructions avec k nœuds pour $|X| = n$, pour des petites valeurs de k et n . △

Nous terminons cette section avec une caractérisation des univers provenant de restrictoèdres.

Proposition 4.4.13. Un univers \mathfrak{U} est de la forme $\mathfrak{U}_{\mathbf{R}}$, pour un hypergraphe \mathbf{R} , si et seulement s'il satisfait les quatre conditions suivantes :

1. Pour tous hypergraphes \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 de \mathfrak{U} , si $H_1 = H_2$, alors $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$.
2. Si $\mathbf{H} \in \mathfrak{U}$ et $e \in \mathbf{H}$, si $\mathbf{G} \in \mathfrak{U}$ est tel que $e \subseteq G$, alors $e \in \mathbf{G}$.
3. Si $\mathbf{H} \in \mathfrak{U}$, et si $X \subseteq H$ est tel que \mathbf{H}_X est connexe, alors il existe $\mathbf{G} \in \mathfrak{U}$ tel que $G = X$.
4. Si $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \in \mathfrak{U}$ sont tels que $H_1 \cap H_2$ soit non vide, alors il existe $\mathbf{H} \in \mathfrak{U}$ tel que $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \subseteq \mathbf{H}$.

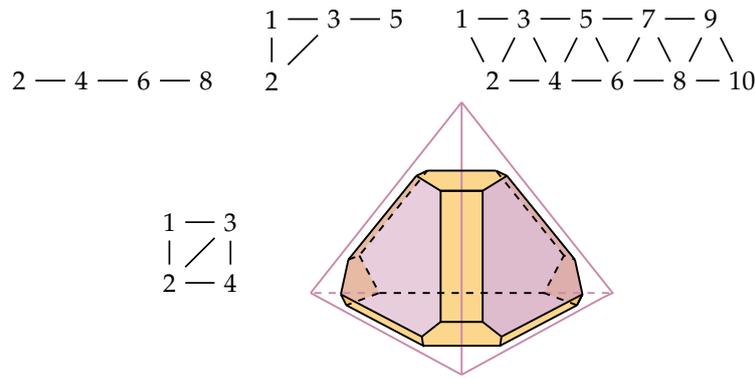


FIGURE 4.4.3 – En haut : Trois exemples de frisoèdres. Le plus à droite est le frisoèdre compacte sur $\{1, \dots, 10\}$.

En bas : L'hypergraphe et le polytope associés au frisoèdre compacte sur quatre sommets.

n \ k	1	2	3	4	5	Somme sur k
1	1					1
2	1	1				2
3	1	6	6			13
4	1	13	33	22		69
5	1	25	119	188	94	427

FIGURE 4.4.4 – Nombre de constructions avec k sommets du frisoèdre compacte sur n sommets

4.4.5 Restriction de construction et définition non récursive du produit de battage

Dans cette section, nous introduisons une définition équivalente non récursive du produit de battage, directement inspirée de [Ron12]. Pour ce faire, nous commençons par introduire la définition de la restriction d'une construction à un hypergraphe plus petit.

Définition 4.4.14. Soient \mathbf{H} et \mathbf{L} deux hypergraphes connexes tels que $H \subseteq L$ et tels que, pour tout $e \in \mathbf{H}$, e soit connexe dans \mathbf{L} . Soit $S = X(S_1, \dots, S_n)$ une construction de \mathbf{L} , avec $S_i : \mathbf{L}_i$ et $\mathbf{L}, X \rightsquigarrow \mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_n$. Nous définissons une construction $S_{\upharpoonright \mathbf{H}} : \mathbf{H}$, appelée *restriction de S à \mathbf{H}* , comme suit :

- si $X \cap H = \emptyset$, alors il y a un unique j tel que $H \subseteq L_j$, et nous posons

$$S_{\upharpoonright \mathbf{H}} = (S_j)_{\upharpoonright \mathbf{H}}$$

- si $X \cap H \neq \emptyset$, notons $\mathbf{H}, (X \cap H) \rightsquigarrow \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_p$. Chaque \mathbf{H}_i est inclus dans un \mathbf{L}_j , ce qui permet d'introduire la fonction correspondante $\varphi_X^{\mathbf{H}, \mathbf{L}} : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Nous posons alors

$$S_{\upharpoonright \mathbf{H}} = (X \cap H)(\dots, (S_{\varphi_X^{\mathbf{H}, \mathbf{L}}(i)}})_{\upharpoonright \mathbf{H}_i}, \dots).$$

Le fait que $S_{\upharpoonright \mathbf{H}}$ soit en effet une construction de \mathbf{H} peut être vérifié facilement par induction.

Exemple 4.4.15. Dans l'univers des frisoèdres, considérons $\mathbf{H} = \mathbf{F}_{\{1,3,5\}}$ et $\mathbf{L} = \mathbf{F}_{\{1,\dots,5\}}$. Comme toute arête de \mathbf{H} est aussi une arête de \mathbf{L} , l'hypothèse ci-dessus est vérifiée. Considérant la construction $S = 3(\{1,4\}(2,5))$ de \mathbf{L} , nous avons alors $S_{\uparrow\mathbf{H}} = 3(1,5)$. \triangle

Nous sommes maintenant en mesure de donner une définition alternative du produit de battage, après avoir introduit le poids correspondant à une construction. Cette définition est notamment cruciale pour la section 4.5.2.

Définition 4.4.16. Soit $\tau = (\{\mathbf{H}_a \mid a \in A\}, \mathbf{H})$ une équipe (stricte) et $U = X(U_1, \dots, U_n)$ une construction de \mathbf{H} . Nous associons à la construction U un poids $\mu^\tau(U)$ comme suit, posant $B = \{b \in A \mid X \cap H_b \neq \emptyset\}$ et $X_b = X \cap H_b$ pour tout $b \in B$:

$$\mu^\tau(U) = (|B| - 1) + \sum_{1 \leq i \leq n_B} \mu^{\tau_i}(U_i).$$

La proposition suivante donne une caractérisation directe (non inductive) du produit de battage $*$.

Proposition 4.4.17. Soit Ξ un clan associatif strict, et soit $\delta = (\{C_a : \mathbf{H}_a \mid a \in A\}, \mathbf{H})$ une Ξ -délégation d'équipe associée τ . Alors nous avons :

$$*(\delta) = \sum_{\substack{U:\mathbf{H} \\ \forall a \in A, U_{\uparrow\mathbf{H}_a} = C_a}} q^{\mu^\tau(U)} U = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} q^{|B|-1} (*_B(\delta)), \text{ où } (*_B(\delta)) = \sum_{\substack{U:\mathbf{H}, \\ \forall a \in A, U_{\uparrow\mathbf{H}_a} = C_a \\ \text{et racine}(U) = X_B}} q^{\mu^\tau(U)} U.$$

Exemple 4.4.18. Considérons la délégation des frisoèdres

$$\delta = (\{3(1,5) : \mathbf{F}_{\{1,3,5\}}, 4(2) : \mathbf{F}_{\{2,4\}}, \mathbf{F}_{\{1,2,3,4,5\}}\}.$$

Le produit de battage de δ est alors donné, à coefficients près, par la somme sur toutes les constructions U de $\mathbf{F}_{\{1,\dots,5\}}$ telles que $U_{\uparrow\mathbf{F}_{\{1,3,5\}}} = 3(1,5)$ et $U_{\uparrow\mathbf{F}_{\{2,4\}}} = 4(2)$. L'exposant de q dans le coefficient de $S = 3(\{1,4\}(2,5))$ de cette somme est donné par :

$$\begin{aligned} \mu^{(\{\mathbf{F}_{\{1,3,5\}}, \mathbf{F}_{\{2,4\}}, \mathbf{F}_{\{1,2,3,4,5\}}\})}(S) &= (1 - 1) + \mu^{(\{\mathbf{F}_{\{1\}}, \mathbf{F}_{\{5\}}, \mathbf{F}_{\{2,4\}}\}, \mathbf{F}_{\{1,2,4,5\}})}(\{1,4\}(5(2))) \\ &= (2 - 1) + \mu^{(\{\mathbf{F}_{\{2\}}, \mathbf{F}_{\{2\}}\})}(2) + \mu^{(\{\mathbf{F}_{\{5\}}, \mathbf{F}_{\{5\}}\})}(5) \\ &= 1 + (1 - 1) + (1 - 1) = 1. \end{aligned}$$

\triangle

4.4.6 Élargissons notre horizon

Pour englober d'autres exemples de familles de polytopes d'hypergraphe, telles que les simplexes, les hypercubes et les érosoèdres, nous avons d'abord introduit un affaiblissement de la condition stricte que nous avons appelé *quasi-strict* [CDO25b], puis un nouvel affaiblissement appelé *semi-strict* pour inclure le cycloèdre [CDO25a]. Nous ne présenterons ici que ce dernier cadre puisqu'il est le plus général.

Définition 4.4.19 (Équipe semi-strict). Une équipe $\tau = (\{\mathbf{H}_a \mid a \in A\}, \mathbf{H})$ est une *équipe semi-strict* si pour tout K tel que $\emptyset \neq K \subseteq H$ et K est connexe dans \mathbf{H} , $H_a \cap K$ est aussi connexe dans \mathbf{H}_a pour tout a tel que $H_a \cap K$ soit non vide.

On définit le produit de battage du cadre semi-strict de manière analogue au cadre strict : si $\delta = (\{C_a : \mathbf{H}_a \mid a \in A\}, \mathbf{H})$ est une délégation associée à l'équipe $\tau = (\{\mathbf{H}_a \mid a \in A\}, \mathbf{H})$, nous posons

$$*_B(\delta) = X_B(*(\delta_1), \dots, *(\delta_n)) \text{ où } \delta_i = \{(C_{\bar{a}})_{\upharpoonright_{H_{\bar{a}} \cap H_i}} \mid H_{\bar{a}} \cap H_i \neq \emptyset\}.$$

Le but de cette section est de montrer que nous avons toujours les équations polydendriformes quand $q = -1$. Pour ce faire, nous montrons dans un premier temps des propriétés de commutation du produit de battage avec la restriction. À partir de maintenant, nous supposons $q = -1$.

Proposition 4.4.20. *Si δ est une délégation comme précédemment et si K est connexe dans \mathbf{H} et $H_a \cap K$ est vide ou connexe dans \mathbf{H}_a pour tout a , alors $(*(\delta))_{\upharpoonright_K} = *(\delta_{\upharpoonright_K})$, où δ_K est constituée des constructions $(C_a)_{\upharpoonright_K}$ telles que $H_a \cap K$ est non vide.*

Notons que le produit de battage $*(\delta_{\upharpoonright_K})$ est bien formé grâce à la définition de "semi-strict". Nous formulons maintenant un analogue du théorème 4.4.7 dans le cadre semi-strict :

Théorème 4.4.21. *Soit Ξ un clan associatif semi-strict, deux équipes (semi-strictes) $\tau = (\{\mathbf{H}_a \mid a \in A\}, \mathbf{H}) \in \Xi$, $a_0 \in A$, et $\tau' = (\{\mathbf{H}_{(a_0, a')} \mid a' \in A'\}, \mathbf{H}_{a_0}) \in \Xi$, et des constructions $C_a : \mathbf{H}_a$ pour tout $a \in A \setminus \{a_0\}$ et $C_{(a_0, a')} : \mathbf{H}_{(a_0, a')}$ pour tout $a' \in A'$. Notant τ'' la greffe de τ' sur τ en a_0 et posant $A'' := (A \setminus \{a_0\}) \cup \{(a_0, a') \mid a' \in A'\}$, nous notons les délégations correspondantes $\delta'' = (\tau'', \{C_{a''} \mid a'' \in A''\})$ et $\delta' = (\tau', \{C_{(a_0, a')} \mid a' \in A'\})$. Nous avons alors, pour tout $\emptyset \neq B'' \subseteq A''$, l'équation suivante (appelée polydendriforme) (**quand** $q = -1$) :*

$$*_{B''}^{\tau''}(\delta'') = \begin{cases} *_{B''}^{\tau}(\{C_a \mid a \in A \setminus \{a_0\}\} \cup \{*\tau'(\delta')\}), & \text{si } B'' \subseteq A \setminus \{a_0\} \\ *_{B''}^{\tau}(\{C_a \mid a \in A \setminus \{a_0\}\} \cup \{*\tau'_{B'}(\delta')\}), & \text{si } B'' \not\subseteq A \setminus \{a_0\} \end{cases}'$$

où les exposants permettent de suivre les équipes correspondantes, et où, dans le second cas, $B = (B'' \cap (A \setminus \{a_0\})) \cup \{a_0\}$ et $B' = \{a' \in A' \mid (a_0, a') \in B''\}$. De plus, cette équation implique l'associativité du produit :

$$*^{\tau''}(\delta'') = *^{\tau}(\{C_a \mid a \in A \setminus \{a_0\}\} \cup \{*\tau'(\delta')\}).$$

Nous finissons cette section avec des exemples de clans semi-stricts qui ne sont pas stricts.

Exemple 4.4.22 (Simplexes). L'univers formé de tous les simplexes \mathbf{S}^X (pour un ensemble fini X) est associé à un clan semi-strict mais pas strict. Le produit s'écrit :

$$*(Y_1(\dots), Y_2(\dots), \dots, Y_n(\dots)) = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \llbracket n \rrbracket} \left(\bigcup_{j \in J} Y_j \right)(\dots),$$

où (...) désigne un uplet de singletons. △

Exemple 4.4.23 (Hypercubes). L'univers formé par les hypercubes \mathbf{C}^X est ordonné, et associé à un clan semi-strict. La structure tridendriforme correspondante s'instancie comme suit sur les mots de longueur n sur l'alphabet $\{+, -, \bullet\}$ (avec $|v|$ la longueur de v) :

$$\begin{aligned} u \prec v &= u(-|v|) \\ u \cdot (v_1 + v_2) &= u(-|v_1|) \bullet v_2 \\ u \succ (v_1 + v_2) &= \begin{cases} (u * v_1) + v_2 & (v_1 \neq \epsilon) \\ u + v_2 & (v_1 = \epsilon) \end{cases}. \end{aligned}$$

△

Exemple 4.4.24. La famille des érosoèdres est donnée par :

$$\mathbf{E}^X = \{\{x_j \mid j \neq i\} \mid 1 \leq i \leq n\},$$

où $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, et les constructions de \mathbf{E}^X ont deux formes possibles :

- $Y(z_1, \dots, z_k)$, où Y est un sous-ensemble de X de taille au moins 2, et
- $x(Y(z_1, \dots, z_k))$, où Y est un sous-ensemble arbitraire de X et x est un élément de X .

Dans le second cas, $Y(z_1, \dots, z_k)$ est une construction d'un simplexe et non d'un érosoèdre. Nous considérons donc l'univers formé par les érosoèdres et les simplexes. Si nous ordonnons X , nous obtenons alors un univers ordonné dans lequel les produits sur deux constructions S et T sont donnés par :

$$\begin{aligned} Y(z_1, \dots, z_k) \prec T &= Y(\dots) \\ x(Y(z_1, \dots, z_k)) \prec T &= x(Y(\dots)) + x(\text{root}(T)(\dots)) - x((Y \cup \text{root}(T))(\dots)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S \succ Y(z_1, \dots, z_k) &= Y(\dots) \\ S \succ x(Y(z_1, \dots, z_k)) &= x(Y(\dots)) + x(\text{root}(S)(\dots)) - x((Y \cup \text{root}(S))(\dots)) \end{aligned}$$

$$S \cdot T = (\text{root}(S) \cup \text{root}(T))(\dots)$$

où (\dots) désigne encore une fois un uplet de singletons. △

Exemple 4.4.25 (Cycloèdres). Pour un ensemble cycliquement ordonné $X = \{x_1 < \dots < x_n < x_1\}$, le polytope associé à l'hypergraphe

$$\mathbf{O}_X = \{\{x_1\}, \dots, \{x_n\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{n-1}, x_n\}, \{x_n, x_1\}, \{x_1, \dots, x_n\}\}$$

est appelé *cycloèdre* de dimension $(n - 1)$. L'univers formé des associaèdres et des cycloèdres est ordonné et associé à un clan semi-strict. △

4.5 Ordre sur les faces des nestoèdres

Nous nous plaçons dans cette section dans le cadre d'un univers ordonné, associé à un clan ordonné strict, comme introduit §4.4.3. Nous commençons par définir un ordre sur les faces de certains nestoèdres §4.5.1 avant de relier cet ordre au produit de battage §4.5.2.

4.5.1 Étendons l'ordre de Tamari et l'ordre de Bruhat faible

Curien et Laplante-Anfossi [CL24] ont conjecturé que l'ordre suivant est un ordre partiel sur les faces d'un nestoèdre associé à un hypergraphe fixé \mathbf{H} :

Définition 4.5.1. Considérons un hypergraphe ordonné \mathbf{H} et deux constructions S et T de \mathbf{H} . S est couverte par T , noté $S \leq T$, si et seulement si il existe

- deux sommets adjacents U et V de S tels que $\min U > \max V$, U est un parent de V et T peut être obtenu à partir de S en contractant l'arête entre U et V , ce qui fusionne ces sommets en un sommet unique $U \cup V$,
- ou deux sommets adjacents U et V de T tels que $\min U > \max V$, V est un parent de U et S peut être obtenu à partir de T en contractant l'arête entre U et V , ce qui fusionne ces sommets en un sommet unique $U \cup V$.

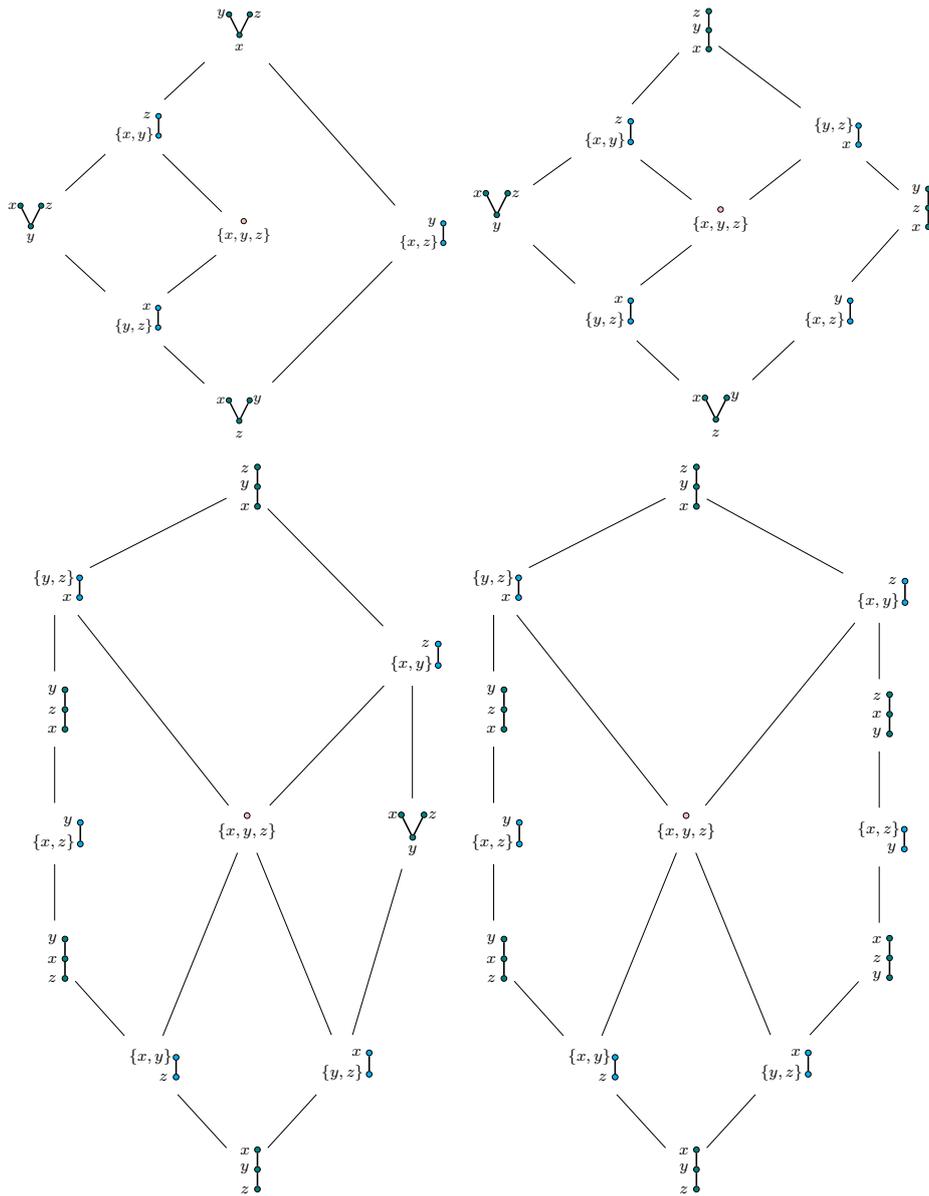


FIGURE 4.5.1 – Diagramme de Hasse des faces du simplexe (en haut à gauche), du cube (en haut à droite), du pentagone (en bas à gauche) et de l’hexagone (en bas à droite).

Dans le premier cas, nous appelons une telle relation de couverture *contraction* et la notons $(c_{U,V})$. Dans le deuxième cas, nous appelons une telle relation de couverture *partage* et la notons $(s_{U,V})$.

Nous notons \ll^+ (resp. \ll^*) la clôture transitive (resp. réflexive et transitive) de \ll .

Proposition 4.5.2. *La clôture réflexive et transitive \ll^* de \ll est un ordre partiel.*

Remarque 4.5.3. Cet ordre coïncide avec les ordres partiels définis sur les faces de l’associaèdre et du permutoèdre §4.1.1.

Exemple 4.5.4. Nous représentons sur la figure 4.5.1 le diagramme de Hasse de ces ordres partiels sur les faces des 4 différents polytopes d’hypergraphe en dimension 2. \triangle

Nous relierons par induction cet ordre avec l’opération de restriction définie §4.4.5 :

Lemme 4.5.5. *Soient S, S' deux constructions d’un hypergraphe \mathbf{H} satisfaisant $S \ll S'$ et K un hypergraphe dont l’ensemble des sommets est connexe dans \mathbf{H} , alors $S \ll^*_K S' \ll^*_K$.*

4.5.2 Lien entre ordre et produit de battage

Nous relient maintenant le produit de battage introduit §4.4.2 et l'ordre ci-dessus via les produits \diagup et \diagdown suivants :

Définition 4.5.6. Étant donnée une délégation ordonnée δ , avec $\max \delta_i < \min \delta_{i+1}$, nous définissons récursivement les deux opérations suivantes (qui correspondent chacune à une construction apparaissant dans le produit $*_B(\delta)$ pour $B = \{1\}$ et $B = \{d\}$ respectivement) :

$$\diagdown(\delta) = \text{root}(C_1) \left(\diagdown(\delta_1^{\{1\}}), \dots, \diagdown(\delta_{n_1}^{\{1\}}) \right) \quad (4.5.1)$$

$$\diagup(\delta) = \text{root}(C_d) \left(\diagup(\delta_1^{\{d\}}), \dots, \diagup(\delta_{n_d}^{\{d\}}) \right) \quad (4.5.2)$$

Proposition 4.5.7. Les produits \diagup et \diagdown sont associatifs.

Remarque 4.5.8. Ces produits définis sur l'associaèdres forment une algèbre dupliciale. Ce n'est cependant pas le cas en général. Par exemple, il peut être vérifié rapidement sur le permutoèdre que l'équation dupliciale mêlant \diagup et \diagdown n'est pas satisfaite. En effet, dans le permutoèdre, nous avons :

$$(1/2)\diagdown 3 = 2(1)\diagdown 3 = 2(1\diagdown 3) = 2(1(3)) \quad (4.5.3)$$

et

$$1\diagup(2\diagdown 3) = 1\diagup(2(3)) = 2(1\diagup 3) = 2(3(1)). \quad (4.5.4)$$

Ce contre-exemple s'adapte à tous les cas où le graphe considéré contient des arêtes entre deux sommets i et j non consécutifs.

Pour distinguer les différents produits de battage, nous écrivons :

$$*^{\lceil}(\delta) = \sum_{U:\mathbf{H} \text{ et } \forall a \in A, U_{\lceil \mathbf{H}_a} = C_a} q^{\mu^\tau(U)} U \quad (4.5.5)$$

$$*_B^{\lceil}(\delta) = \sum_{U:\mathbf{H}, \text{root}(U) = X_B \text{ et } \forall a \in A, U_{\lceil \mathbf{H}_a} = C_a} q^{\mu^\tau(U)} U \quad (4.5.6)$$

$$*^{\leq}(\delta) = \sum_{U:\mathbf{H} \text{ et } \diagup(\delta) \leq^* U \leq^* \diagdown(\delta)} q^{\mu^\tau(U)} U \quad (4.5.7)$$

$$*_B^{\leq}(\delta) = \sum_{U:\mathbf{H} \text{ et } \diagup^B(\delta) \leq^* U \leq^* \diagdown_B(\delta)} q^{\mu^\tau(U)} U, \quad (4.5.8)$$

où $\diagup^B(\delta)$ et $\diagdown_B(\delta)$ sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \diagup^B(\delta) &= (\sqcup_{b \in B} X_b) \left(\diagup(\delta_1^B), \dots, \diagup(\delta_{n_B}^B) \right) \\ \diagdown_B(\delta) &= (\sqcup_{b \in B} X_b) \left(\diagdown(\delta_1^B), \dots, \diagdown(\delta_{n_B}^B) \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant formuler le résultat principal de cette section :

Théorème 4.5.9. Considérant une délégation δ , les équations suivantes sont vérifiées :

$$*(\delta) \stackrel{1}{=} *^{\lceil}(\delta) \stackrel{2}{=} *^{\leq}(\delta) \quad (4.5.9)$$

$$*_B(\delta) \stackrel{1_B}{=} *_B^{\lceil}(\delta) \stackrel{2_B}{=} *_B^{\leq}(\delta) \quad (4.5.10)$$

4.6 Diagonale du permutoèdre

Cette section reprend les résultats obtenus avec Guillaume Laplante-Anfossi, Vincent Pilaud et Kurt Stoeckl et présentés dans l'article [Del+23]. La motivation de cet article est le calcul de la diagonale cellulaire du permutoèdre. Nous commencerons par introduire et motiver cette notion §4.6.1

4.6.1 Définitions de la diagonale et motivations

L'application diagonale "classique" (appelée aussi *diagonale fine*) sur un polytope P est l'application suivante $\Delta : P \rightarrow P \times P$, $x \mapsto (x, x)$. L'image de cette application ne s'écrit pas comme une union de faces du polytope $P \times P$. Il est cependant possible de déformer continûment celle-ci pour obtenir une application qui s'écrit comme union de faces du polytope : la diagonale cellulaire. De façon plus formelle, nous avons :

Définition 4.6.1. Une *diagonale cellulaire* d'un polytope P est une application homotopique à la diagonale fine $\Delta : P \rightarrow P \times P$, $x \mapsto (x, x)$, dont l'image est union de faces de $P \times P$.

Une telle diagonale existe toujours mais n'est pas forcément unique. Nous souhaitons de plus qu'elle vérifie des propriétés de cohérence afin de pouvoir former différentes opérations utiles en topologie algébrique et algèbre homotopique. Parmi les applications possibles, nous citerons la définition de cup-produits, c'est-à-dire un certain produit sur des groupes de cohomologie. C'est par exemple le cas pour la cohomologie singulière, grâce à la diagonale du simplexe (appelée application d'Alexander-Whitney) et pour la cohomologie cubique, grâce à la diagonale du cube (appelée application de Serre) [Ser51]. Les diagonales cellulaires permettent aussi de définir des produits tensoriels universels [LR13; Mar20] pour les opérades à homotopie près (diagonale des opérades [Lap22b]), pour les A_∞ -morphisms (diagonale du multiplièdre [LM23]) ainsi que pour les A_∞ -catégories (diagonale de l'associaèdre [Mas+21]). Enfin les diagonales cellulaires interviennent dans l'étude des espaces de lacets [SU04; Bau80].

Parmi les exemples cités ci-dessus, l'associaèdre fournit une illustration riche et élégante de diagonale maintenant bien comprise grâce à des travaux récents [SU04; MS06; SU22; Mas+21]. Dans [Mas+21], Masuda, Thomas, Tonks et Vallette ont exhibé une diagonale pour chaque associaèdre qui vérifie deux propriétés remarquables :

- Elles sont cohérentes avec les diagonales des associaèdres plus petits
- Elles satisfont la "formule magique" introduite par Jean-Louis Loday et vérifiée par la diagonale de Markl et Shnider [MS06] : les faces dans l'image de la diagonale sont les paires de faces comparables dans l'ordre de Tamari

$$(U, V) \in \Delta_{assoc} \Leftrightarrow \max(U) \leq_{\text{Tamari}} \min(V) \quad (4.6.1)$$

Cette formule magique a récemment mené à de nouveaux résultats énumératifs sur les intervalles de Tamari [BCP23].

Reprenant les méthodes développées dans [Mas+21], Guillaume Laplante-Anfossi [Lap22b] a développé une théorie générale des diagonales pour n'importe quel polytope et développé le cas des opérades (qui encodent les opérades à homotopie près) et des multiplièdres (qui encodent les A_∞ -morphisms). Ceux-ci ne vérifient pas de "formule magique" comme ci-dessus mais sont des permutoèdres généralisés [Pos09], dont la diagonale est entièrement

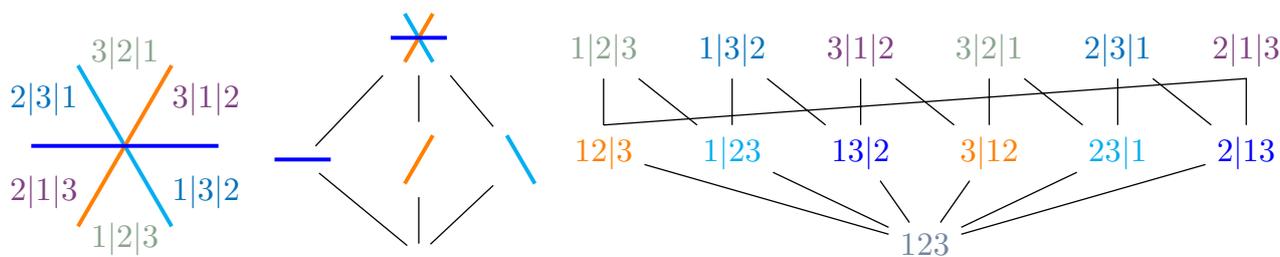


FIGURE 4.6.1 – L’arrangement de tresses \mathcal{B}_3 (gauche), son treillis des plats $\text{Fl}(\mathcal{B}_3)$ (milieu), et son poset des faces $^{\text{Assoc}}\Pi_n$ (droite).

déterminée par la diagonale du permutoèdre : c’est ce qui a motivé l’étude apparaissant dans [Del+23] et résumée ici.

La première construction de diagonale pour le permutoèdre est celle de Saneblidze et Umble [SU04]. Laplante-Anfossi a proposé une construction de cette diagonale dans [Lap22b] s’appuyant sur les méthodes développées dans [Mas+21] et provenant de Fulton et Sturmfels [FS97]. Nous partons ici de cette deuxième construction et montrons qu’elle coïncide avec celle de Saneblidze et Umble. Nous renvoyons le lecteur à la thèse de Guillaume Laplante-Anfossi [Lap22a] qui offre une couverture très complète et détaillée de ce sujet. Les conséquences topologiques de l’étude de la diagonale du permutoèdre sont développées plus en détail dans la troisième partie de [Del+23]. Nous nous attacherons ici plutôt à la présentation de la combinatoire sous-jacente.

4.6.2 Description de l’arrangement de tresses multiples

Comme le dual du permutoèdre $\text{Perm}(n)$ est l’arrangement de tresses \mathcal{B}_n , le dual d’une diagonale du permutoèdre $\text{Perm}(n)$ est un arrangement d’hyperplans \mathcal{B}_n^2 constitué de deux copies génériquement translatées de l’arrangement de tresses \mathcal{B}_n . Nous nous sommes donc attachés, dans la première partie de [Del+23], à l’étude de la combinatoire des (ℓ, n) -arrangements de tresses \mathcal{B}_n^ℓ , définis comme l’union de ℓ copies de l’arrangement de tresses génériquement translatées. L’étude nécessaire pour l’étude de la diagonale du permutoèdre est celle pour $\ell = 2$, mais le cas général n’est pas plus complexe et correspond algébriquement à l’énumération des faces des ℓ -gonales cellulaires du permutoèdre $\text{Perm}(n)$. Nous décrivons dans cette section les arrangements d’hyperplans considérés.

L’arrangement de tresses

Nous rappelons brièvement la combinatoire de l’arrangement de tresse. La figure 4.6.1 représente cet arrangement pour $n = 3$.

Définition 4.6.2. Soit $n \geq 1$, l’arrangement de tresses \mathcal{B}_n est l’arrangement d’hyperplans

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_s = x_t\}$$

pour tout $1 \leq s < t \leq n$.

La combinatoire de l’arrangement de tresses est bien connue et fait à la fois intervenir des partitions (d’ensemble) ordonnées et non ordonnées. Les faces de dimension k de l’arrangement de tresses \mathcal{B}_n sont en bijection avec les compositions d’ensembles $\vec{\pi}$ de $[[n]]$ en $k + 1$ parts, ou de manière équivalente, avec les surjections de $[[n]]$ dans $[k + 1]$. Le treillis des

faces $\text{Fa}(\mathcal{B}_n)$ est alors le poset $^{\text{Assoc}}\Pi_n$ défini dans la section 2.6.2 et représenté à droite de la figure 4.6.1.

Les plats de dimension k de l'arrangement de tresses \mathcal{B}_n sont en bijection avec les partitions π de $\llbracket n \rrbracket$ en $k + 1$ parts. Le treillis des plats $\text{Fl}(\mathcal{B}_n)$ est alors isomorphe au poset des partitions de $\llbracket n \rrbracket$, Π_n (présenté à la section 1.2). Nous représentons sur la figure 4.6.1 le treillis des plats de l'arrangement de tresses \mathcal{B}_3 .

Le polynôme de Möbius de l'arrangement de tresses \mathcal{B}_n (voir §2.1.4) est donné par

$$\mu_{\mathcal{B}_n}(x, y) = \sum_{k \in \llbracket n \rrbracket} x^{k-1} S(n, k) \prod_{i \in [k-1]} (y - i),$$

où $S(n, k)$ est le nombre de Stirling de seconde espèce [OEI24, A008277], c'est-à-dire le nombre de partitions de $\llbracket n \rrbracket$ en k parts. Par exemple,

$$\mu_{\mathcal{B}_1}(x, y) = 1$$

$$\mu_{\mathcal{B}_2}(x, y) = xy - x + 1 = x(y - 1) + 1$$

$$\mu_{\mathcal{B}_3}(x, y) = x^2y^2 - 3x^2y + 2x^2 + 3xy - 3x + 1 = x^2(y - 1)(y - 2) + 3x(y - 1) + 1$$

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{B}_4}(x, y) &= x^3y^3 - 6x^3y^2 + 11x^3y - 6x^3 + 6x^2y^2 - 18x^2y + 12x^2 + 7xy - 7x + 1 \\ &= x^3(y - 1)(y - 2)(y - 3) + 6x^2(y - 1)(y - 2) + 7x(y - 1) + 1. \end{aligned}$$

En particulier, le polynôme caractéristique de l'arrangement de tresses \mathcal{B}_n est donné par

$$\chi_{\mathcal{B}_n}(y) = y(y - 1)(y - 2) \dots (y - n - 1).$$

On considérera enfin l'évaluation du polynôme de Möbius $\mu_{\mathcal{B}_n}(x, y)$ en $y = 0$:

$$\pi_{\mathcal{A}}(x) \llbracket n \rrbracket := \mu_{\mathcal{B}_n}(x, 0) = \sum_{k \in \llbracket n \rrbracket} (-1)^{k-1} (k - 1)! S(n, k) x^{k-1}.$$

Les coefficients de ce polynôme sont donnés par la suite [OEI24, A028246] et se relie au f -polynôme de \mathcal{B}_n . La formule récursive des nombres de Stirling $S(n + 1, k) = k S(n, k) + S(n, k - 1)$ pour $0 < k \leq n$ implique l'égalité

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (k - 1)! S(n, k) x^{k-1} = (1 - x) \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} k! S(n - 1, k) x^{k-1}.$$

qui se réécrit comme :

Lemme 4.6.3 ([Del+23]). $\pi_{\mathcal{A}}(x) \llbracket n \rrbracket = (1 - x) f_{\mathcal{B}_n}(x)$.

Le (ℓ, n) -arrangement de tresses

Nous nous intéressons maintenant à l'arrangement d'hyperplans obtenus avec ℓ copies de l'arrangement de tresses \mathcal{B}_n en position générique. Nous représentons sur la figure 4.6.2 ces arrangements pour $n = 3$.

Définition 4.6.4. Le (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ est l'arrangement obtenu comme union de ℓ copies de l'arrangement de tresses \mathcal{B}_n génériquement translatées (de manière à ce que les hyperplans restent disjoints).

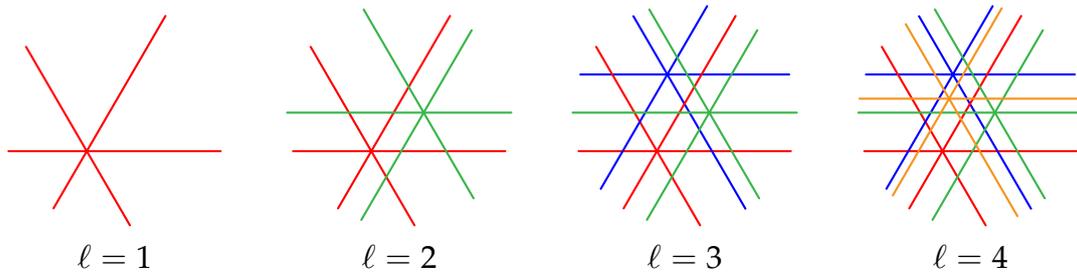


FIGURE 4.6.2 – Les $(\ell, 3)$ -arrangements de tresses pour $\ell \in \llbracket 4 \rrbracket$. ©Image de Vincent Pilaud

Cette définition peut porter à confusion puisque le (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ dépend à priori du vecteur de translation (générique) choisi pour chaque copie. Nous verrons que beaucoup d'aspects combinatoires de \mathcal{B}_n^ℓ sont en fait indépendant du choix de vecteur de translation, tant qu'il est générique, en particulier son treillis des plats et ses polynôme de Möbius, f -polynôme et b -polynôme. Cependant, la description combinatoire du treillis des faces de \mathcal{B}_n^ℓ dépend de ce vecteur de translations, comme illustré sur les figures 4.6.3 et 4.6.4. Dans [Del+23], nous décrivons la combinatoire du treillis des faces $\text{Fa}(\mathcal{B}_n^\ell(\mathbf{a}))$ d'un \mathbf{a} -arrangement de tresses $\mathcal{B}_n^\ell(\mathbf{a})$ en termes de forêts de partitions ordonnées. Pour un choix de \mathbf{a} , nous décrivons la forêt de (ℓ, n) -partitions ordonnées avec une forêt de (ℓ, n) -partitions (non ordonnées) sous-jacente et donnons un critère pour décider si une forêt de (ℓ, n) -partitions ordonnée correspond à une face de $\mathcal{B}_n^\ell(\mathbf{a})$.

Remarque 4.6.5. Chaque hyperplan du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ est orthogonal à une racine $e_i - e_j$ d'un système de racine de type A . Plusieurs arrangements de ce type ont déjà été étudiés, par exemple l'arrangement de *Shi* [Shi86; Shi87], l'arrangement de *Catalan* [PS00, Sect. 7], l'arrangement *Linial* [PS00, Sect. 8], l'arrangement *générique* de [PS00, Sect. 5], ou les arrangements *discriminantaux* de [MS89; BB97] (voir [PS00] et [Ber18] pour plus de références). Cependant, dans tous ces exemples, ou bien les copies de l'arrangement de tresses sont perturbés, ou bien ils sont translatés de manière non générique.

J'ai choisi de développer dans ce manuscrit l'étude du treillis des plats des (ℓ, n) -arrangements de tresses.

4.6.3 Treillis des plats et énumérations

Dans cette section, nous donnons une description combinatoire du treillis des plats $\text{Fl}(\mathcal{B}_n^\ell)$ du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ en termes de (ℓ, n) -forêts de partitions et (ℓ, n) -forêt multicolore étiquetée. Cela nous permet de calculer les f -polynôme, b -polynôme et polynôme de Möbius et d'extraire des formules pour les nombres de régions et de sommets du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ .

Forêts de partitions

Nous introduisons d'abord les principaux protagonistes de cette section, qui décrivent la combinatoire du treillis des plats.

Définition 4.6.6. L'*hypergraphe d'intersection* d'un ℓ -uplet $\mathbf{F} := (F_1, \dots, F_\ell)$ de partitions de $\llbracket n \rrbracket$ est l'hypergraphe ℓ -régulier ℓ -parti dont les sommets sont les parts des partitions F_i pour $i \in \llbracket \ell \rrbracket$, avec une arête connectant les parts contenant j pour chaque $j \in \llbracket n \rrbracket$.

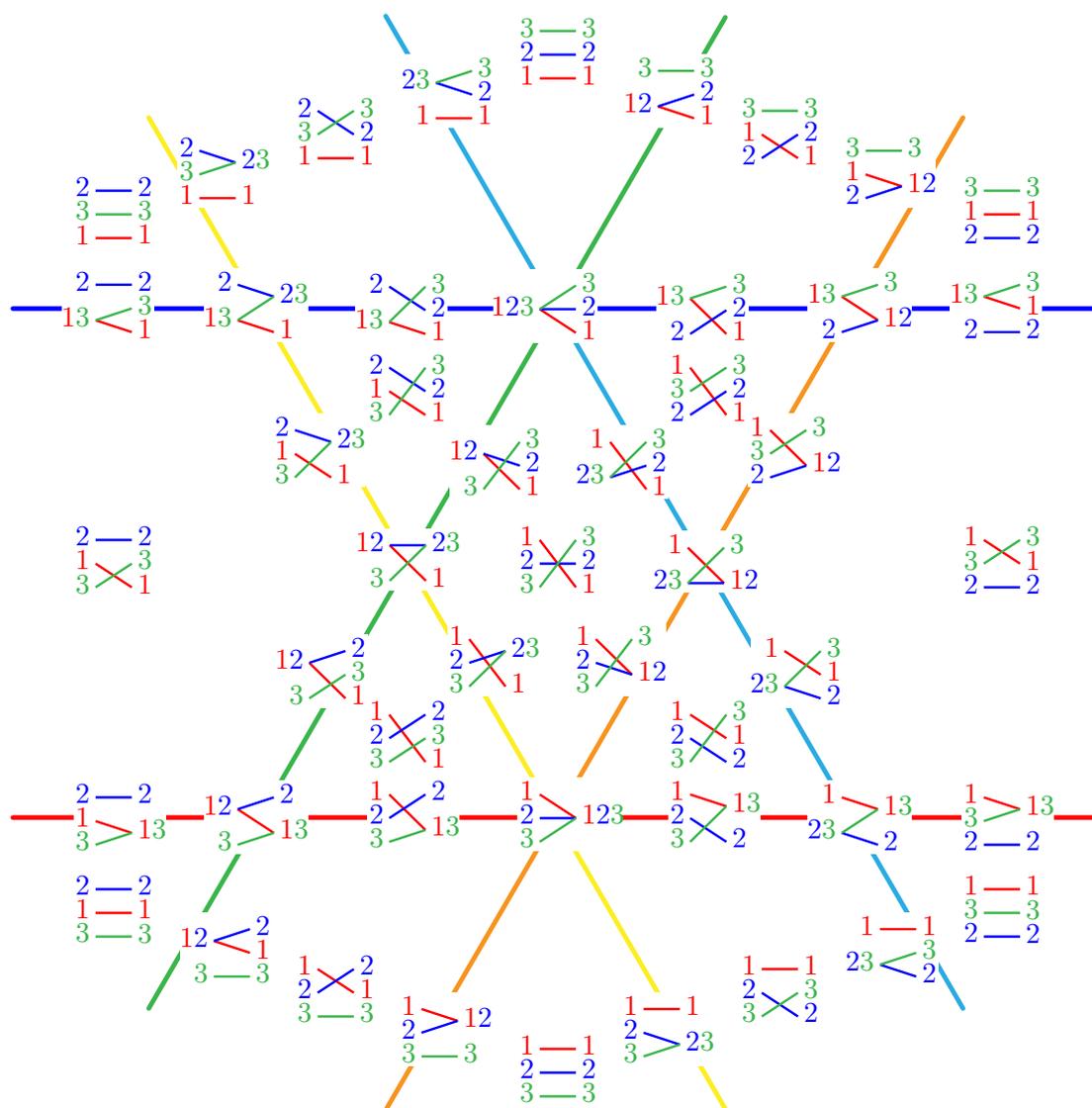


FIGURE 4.6.3 – Étiquetage des faces de l'arrangement $\mathcal{B}_3^2(a)$ pour $a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

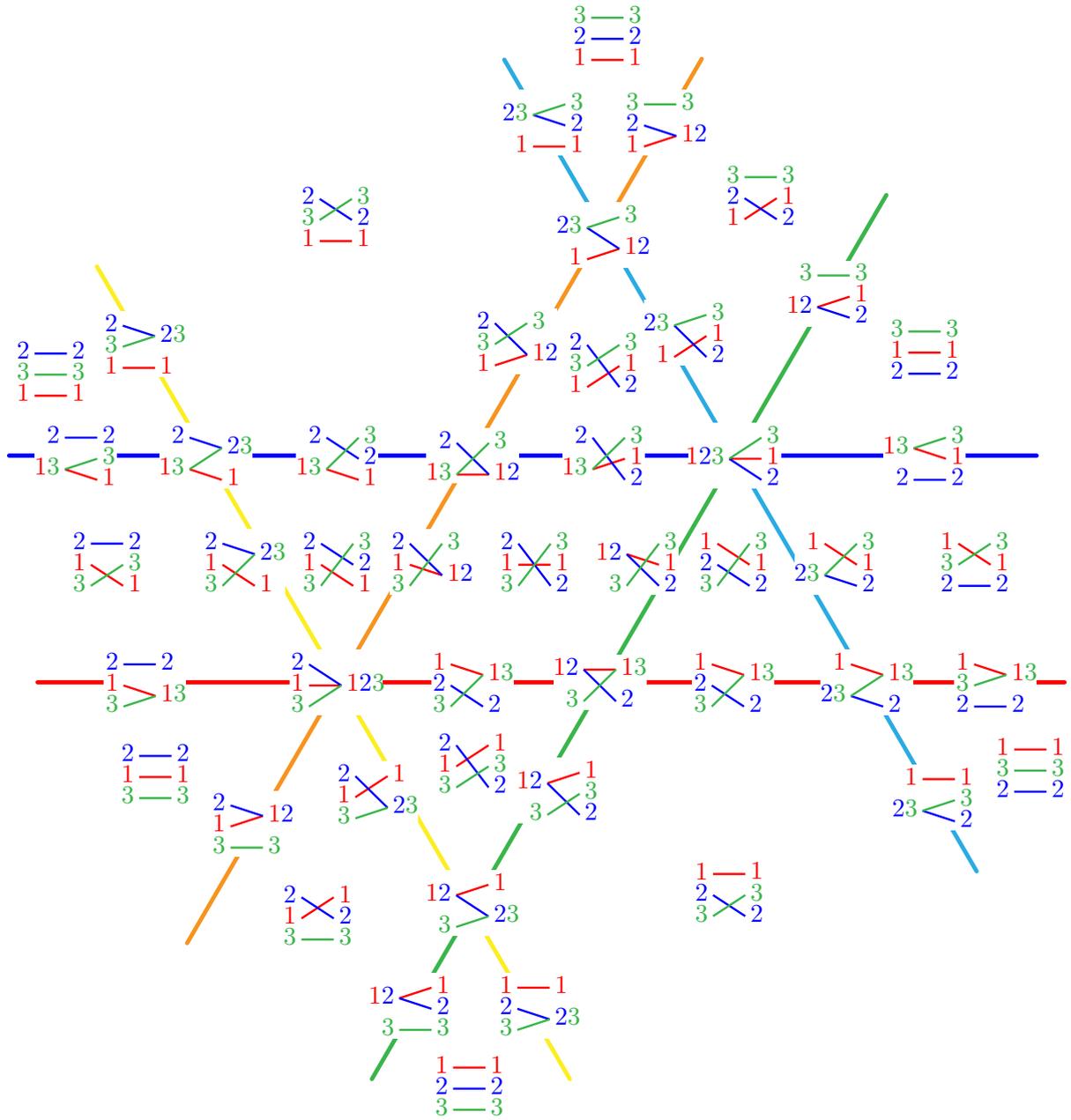


FIGURE 4.6.4 – Étiquetage des faces de l'arrangement $\mathcal{B}_3^2(\mathbf{a})$ pour $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Définition 4.6.7. Une (ℓ, n) -forêt de partitions (resp. (ℓ, n) -arbre de partitions) est un ℓ -uplet $F := (F_1, \dots, F_\ell)$ de partitions de $\llbracket n \rrbracket$ dont l'hypergraphe d'intersection est une hyperforêt (resp. un hyperarbre) (voir figure 4.6.5). La dimension de F est $\dim(F) := n - 1 - \ell n + \sum_{i \in \llbracket \ell \rrbracket} \#F_i$. Le poset des (ℓ, n) -forêts de partitions est le poset Φ_n^ℓ sur les (ℓ, n) -forêts de partition, ordonné par raffinement. Ses éléments maximaux sont les (ℓ, n) -arbres de partitions.

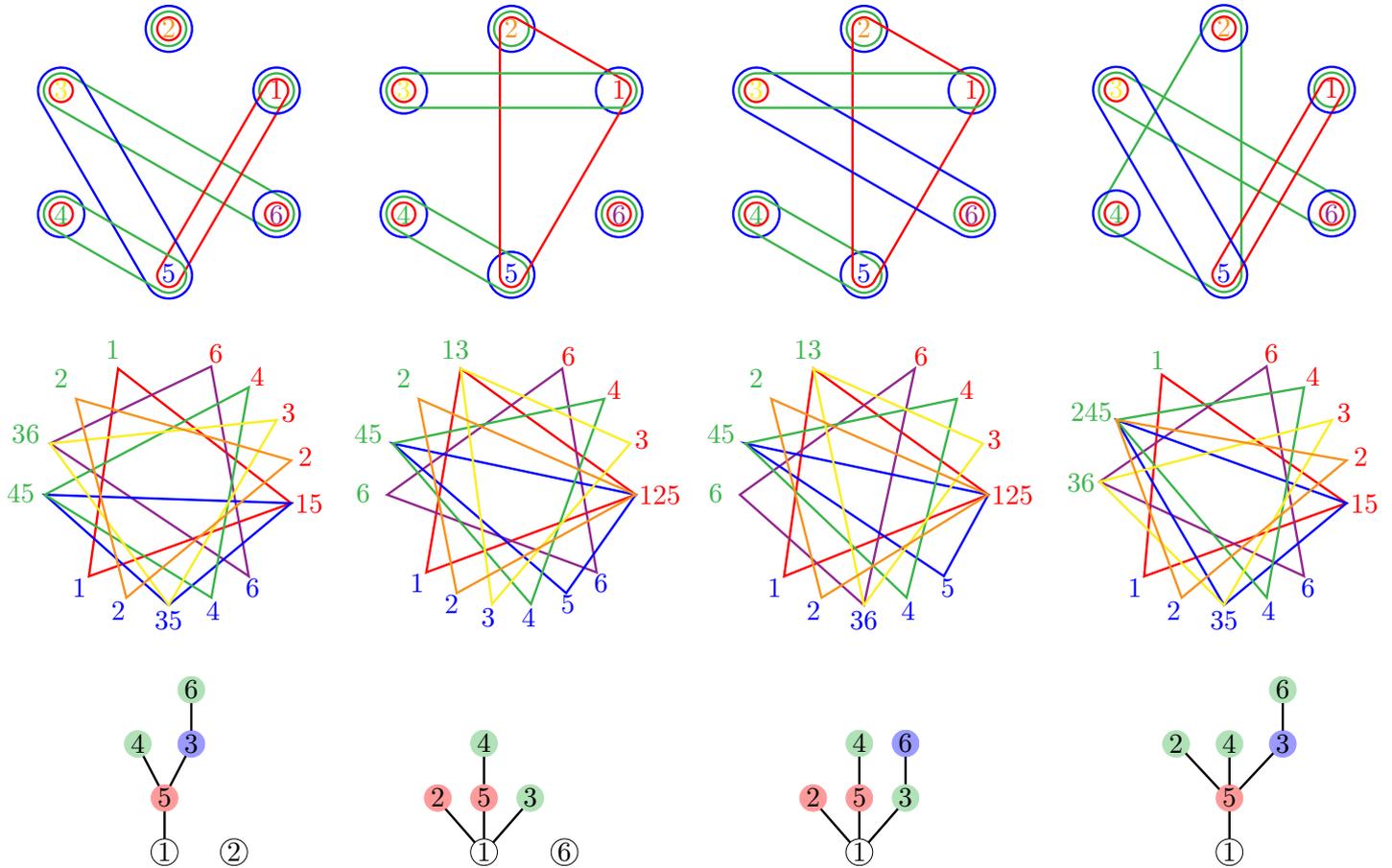


FIGURE 4.6.5 – Quatre $(3, 6)$ -forêts de partitions (haut) avec leurs hypergraphes d'intersection (milieu) et les $(3, 6)$ -forêts multicolores étiquetées correspondantes (bas). Les deux dernières sont des arbres. L'ordre des couleurs sur la dernière image est rouge, vert puis bleu. ©Image de Vincent Pilaud

Le treillis des plats du $(2, 3)$ -arrangement de tresses est représenté sur la figure 4.6.6.

Proposition 4.6.8 ([Del+23]). *Le treillis des plats $\text{Fl}(\mathcal{B}_n^\ell)$ du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ est isomorphe au poset des (ℓ, n) -forêts de partitions.*

Polynôme de Möbius

Nous calculons maintenant le polynôme de Möbius du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ .

Théorème 4.6.9 ([Del+23]). *Le polynôme de Möbius du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ est donné par*

$$\mu_{\mathcal{B}_n^\ell}(x, y) = x^{n-1-\ell n} y^{n-1-\ell n} \sum_{F \leq G} \prod_{i \in \llbracket \ell \rrbracket} x^{\#F_i} y^{\#G_i} \prod_{p \in G_i} (-1)^{\#F_i[p]-1} (\#F_i[p] - 1)!,$$

où $F \leq G$ parcourt l'ensemble des intervalles du poset des (ℓ, n) -forêts de partitions Φ_n^ℓ , et $F_i[p]$ est la restriction de la partition F_i à la part p de G_i .

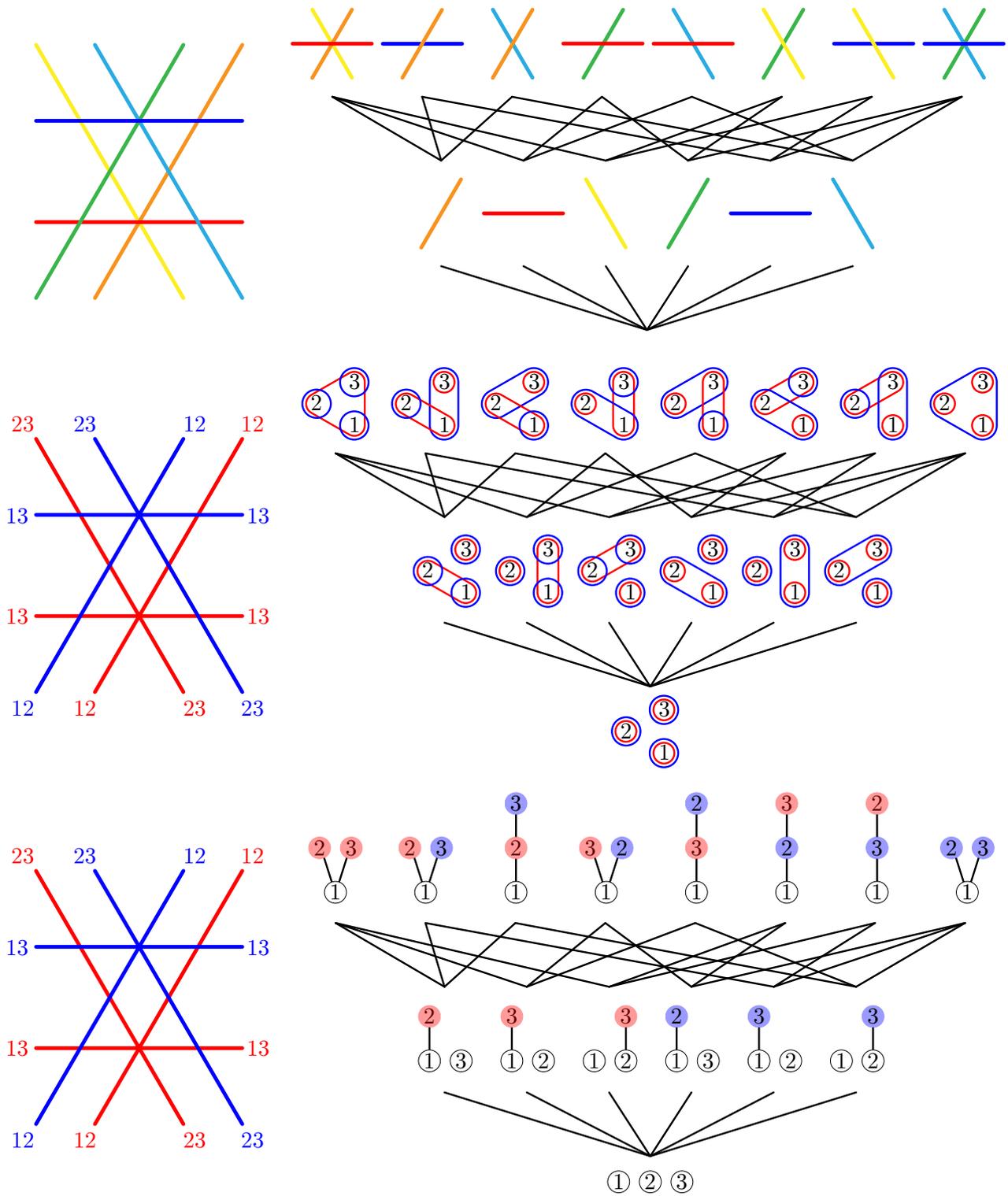


FIGURE 4.6.6 – Le $(2,3)$ -arrangement de tresses B_3^2 (gauche), et son treillis des plats (droite), où les plats sont représentés comme des intersections d'hyperplans (haut), comme des $(2,3)$ -forêts de partitions (milieu), et comme des $(2,3)$ -forêts multicolore étiquetées (bas).
 ©Image de Vincent Pilaud

$n \setminus k$	0	1	2	3	Σ
1	1				1
2	2	1			3
3	6	6	1		13
4	24	36	14	1	75

$n \setminus k$	0	1	2	3	Σ
1	1				1
2	0	1			1
3	0	0	1		1
4	0	0	0	1	1

$\ell = 1$

$n \setminus k$	0	1	2	3	Σ
1	1				1
2	3	2			5
3	17	24	8		49
4	149	324	226	50	749

$n \setminus k$	0	1	2	3	Σ
1	1				1
2	1	2			3
3	5	12	8		25
4	43	132	138	50	363

$\ell = 2$

$n \setminus k$	0	1	2	3	Σ
1	1				1
2	4	3			7
3	34	54	21		109
4	472	1152	924	243	2791

$n \setminus k$	0	1	2	3	Σ
1	1				1
2	2	3			5
3	16	36	21		73
4	224	684	702	243	1853

$\ell = 3$

$n \setminus k$	0	1	2	3	Σ
1	1				1
2	5	4			9
3	57	96	40		193
4	1089	2808	2396	676	6969

$n \setminus k$	0	1	2	3	Σ
1	1				1
2	3	4			7
3	33	72	40		145
4	639	1944	1980	676	5239

$\ell = 4$

TABLE 4.1 – Le nombre de faces (haut) et de faces bornées (bas) du (ℓ, n) -arrangement de tresses pour $\ell, n \in [4]$.

En utilisant le polynôme

$$\pi_{\mathcal{A}}(x)[[n]] := \mu_{\mathcal{B}_n}(x, 0) = \sum_{k \in [n]} (-1)^{k-1} (k-1)! S(n, k) x^{k-1}$$

introduit à la fin de 4.6.2, le polynôme de Möbius $\mu_{\mathcal{B}_n^\ell}(x, y)$ s'écrit aussi comme suit.

Proposition 4.6.10 ([Del+23]). *Le polynôme de Möbius du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ est donné par*

$$\mu_{\mathcal{B}_n^\ell}(x, y) = x^{(n-1)(1-\ell)} \sum_{G \in \Phi_n^\ell} y^{n-1-\ell n + \sum_{i \in [\ell]} \#G_i} \prod_{i \in [\ell]} \pi_{\#G_i}(x).$$

En utilisant le théorème de Zaslavsky 2.1.15 et l'expression du polynôme de Möbius du théorème 4.6.9, nous obtenons le nombre de faces et le nombre de faces bornées de \mathcal{B}_n^ℓ , dont les premières valeurs sont rassemblées dans les tableaux de la table 4.1.

Corollaire 4.6.11 ([Del+23]). *Les f -polynôme et b -polynôme du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ sont donnés par*

$$f_{\mathcal{B}_n^\ell}(x) = x^{n-1-\ell n} \sum_{F \leq G} \prod_{i \in [\ell]} x^{\#F_i} \prod_{p \in G_i} (\#F_i[p] - 1)!$$

et

$$b_{\mathcal{B}_n^\ell}(x) = (-1)^\ell x^{n-1-\ell n} \sum_{F \leq G} \prod_{i \in [\ell]} x^{\#F_i} \prod_{p \in G_i} -(\#F_i[p] - 1)!,$$

où $F \leq G$ parcourt les intervalles du poset des (ℓ, n) -forêts de partitions Φ_n^ℓ , et $F_i[p]$ est la restriction de la partition F_i à la part p de G_i .

Exemples 4.6.12. Pour $n = 1$, nous avons

$$\mu_{\mathcal{B}_1^\ell}(x, y) = f_{\mathcal{B}_1^\ell}(x) = \mathbf{b}_{\mathcal{B}_1^\ell}(x) = 1.$$

Pour $n = 2$, nous avons

$$\mu_{\mathcal{B}_2^\ell}(x, y) = xy - \ell x + \ell, \quad f_{\mathcal{B}_2^\ell}(x) = (\ell + 1)x + \ell \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_{\mathcal{B}_2^\ell}(x) = (\ell - 1)x + \ell.$$

Le cas $n = 3$ est déjà plus riche. Nous avons

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{B}_3^\ell}(x, y) &= x^2 y^2 - 3\ell x^2 y + \ell(3\ell - 1)x^2 + 3\ell xy - 3\ell(2\ell - 1)x + \ell(3\ell - 2), \\ f_{\mathcal{B}_3^\ell}(x) &= (3\ell^2 + 2\ell + 1)x^2 + 6\ell^2 x + \ell(3\ell - 2), \\ \text{and} \quad \mathbf{b}_{\mathcal{B}_3^\ell}(x) &= (3\ell^2 - 4\ell + 1)x^2 + 6\ell(\ell - 1)x + \ell(3\ell - 2). \end{aligned}$$

On peut observer que $3\ell^2 + 2\ell + 1$ est [OEI24, A056109], que $\ell(3\ell - 2)$ est [OEI24, A000567], et que $3\ell^2 - 4\ell + 1$ est [OEI24, A045944]. \triangle

Forêts multicolores

Pour obtenir des formules plus explicites pour le nombre de sommets et de régions du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ , nous introduisons un dernier modèle combinatoire, plus adapté à l'énumération.

Définition 4.6.13. Un ℓ -coloriage d'une forêt enracinée plane F est un choix d'une couleur de $[\ell]$ pour tout sommet non racine de F tel que

1. les deux extrémités d'une arête sont de couleurs différentes,
2. les couleurs des frères augmentent de gauche à droite.

Nous notons $\|F\|$ le nombre de nœuds de F et $\#F$ le nombre d'arbres (de composantes connexes donc) dans la forêt F . Une (ℓ, n) -forêt multicolore (resp. arbre) est une forêt (resp. un arbre) ℓ -coloriée avec $\|F\| = n$ nœuds. Nous notons Ψ_n^ℓ (resp. T_n^ℓ) l'ensemble des (ℓ, n) -forêts (resp. arbres) multicolores, et l'ensemble $\Psi^\ell := \bigsqcup_n \Psi_n^\ell$ (resp. $T_n^\ell := \bigsqcup_n T_n^\ell$).

Par exemple, nous listons sur la figure 4.6.7 (haut), l'ensemble des 14 $(2, 4)$ -arbres multicolores. Cette figure illustre la bijection entre ℓ -arbres multicolores et arbres ℓ -aires. Ces derniers sont comptés par les nombres de Fuss-Catalan [Kla70; HP91].

Lemme 4.6.14 ([Del+23]). Les (ℓ, m) -arbres multicolores sont comptés par les nombres de Fuss-Catalan

$$|T_m^\ell| = F_{\ell, m} := \frac{1}{(\ell - 1)m + 1} \binom{\ell m}{m} \quad [\text{OEI24, A062993}].$$

Remarque 4.6.15. La fonction génératrice associée $F_\ell(z) := \sum_{m \geq 0} F_{\ell, m} z^m$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$F_\ell(z) = 1 + z F_\ell(z)^\ell.$$

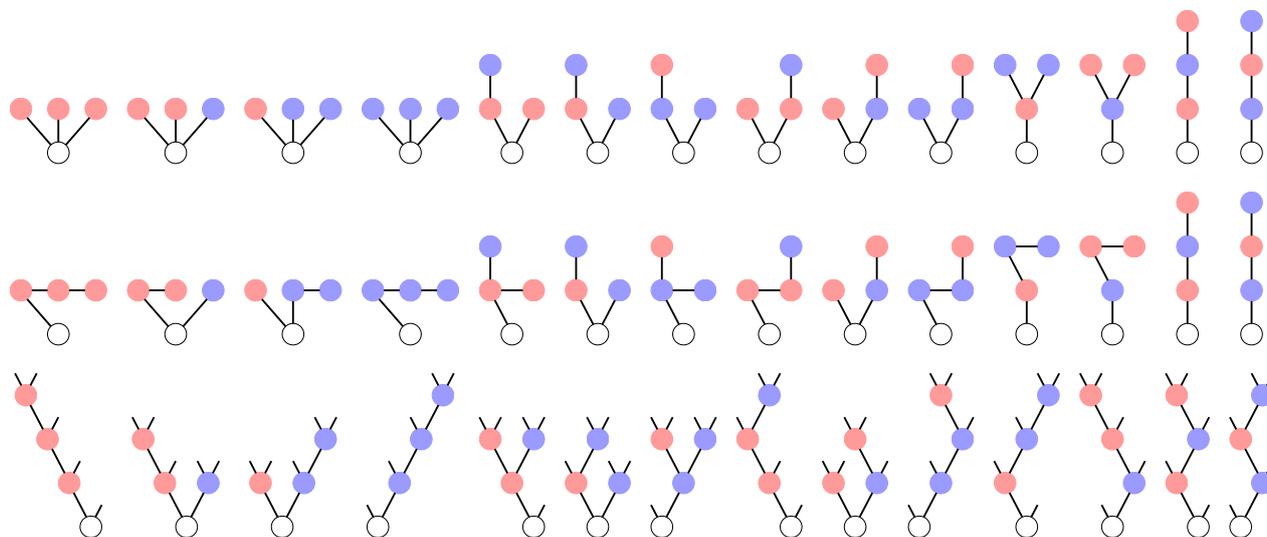


FIGURE 4.6.7 – Les 14 $(2,4)$ -arbres multicolores (haut), les 14 arbres binaires (bas), et la bijection les reliant (milieu). L'ordre des couleurs est rouge puis bleu.

$m \setminus \ell$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	5	12	22	35	51	70	92	117
4	1	14	55	140	285	506	819	1240	1785
5	1	42	273	969	2530	5481	10472	18278	29799
6	1	132	1428	7084	23751	62832	141778	285384	527085
7	1	429	7752	53820	231880	749398	1997688	4638348	9706503
8	1	1430	43263	420732	2330445	9203634	28989675	77652024	184138713
9	1	4862	246675	3362260	23950355	115607310	430321633	1329890705	3573805950

TABLE 4.2 – Les nombres de Fuss-Catalan $F_{\ell,m} = \frac{1}{(\ell-1)m+1} \binom{\ell m}{m}$ pour $\ell, m \in [9]$. See [OEI24, A062993].

Définition 4.6.16. Étant donnée une (ℓ, n) -forêt multicolore F , nous définissons

$$\omega(F) := \prod_{i \in [\ell]} \prod_{N \in F} \#C_i(N)!,$$

où N parcourt l'ensemble des nœuds de F et $C_i(N)$ est l'ensemble des enfants de N colorés par i .

Définition 4.6.17. Un *étiquetage* d'une (ℓ, n) -forêt multicolore F est une bijection des sommets de F vers $[[n]]$ telle que

1. l'étiquetage de chaque racine est minimale dans sa composante connexe,
2. l'étiquetage de frères de même couleur augmente de gauche à droite.

Le nombre de tels étiquetages est compté par une formule de type "formule des équerres" :

Lemme 4.6.18 ([Del+23]). *Le nombre $\lambda(F)$ d'étiquetages d'une (ℓ, n) -forêt multicolore F est donné par*

$$\lambda(F) = \frac{n!}{\omega(F) \prod_{T \in F} \|T\|}.$$

La proposition suivante est illustrée sur la figure 4.6.5.

Proposition 4.6.19 ([Del+23]). *Il y a une bijection des (ℓ, n) -forêts de partitions vers les (ℓ, n) -forêts multicolores étiquetées, telle que si la forêt de partition F est envoyée sur la forêt multicolore étiquetée F , alors*

$$\dim(F) = \#F - 1 \quad \text{et} \quad \mu_{\Phi_n^\ell}(\mathbb{H}, F) = (-1)^{n-\#F} \omega(F).$$

Nous reformulons finalement la proposition 4.6.10 en termes d'arbres multicolores.

Proposition 4.6.20 ([Del+23]). *Le polynôme de Möbius polynomial du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ est donné par*

$$\mu_{\mathcal{B}_n^\ell}(x, y) = x^{(n-1)(1-\ell)} \sum_{G \in \Psi_n^\ell} y^{n-1+\#E(G)} \prod_{i \in [\ell]} \pi_{n-\#E(G,i)}(x).$$

Remarque 4.6.21. Pour simplifier encore plus cette expression, nous aurions besoin de compter les forêts multicolores avec un nombre fixé d'arêtes de chaque couleur. Cependant, il nous semble que ce nombre n'admet pas de formule multiplicative connue. Quand il y a une seule couleur, la suite correspondante (comptant les forêts sur n nœuds et k arêtes, enraciné en l'étiquette minimale de chaque composante connexe) est [OEI24, A138464].

Énumération des régions et des régions bornées de \mathcal{B}_n^ℓ

Nous utilisons maintenant les (ℓ, n) -forêts multicolores étiquetées du paragraphe précédent pour obtenir des formules plus explicites pour le nombre de sommets, de régions et de régions bornées du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ . Les premières valeurs pour le nombre de sommets sont rassemblées dans la table 4.3. Les premières valeurs pour le nombre de régions et de régions bornées sont rassemblées dans les tables 4.4 et 4.5.

En appliquant un code de Prüfer coloré aux (ℓ, n) -arbres multicolores étiquetés, nous obtenons :

$n \setminus \ell$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	8	21	40	65	96	133	176
4	1	50	243	676	1445	2646	4375	6728
5	1	432	3993	16384	46305	105456	208537	373248
6	1	4802	85683	521284	1953125	5541126	13119127	27350408
7	1	65536	2278125	20614528	102555745	362797056	1029059101	2500000000
8	1	1062882	72412707	976562500	6457339845	28500625446	96889010407	274371577992

TABLE 4.3 – Nombre $f_0(\mathcal{B}_n^\ell) = \ell((\ell - 1)n + 1)^{n-2}$ de sommets de \mathcal{B}_n^ℓ pour $\ell, n \in [8]$.

$n \setminus \ell$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	5	6	7	8	9
3	6	17	34	57	86	121	162	209
4	24	149	472	1089	2096	3589	5664	8417
5	120	1809	9328	29937	73896	154465	287904	493473
6	720	28399	241888	1085157	3442816	8795635	19376064	38323753
7	5040	550297	7806832	49075065	200320816	625812385	1629858672	3720648337
8	40320	12732873	302346112	2666534049	14010892416	53536186825	164859458688	434390214657

TABLE 4.4 – Nombres $f_{n-1}(\mathcal{B}_n^\ell)$ de régions de \mathcal{B}_n^ℓ pour $\ell, n \in [8]$.

$n \setminus \ell$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	2	3	4	5	6	7
3	0	5	16	33	56	85	120	161
4	0	43	224	639	1384	2555	4248	6559
5	0	529	4528	17937	49696	111745	219024	389473
6	0	8501	120272	663363	2354624	6455225	14926176	30583847
7	0	169021	3968704	30533409	138995776	464913325	1268796096	2996735329
8	0	4010455	156745472	1684352799	9841053184	40179437975	129465630720	352560518527

TABLE 4.5 – Nombres $b_{n-1}(\mathcal{B}_n^\ell)$ de régions bornées de \mathcal{B}_n^ℓ pour $\ell, n \in [8]$.

Théorème 4.6.22 ([Del+23]). *Le nombre de sommets du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ est*

$$f_0(\mathcal{B}_n^\ell) = \ell((\ell - 1)n + 1)^{n-2}.$$

Il est possible de raffiner la formule du théorème 4.6.22 suivant la dimension des plats des différentes copies s'intersectant pour obtenir le nombre de sommets du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ .

Théorème 4.6.23 ([Del+23]). *Pour tous k_1, \dots, k_ℓ tels que $0 \leq k_i \leq n - 1$ pour $i \in \llbracket \ell \rrbracket$ et $\sum_{i \in \llbracket \ell \rrbracket} k_i = n - 1$, le nombre de sommets v du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ tels que le plus petit plat de la $i^{\text{ème}}$ copie de \mathcal{B}_n contenant v soit de dimension $n - k_i - 1$ est donné par*

$$n^{\ell-1} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_\ell} \prod_{i \in \llbracket \ell \rrbracket} (n - k_i)^{k_i-1}.$$

Avant de donner des formules pour l'énumération des régions et des régions bornées de \mathcal{B}_n^ℓ , nous calculons son polynôme caractéristique.

Théorème 4.6.24 ([Del+23]). *Le polynôme caractéristique $\chi_{\mathcal{B}_n^\ell}(y)$ du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ est donné par*

$$\chi_{\mathcal{B}_n^\ell}(y) = \frac{(-1)^n n!}{y} [z^n] \exp \left(- \sum_{m \geq 1} \frac{F_{\ell, m} y z^m}{m} \right),$$

où $F_{\ell, m} := \frac{1}{(\ell - 1)m + 1} \binom{\ell m}{m}$ est le nombre de Fuss-Catalan.

Théorème 4.6.25 ([Del+23]). *Les nombres de régions et de régions bornées du (ℓ, n) -arrangement de tresses \mathcal{B}_n^ℓ sont donnés par*

$$f_{n-1}(\mathcal{B}_n^\ell) = n! [z^n] \exp \left(\sum_{m \geq 1} \frac{F_{\ell, m} z^m}{m} \right)$$

$$\text{et } b_{n-1}(\mathcal{B}_n^\ell) = (n - 1)! [z^{n-1}] \exp \left((\ell - 1) \sum_{m \geq 1} F_{\ell, m} z^m \right),$$

où $F_{\ell, m} := \frac{1}{(\ell - 1)m + 1} \binom{\ell m}{m}$ est le nombre de Fuss-Catalan.

4.6.4 Diagonales cellulaires cohérentes pour le permutoèdre

Dans la seconde partie de [Del+23], nous étudions les diagonales cohérentes du permutoèdre, appelées aussi *diagonale opéradiques*. Ces diagonales opéradiques sont les diagonales qui sont compatibles avec le fait que les faces du permutoèdre sont des produits de permutoèdres de dimension plus petites. Nous montrons qu'il existe exactement quatre telles diagonales, toutes isomorphes en tant que posets, dont seulement deux respectent l'ordre faible sur les permutations, celle de Sanedlidze et Umble [SU04] et celle de Laplante-Anfossi [Lap22b]. Nous décrivons ensuite les facettes de la diagonale via une règle simple sur les arbres de partitions, et leurs sommets comme des paires de permutations évitant certains motifs.

Théorème 4.6.26 ([Del+23]).] Une paire de permutations de $\llbracket n \rrbracket$ est un sommet de la diagonale LA (resp. SU) si et seulement si pour tout $k \geq 1$ et pour tout $I = \{i_1, \dots, i_k\}, J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset [k]$ tels que $i_1 = 1$ (resp. $j_k = 2k$) elle évite les motifs suivants

$$(j_1 i_1 j_2 i_2 \cdots j_k i_k, i_2 j_1 i_3 j_2 \cdots i_k j_{k-1} i_1 j_k), \quad (\text{LA})$$

$$\text{resp. } (j_1 i_1 j_2 i_2 \cdots j_k i_k, i_1 j_k i_2 j_1 \cdots i_{k-1} j_{k-2} i_k j_{k-1}), \quad (\text{SU})$$

Pour tout $k \geq 1$, il y a $\binom{2k-1}{k-1,k}(k-1)k!$ tels motifs, qui sont $(21, 12)$ pour $k = 1$, et pour $k = 2$

- LA évite les motifs $(3142, 2314), (4132, 2413), (2143, 3214), (4123, 3412), (2134, 4213), (3124, 4312)$,
- SU évite les motifs $(1243, 2431), (1342, 3421), (2143, 1432), (2341, 3412), (3142, 1423), (3241, 2413)$.

Dans la troisième partie de [Del+23], nous utilisons les résultats précédents pour prouver des résultats d'algèbre supérieure qui motivaient ce papier, comme l'existence d'exactly deux produits tensoriels pour les opérades à homotopie près (encodées par les opérades) et les A_∞ -algèbres (encodées par les multiplièdres).

Espèces en posets opéradiques et autres espèces enrichies

Je présente dans ce chapitre des généralisations de la notion d'espèce présentée au chapitre 2. Le but de ce chapitre est de fournir un cadre général aux travaux de Fresse et de Vallette sur les posets des partitions qui inclut le poset des hyperarbres.

5.1 Espèces en posets et posets des partitions

Nous référons à la section 2.4 pour la définition d'une espèce en posets. L'exemple phare de ce manuscrit est l'espèce en posets des partitions associée aux posets des partitions introduits à la section 2.6.1

$$\Pi : E \mapsto \Pi(E).$$

Nous rappelons de cette même section les isomorphismes de posets suivants pour tout $\pi \in \Pi(E)$

$$\varphi_\pi : \Pi_{\leq \pi}(E) \xrightarrow{\sim} \Pi(\pi) \quad \text{et} \quad \psi_\pi : \Pi_{\geq \pi}(E) \xrightarrow{\sim} \prod_{P \in \pi} \Pi(P) \quad (5.1.1)$$

où $\varphi_\pi(\alpha)$ est obtenu en contractant les éléments de chaque part P de π en un unique élément noté P et $\psi_\pi(\beta)$ est obtenu comme $\{\beta|_P \mid P \in \pi\}$, où $\beta|_P$ est la partition de P obtenue en restreignant β à P . Considérant π comme l'ensemble des classes d'une relation d'équivalence sur E , nous pouvons considérer $\varphi_\pi(\alpha)$ comme la partition induite par α sur le quotient E/π et le noterons $\alpha/\pi := \varphi_\pi(\alpha)$.

Exemple 5.1.1. Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et $\pi = \{P_1, P_2, P_3\}$ avec $P_1 = \{a, b, c\}$, $P_2 = \{d, e\}$, $P_3 = \{f, g\}$. Pour simplifier les notations et éviter les accolades doubles, nous noterons $\pi = P_1|P_2|P_3 = abc|de|fg$. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que cette notation peut être trompeuse et qu'il n'y a pas d'ordre sur l'ensemble des parts : la partition π pourrait tout aussi bien être notée $ed|bac|gf$. L'isomorphisme

$$\varphi_\pi : \Pi_{\leq \pi}(E) \xrightarrow{\sim} \Pi(\{1, 2, 3\})$$

envoie, par exemple, la partition $(P_1 \cup P_2)|P_3 = abcde|fg$ sur la partition $12|3$ de $\{1, 2, 3\}$. L'isomorphisme

$$\psi_\pi : \Pi_{\geq \pi}(E) \xrightarrow{\sim} \Pi(P_1) \times \Pi(P_2) \times \Pi(P_3)$$

envoie, par exemple, la partition $a|bc|d|e|fg$ sur le triplet $(a|bc, d|e, fg)$. △

Ces applications vérifient de plus de bonnes propriétés de composition (voir [DD25b, Proposition 2.2]).

Pour construire une opérade sur les chaînes des posets des partitions, nous pouvons alors effectuer les opérations suivantes pour π une partition de E :

$$c^\bullet(\Pi(\pi)) \otimes c^\bullet\left(\prod_{P \in \pi} \Pi(P)\right) \xrightarrow{\varphi_\pi^* \otimes \psi_\pi^*} c^\bullet(\Pi_{\leq \pi}(E)) \otimes c^\bullet(\Pi_{\geq \pi}(E)) \xrightarrow{\mu_\pi} c^\bullet(\Pi(E)), \quad (5.1.2)$$

où μ_π est la concaténation de deux chaînes définie par la formule

$$\begin{aligned} \mu_\pi([x_0 < \cdots < x_{m-1} < x_m = \pi] \otimes [\pi = x_m < x_{m+1} < \cdots < x_{m+n}]) \\ = [x_0 < \cdots < x_{m-1} < x_m < x_{m+1} < \cdots < x_{m+n}]. \end{aligned}$$

Cette concaténation est un morphisme de complexe de cochaînes qui induit un morphisme en cohomologie que nous noterons de la même manière. Elle est associative et compatible avec les tirés en arrière.

Si l'on revient à la définition de la substitution des espèces, il reste à établir le lien entre $c^\bullet(\Pi(\pi)) \otimes \bigotimes_{P \in \pi} c^\bullet(\Pi(P))$ et $c^\bullet(\Pi(\pi)) \otimes c^\bullet\left(\prod_{P \in \pi} \Pi(P)\right)$ afin de définir une opérade. Ce dernier chaînon est donné par l'application de Künneth.

Définition 5.1.2. Soient P et Q deux posets. le morphisme suivant

$$C^\bullet(P) \otimes C^\bullet(Q) \longrightarrow C^\bullet(P \times Q)$$

défini par

$$[x_0 < \cdots < x_m] \otimes [y_0 < \cdots < y_n] \mapsto [(x_0, y_0) < \cdots < (x_m, y_0) < (x_m, y_1) < \cdots < (x_m, y_n)],$$

est un quasi-isomorphisme de complexes de cochaînes.

Cependant, ce morphisme rompt la symétrie des rôles entre P et Q : l'application définie en composant le morphisme de Künneth avec les applications de l'équation (5.1.2) ne correspond pas à une structure opéradique puisqu'elle ne vérifie pas les relations correspondantes.

Par contre, le morphisme de Künneth sur les complexes de cochaînes induit un morphisme de Künneth au niveau de la cohomologie

$$H^\bullet(P) \otimes H^\bullet(Q) \longrightarrow H^\bullet(P \times Q).$$

On peut définir de manière analogue des morphismes de Künneth sur les autres variantes de cohomologie des posets :

$$h^\bullet(P) \otimes h^\bullet(Q) \longrightarrow h^\bullet(P \times Q), \quad \check{h}^\bullet(P) \otimes \check{h}^\bullet(Q) \longrightarrow \check{h}^\bullet(P \times Q), \quad \hat{h}^\bullet(P) \otimes \hat{h}^\bullet(Q) \longrightarrow \hat{h}^\bullet(P \times Q).$$

Tous ces morphismes de Künneth sont fonctoriels, symétriques en P et Q , associatifs et compatibles avec la concaténation. Nous obtenons alors une structure opéradique sur la cohomologie des posets des partitions qui correspond à la suspension de l'opérade Lie.

Proposition 5.1.3. *Il existe un unique isomorphisme d'opérade graduée*

$$\Phi : \Lambda^{-1} \text{Lie} \xrightarrow{\sim} h^\bullet(\Pi)$$

qui envoie le crochet de Lie sur le générateur $[12 < 1|2]$ de $h^1(\Pi_2)$.

Notez que la composition décrite sur les complexes de cochaînes correspond à la composition de gauche à droite des arbres à niveaux décrits dans [Fre04].

Exemple 5.1.4. Calculons la première composition opéradique,

$$\gamma : h^1(\Pi(\{A, B\})) \otimes \left(h^0(\Pi(\{1\})) \otimes h^1(\Pi(\{2, 3\})) \right) \longrightarrow h^2(\Pi(\{1, 2, 3\})),$$

correspondant à la partition $\pi = 1|23$ de $\{1, 2, 3\}$, pour laquelle nous avons

$$\varphi_\pi^*([AB < A|B]) = [123 < 1|23], \quad \psi_\pi^*([1]) = [1] \quad \text{and} \quad \psi_\pi^*([23 < 2|3]) = [1|23 < 1|2|3].$$

Nous obtenons alors :

$$\gamma([AB < A|B]; [1], [23 < 2|3]) = [123 < 1|23 < 1|2|3].$$

△

Le but de la section suivante sera d'adapter cette construction à d'autres types de posets.

5.2 Espèces en posets opéradiques

Soit P une espèce en poset munie du morphisme d'espèces en poset suivant

$$\begin{array}{c} P \\ a \downarrow \\ \Pi \end{array}$$

Nous appellerons $a(x)$ la *partition sous-jacente* à x . Nous demandons de plus à ce que pour tout ensemble fini E , le morphisme de posets $a : P(E) \rightarrow \Pi(E)$ satisfasse :

$$a^{-1}(\min(\Pi(S))) = \min(P(S)) \quad \text{and} \quad a^{-1}(\max(\Pi(S))) = \max(P(S)). \quad (5.2.1)$$

Cette condition assure que les morphismes de posets considérés (notamment φ_x et ψ_x définis ci-dessous) induisent un morphisme de complexe de cochaînes et donc un morphisme en cohomologie pour les différentes variantes de cohomologie définies.

À tout élément $x \in P(E)$ de partition sous-jacente $a(x) = \pi$, nous associons les morphismes de posets suivants

$$\varphi_x : P_{\leq x}(S) \longrightarrow P(\pi) \quad \text{and} \quad \psi_x : P_{\geq x}(S) \longrightarrow \prod_{T \in \pi} P(T).$$

Nous demandons de plus que les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{array}{ccc} P_{\leq x}(S) & \xrightarrow{\varphi_x} & P(\pi) \\ a \downarrow & & \downarrow a \\ \Pi_{\leq \pi}(S) & \xrightarrow{\sim_{\varphi_\pi}} & \Pi(\pi) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P_{\geq x}(S) & \xrightarrow{\psi_x} & \prod_{T \in \pi} P(T) \\ a \downarrow & & \downarrow a \\ \Pi_{\geq \pi}(S) & \xrightarrow{\sim_{\psi_\pi}} & \prod_{T \in \pi} \Pi(T) \end{array} \quad (5.2.2)$$

Définition 5.2.1. Une espèce en poset P munie des morphismes a , φ_x et ψ_x est une *espèce en poset opéradique* si elle vérifie certains axiomes d'équivariance, d'unitalité et d'associativité (voir [DD25b, 2.2.1 à 2.2.3]).

Soient P et Q deux espèces en posets opéradiques. Un *morphisme d'espèces en poset opéradiques* $f : P \rightarrow Q$ est un morphisme d'espèces qui commute avec le morphisme a et les morphismes φ et ψ .

Remarque 5.2.2. La catégorie des espèces en posets opéradiques a un objet terminal, le poset des partitions Π . La proposition 5.1.3 implique alors que pour toute espèce en posets opéradique P , l'opérade sur la cohomologie $h^\bullet(P)$ est munie d'un morphisme d'opérades graduées

$$a^* : \Lambda^{-1} \text{Lie} \rightarrow h^\bullet(P)$$

où $\Lambda^{-1} \text{Lie}$ est la désuspension de l'opérade Lie .

5.3 Structure d'opérade sur la cohomologie

Soit P une espèce en posets opéradique. Le foncteur $E \mapsto h^\bullet(P(E))$ est une espèce linéaire graduée notée $h^\bullet(P)$. Soit E un ensemble fini et $\pi \in \Pi(E)$ une partition de E . Nous obtenons un morphisme

$$\rho_\pi : h^\bullet(P(\pi)) \otimes \bigotimes_{T \in \pi} h^\bullet(P(T)) \longrightarrow h^\bullet(P(S))$$

en composant le morphisme de Künneth

$$h^\bullet(P(\pi)) \otimes \bigotimes_{T \in \pi} h^\bullet(P(T)) \xrightarrow{\text{id} \otimes \kappa} h^\bullet(P(\pi)) \otimes h^\bullet\left(\prod_{T \in \pi} P(T)\right)$$

avec la somme sur les éléments $x \in P(E)$ vérifiant $a(x) = \pi$ des composées

$$h^\bullet(P(\pi)) \otimes h^\bullet\left(\prod_{T \in \pi} P(T)\right) \xrightarrow{\varphi_x^* \otimes \psi_x^*} h^\bullet(P_{\leq x}(S)) \otimes h^\bullet(P_{\geq x}(S)) \xrightarrow{\mu_x} h^\bullet(P(S)).$$

Théorème 5.3.1. *Les morphismes ρ_π munissent $h^\bullet(P)$ d'une structure d'opérade graduée de \mathbb{K} -espaces vectoriels.*

Des exemples d'espèces en posets opéradiques seront développés à la section 5.5.1.

5.4 Variantes : modules opéradiques

Des variantes de la concaténation définie à la section 5.1 peuvent être définies sur les autres types de cohomologie

$$\check{\mu}_x : h^\bullet(P_{\leq x}) \otimes \check{h}^\bullet(P_{\geq x}) \longrightarrow \check{h}^\bullet(P) \quad \text{and} \quad \hat{\mu}_x : \hat{h}^\bullet(P_{\leq x}) \otimes h^\bullet(P_{\geq x}) \longrightarrow \hat{h}^\bullet(P).$$

Elles sont données par la même formule et satisfont des compatibilités similaires.

En utilisant $\check{\mu}_x$ nous définissons :

$$\check{\rho}_\pi : h^\bullet(P(\pi)) \otimes \bigotimes_{T \in \pi} \check{h}^\bullet(P(T)) \longrightarrow \check{h}^\bullet(P(S)).$$

Théorème 5.4.1. *Les morphismes $\check{\rho}_\pi$ munissent $\check{h}^\bullet(P)$ d'une structure de module opéradique à gauche sur $h^\bullet(P)$.*

En utilisant $\hat{\mu}_x$ nous définissons :

$$\hat{\rho}_\pi : \hat{h}^\bullet(P(\pi)) \otimes \bigotimes_{T \in \pi} h^\bullet(P(T)) \longrightarrow \hat{h}^\bullet(P(S)).$$

Théorème 5.4.2. *Les morphismes $\hat{\rho}_\pi$ munissent $\hat{h}^\bullet(P)$ d'une structure de module opéradique à droite sur $h^\bullet(P)$.*

5.5 Produits fibrés

Soient P_1 et P_2 deux espèces en posets opéradiques. Considérons le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} P_1 \times P_2 & \longrightarrow & P_1 \\ \downarrow \Pi & & \downarrow a \\ P_2 & \xrightarrow{a} & \Pi \end{array}$$

Concrètement, un élément de $(P_1 \times P_2)_{\Pi}(E)$ est une paire $(x_1, x_2) \in P_1(E) \times P_2(E)$ telle que $a(x_1) = a(x_2)$. $(P_1 \times P_2)_{\Pi}(E)$ est un sous-poset du poset produit $P_1(S) \times P_2(S)$.

Proposition 5.5.1. *Le produit fibré $P_1 \times P_2$ est naturellement muni d'une structure d'espèce en posets opéradique, appelée produit de P_1 et P_2 .*

Exemple 5.5.2. Le produit des espèces en posets opéradiques ${}^{\mathcal{P}}\Pi$ des partitions décorées à gauche, définies dans la première partie de la section 5.5.1, et $\Pi^{\mathcal{Q}}$ des partitions décorées à droite, définies dans la deuxième partie de la section 5.5.1, est l'espèce en posets opéradique ${}^{\mathcal{P}}\Pi^{\mathcal{Q}}$ des partitions bidécorées, définie dans la troisième partie de la section 5.5.1. \triangle

5.5.1 Exemples des partitions décorées

Nous nous intéressons maintenant aux posets des partitions décorées à gauche, à droite ou bidécorées, introduits à la section 3.2.1.

5.5.2 Posets des partitions décorées à gauche

Pour une opérade ensembliste connexe \mathcal{P} basique à gauche, l'espèce ${}^{\mathcal{P}}\Pi$ (cf. 3.2.1) est munie d'une structure d'espèce en posets opéradique comme suit. Soit (π, ζ) une partition \mathcal{P} -décorée à gauche d'un ensemble fini E . Il y a une transformation naturelle strictement croissante entre espèces en posets :

$$\begin{array}{c} {}^{\mathcal{P}}\Pi \\ \downarrow a \\ \Pi \end{array}$$

qui oublie les décorations : $a(\pi, \zeta) = \pi$.

Le morphisme de posets

$$\varphi_{(\pi, \zeta)} : {}^{\mathcal{P}}\Pi_{\leq (\pi, \zeta)}(E) \longrightarrow {}^{\mathcal{P}}\Pi(\pi)$$

est facile à définir et n'utilise pas le fait que \mathcal{P} soit basique à gauche. Il envoie une partition \mathcal{P} -décorée à gauche $(\alpha, \mu) \leq (\pi, \xi)$, sur $(\varphi_\pi(\alpha) = \alpha/\pi, \tilde{\mu})$ où la décoration $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\alpha/\pi)$ est induite par $\mu \in \mathcal{P}(\alpha)$ via la bijection $\alpha \simeq \alpha/\pi, P \leftrightarrow \pi|_P$. C'est un isomorphisme de posets entre ${}^{\mathcal{P}}\Pi_{\leq(\pi, \xi)}(E)$ et l'intervalle ${}^{\mathcal{P}}\Pi_{\leq(\hat{1}, \xi)}(\pi)$.

Définissons maintenant le morphisme de posets

$$\psi_{(\pi, \xi)} : {}^{\mathcal{P}}\Pi_{\geq(\pi, \xi)}(E) \longrightarrow \prod_{P \in \pi} {}^{\mathcal{P}}\Pi(P).$$

Un élément de ${}^{\mathcal{P}}\Pi_{\geq(\pi, \xi)}(E)$ est une partition \mathcal{P} -décorée à gauche (β, η) où $\beta \geq \pi$ et telle qu'il existe des $\mu_P \in \mathcal{P}(\beta|_P)$, pour $P \in \pi$, tels que $\eta = \xi \circ (\mu_P)_{P \in \pi}$. Comme \mathcal{P} est basique à gauche, $(\mu_P)_{P \in \pi}$ est unique et nous définissons l'image de (β, η) par $\psi_{(\pi, \xi)}$ comme les partitions $\beta|_P$, pour $P \in \pi$, décorées par μ_P . Le morphisme $\psi_{(\pi, \xi)}$ est alors un isomorphisme de posets.

Proposition 5.5.3. *${}^{\mathcal{P}}\Pi$ muni des morphismes de posets a , $\varphi_{(\pi, \xi)}$ et $\psi_{(\pi, \xi)}$ est une espèce en posets opéradique.*

Nous expliquons maintenant comment comprendre l'opérade sur la cohomologie $h^\bullet({}^{\mathcal{P}}\Pi)$ dans le cadre de la dualité de Koszul et des constructions bar et bar à niveaux rappelées à la section 3.2.2, en suivant les travaux de Fresse [Fre04] (dans le cas de l'opérade commutative) et en adaptant l'étude de Vallette [Val07] portant sur les partitions décorées à droite.

Proposition 5.5.4. *Soit \mathcal{P} une opérade basique à gauche.*

1. Les complexes suivants sont isomorphes, pour tout ensemble fini E ,

$$c^\bullet({}^{\mathcal{P}}\Pi(E)) \simeq \Omega_{\text{level}}(\mathbb{K}\mathcal{P}^\vee)(E),$$

qui induit un isomorphisme d'opérades graduées

$$h^\bullet({}^{\mathcal{P}}\Pi) \simeq H^\bullet(\Omega(\mathbb{K}\mathcal{P}^\vee)).$$

2. Ainsi, $\mathbb{K}\mathcal{P}$ est Koszul si et seulement si les intervalles maximaux $[\hat{0}, (\hat{1}, \xi)]$ de ${}^{\mathcal{P}}\Pi(E)$ sont Cohen–Macaulay pour tout E et tout $\xi \in \mathcal{P}(E)$. Dans ce cas, notant $(\mathbb{K}\mathcal{P})^\dagger$ la duale de Koszul, nous avons l'isomorphisme d'opérades suivant

$$h^\bullet({}^{\mathcal{P}}\Pi) \simeq \Lambda^{-1}(\mathbb{K}\mathcal{P})^\dagger.$$

Exemples 5.5.5. 1. Pour $\mathcal{P} = \text{Com}$, on retrouve le cas classique des posets des partitions et la proposition 5.1.3.

2. Pour $\mathcal{P} = \text{As}$, dont la duale de Koszul est elle-même, nous obtenons une description de la cohomologie des posets de compositions d'ensemble définis dans la section 2.6.2 :

$$h^\bullet(\text{As}\Pi) \simeq \Lambda^{-1}\text{As}.$$

3. Pour $\mathcal{P} = \mathcal{L}$, l'opérade introduite à l'exemple 3.2.6, remarquons d'abord que cette opérade est Koszul. En effet, en posant $\vdash \geq \dashv$, toutes les relations se réécrivent comme des règles de réécriture de gauche à droite. Les paires critiques sont les arbres à 4 feuilles et 3 sommets internes et sont toutes confluentes. Appliquant [DK10], cette opérade est Koszul et auto-duale : $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$. Par conséquent, le poset des partitions décorées à gauche associé est Cohen–Macaulay et

$$h^\bullet(\mathcal{L}\Pi) \simeq \Lambda^{-1}\mathcal{L}.$$

△

Le poset ${}^{\mathcal{P}}\Pi(E)$ des partitions de E \mathcal{P} -décorées à gauche a un unique élément minimal mais potentiellement plusieurs éléments maximaux, en bijection avec $\mathcal{P}(E)$. Le module opéradique à droite $\widehat{h}^\bullet({}^{\mathcal{P}}\Pi)$ est donc trivial, mais le module opéradique à gauche $\check{h}^\bullet({}^{\mathcal{P}}\Pi)$ peut s'avérer intéressant. Il s'exprime en effet en termes de construction cobar à coefficients, rappelée à la section 3.2.2, comme suit.

Proposition 5.5.6. *Soit \mathcal{P} une opérade ensembliste basique à gauche. Nous avons les isomorphismes de complexes*

$$\check{c}^\bullet({}^{\mathcal{P}}\Pi(E)) \simeq \Omega_{\text{level}}(\mathbb{K}\mathcal{P}^\vee, \mathbb{K}L_{\mathcal{P}}^\vee)(E)$$

qui induisent un isomorphisme

$$\check{h}^\bullet({}^{\mathcal{P}}\Pi) \simeq H^\bullet(\Omega(\mathbb{K}\mathcal{P}^\vee, \mathbb{K}L_{\mathcal{P}}^\vee)),$$

compatible avec la structure de module opéradique à gauche sur $h^\bullet({}^{\mathcal{P}}\Pi) \simeq H^\bullet(\Omega(\mathbb{K}\mathcal{P}^\vee))$.

5.5.3 Posets des partitions décorées à droite

Il y a une transformation naturelle strictement croissante entre les espèces en posets

$$\begin{array}{c} \Pi^{\mathcal{Q}} \\ \downarrow a \\ \Pi \end{array}$$

qui oublie les décorations : $a(\pi, \xi) = \pi$.

Pour une opérade ensembliste basique à droite \mathcal{Q} le poset $\Pi^{\mathcal{Q}}$ est muni d'une structure d'espèce en posets opéradique comme suit. Soit (π, ξ) une partition \mathcal{Q} -décorée à droite sur un ensemble fini S . Nous définissons d'abord le morphisme de posets

$$\varphi_{(\pi, \xi)} : \Pi_{\leq(\pi, \xi)}^{\mathcal{Q}}(S) \longrightarrow \Pi^{\mathcal{Q}}(\pi).$$

Un élément de $\Pi_{\leq(\pi, \xi)}^{\mathcal{Q}}(S)$ est une partition \mathcal{Q} -décorée à droite (α, η) où $\alpha \leq \pi$ et pour tout $A \in \alpha$ il existe $\nu_A \in \mathcal{Q}(\pi|_A)$ tel que $\eta_A = \nu_A \circ (\xi_T)_{T \in \pi|_A}$. Comme \mathcal{Q} est basique à droite, chaque ν_A est unique et nous pouvons définir l'image de (α, η) par $\varphi_{(\pi, \xi)}$ comme la partition $\varphi_\pi(\alpha) = \{\pi|_A, A \in \alpha\}$ décorée par ν_A . Notez que $\varphi_{(\pi, \xi)}$ est un isomorphisme de posets. Définir le morphisme de posets

$$\psi_{(\pi, \xi)} : \Pi_{\geq(\pi, \xi)}^{\mathcal{Q}}(S) \longrightarrow \prod_{T \in \pi} \Pi^{\mathcal{Q}}(T)$$

est plus facile et n'utilise pas le fait que \mathcal{Q} soit basique : nous définissons $\psi_{(\pi, \xi)}(\beta, \nu)$ comme la famille de partitions $\beta|_T$, pour $T \in \pi$, avec la décoration naturellement induite par ν . Notez que $\psi_{(\pi, \xi)}$ induit un isomorphisme de posets entre $\Pi_{\geq(\pi, \xi)}^{\mathcal{Q}}(S)$ et le produit des intervalles $\Pi_{\geq(\emptyset, \xi_T)}^{\mathcal{Q}}(T)$, pour $T \in \pi$.

Proposition 5.5.7. *L'espèce en poset $\Pi^{\mathcal{Q}}$ munie de cette structure est une espèce en posets opéradiques.*

Le résultat suivant est l'analogie de la proposition 5.5.4 pour les partitions décorées à droite. Il a été prouvé pour la première fois par Vallette [Val07]. La seule différence avec la section courante est qu'il n'apparaissait pas dans [Val07] de structure opéradique *a priori* sur $h^\bullet(\Pi^{\mathcal{Q}})$.

Proposition 5.5.8. *Soit \mathcal{Q} une opérade ensembliste basique à droite.*

1. *Il y a un isomorphisme de complexes, pour tout ensemble fini E ,*

$$c^\bullet(\Pi^{\mathcal{Q}}(E)) \simeq \Omega_{\text{level}}(\mathbb{K}\mathcal{Q}^\vee)(E),$$

qui induit un isomorphisme d'opérades graduées

$$h^\bullet(\Pi^{\mathcal{Q}}) \simeq H^\bullet(\Omega(\mathbb{K}\mathcal{Q}^\vee)).$$

2. *Ainsi, $\mathbb{K}\mathcal{Q}$ est Koszul si et seulement si les intervalles maximaux $[(\hat{0}, \xi), \hat{1}]$ de $\Pi^{\mathcal{Q}}(E)$ sont Cohen–Macaulay pour tout ensemble fini E et tout $\xi \in \mathcal{Q}(E)$. Dans ce cas, si $(\mathbb{K}\mathcal{Q})^\dagger$ désigne la duale de Koszul de l'opérade, nous avons l'isomorphisme d'opérades graduées suivant :*

$$h^\bullet(\Pi^{\mathcal{Q}}) \simeq \Lambda^{-1}(\mathbb{K}\mathcal{Q})^\dagger.$$

Exemples 5.5.9. 1. Pour $\mathcal{Q} = \text{Com}$, on retrouve le cas des posets des partitions et de la proposition 5.1.3. Un autre cas particulièrement intéressant est $\mathcal{Q} = \text{Com}_k$, l'opérade engendrée par une opération commutative et associative de degré $k + 1$. Nous retrouvons alors les résultats de [HW95].

2. Pour $\mathcal{Q} = \text{As}$, dont la duale de Koszul est elle-même, la cohomologie des posets des partitions dont les parts sont des listes est :

$$h^\bullet(\Pi^{\text{As}}) \simeq \Lambda^{-1}\text{As}.$$

3. Pour $\mathcal{Q} = \text{Perm}$, l'opérade $\mathbb{K}\mathcal{Q}$ est Koszul de duale PreLie encodant les algèbres pré-Lie [CL01]. Nous retrouvons alors la description de [CV06] :

$$h^\bullet(\Pi^{\text{Perm}}) \simeq \Lambda^{-1}\text{PreLie}.$$

△

Le poset $\Pi^{\mathcal{Q}}(E)$ des partitions de E \mathcal{Q} -décorées à droite a un unique élément maximal et potentiellement plusieurs éléments minimaux, en bijection avec $\mathcal{P}(E)$. Le module opéradique à gauche $\check{h}^\bullet(\mathcal{P}\Pi)$ est donc trivial, mais le module opéradique à droite $\hat{h}^\bullet(\mathcal{P}\Pi)$ peut être intéressant. Il s'exprime en termes de construction bar à coefficients comme suit :

Proposition 5.5.10. *Soit \mathcal{Q} une opérade ensembliste basique à droite. Nous avons l'isomorphisme de complexe suivant*

$$\hat{c}^\bullet(\Pi^{\mathcal{Q}}(E)) \simeq \Omega_{\text{level}}(\mathbb{K}R_{\mathcal{Q}}^\vee, \mathbb{K}\mathcal{Q}^\vee)(E)$$

qui induit l'isomorphisme

$$\hat{h}^\bullet(\Pi^{\mathcal{Q}}) \simeq H^\bullet(\Omega(\mathbb{K}R_{\mathcal{Q}}^\vee, \mathbb{K}\mathcal{Q}^\vee)),$$

compatible avec la structure de module opéradique à droite de $h^\bullet(\Pi^{\mathcal{Q}}) \simeq H^\bullet(\Omega(\mathbb{K}\mathcal{Q}^\vee))$.

5.5.4 Partitions bidécorées

Considérons les partitions bidécorées, telles que définies dans la section 3.2.1. Les résultats sur le produit fibré de la section 5.5 impliquent :

Proposition 5.5.11. *Soit \mathcal{P} une opérade ensembliste basique à gauche et \mathcal{Q} une opérade ensembliste basique à droite. Il existe alors une unique structure d'espèce en posets opéradique sur ${}^{\mathcal{P}}\Pi^{\mathcal{Q}}$ pour laquelle les foncteurs d'oubli vers ${}^{\mathcal{P}}\Pi$ et $\Pi^{\mathcal{Q}}$ sont des morphismes d'espèces en posets opéradiques.*

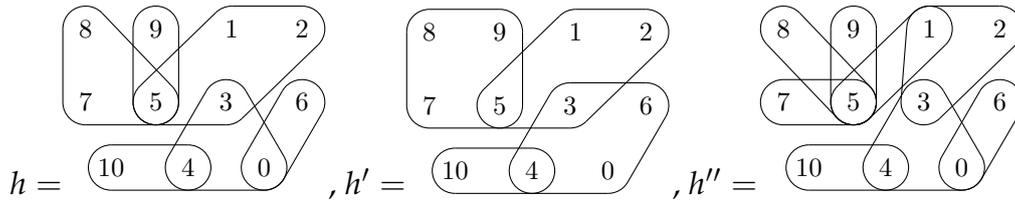
Le complexe de cochaîne obtenu est isomorphe à la construction cobar à niveaux associée au produit de Hadamard $\mathcal{P} \otimes_H \mathcal{Q}$ des deux opérades \mathcal{P} et \mathcal{Q} .

5.7.1 Espèce en posets opéradique

L'application $HT : V \mapsto HT(V)$ est une espèce en posets. Considérons $a : HT \rightarrow \Pi$ définie comme suit :

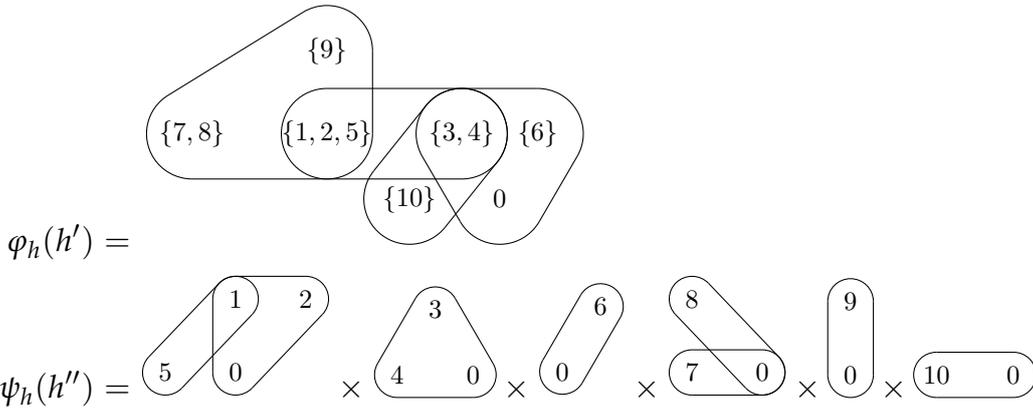
À tout hyperarbre h , on associe la partition $a(h)$ donnée par l'ensemble de ses arêtes. Le morphisme φ_h est obtenu en contractant les éléments d'une même arête de h sur un point. Le morphisme ψ_h est obtenu en séparant les arêtes de h .

Exemple 5.7.1. Considérons h comme à droite de l'exemple 2.5.1, et deux hyperarbres h' et h'' comme suit.



Nous avons :

$$a(h) = \{\{1, 2, 5\}, \{3, 4\}, \{6\}, \{7, 8\}, \{9\}, \{10\}\}$$



△

Proposition 5.7.2 ([DD25a]). *L'espèce en posets HT munie des morphismes de posets a , φ_h et ψ_h pour tout hyperarbre h est une espèce en posets opéradique.*

5.7.2 Arbres de fusion

Nous présentons maintenant un complexe (semi-)simplicial homotope au complexe d'ordre des intervalles maximaux du poset des hyperarbres sur n sommets. Les faces de ce complexe sont appelées *arbre de fusion* et correspondent aux ensembles nichés associés à l'ensemble de briques minimal associé au poset des hyperarbres (voir section 4.3). L'avantage de considérer les ensembles nichés et non les chaînes dans le poset est d'obtenir une structure d'opérade directement sur les ensembles nichés là où il n'y avait qu'une opérade à homotopie près sur les chaînes (voir 5.1).

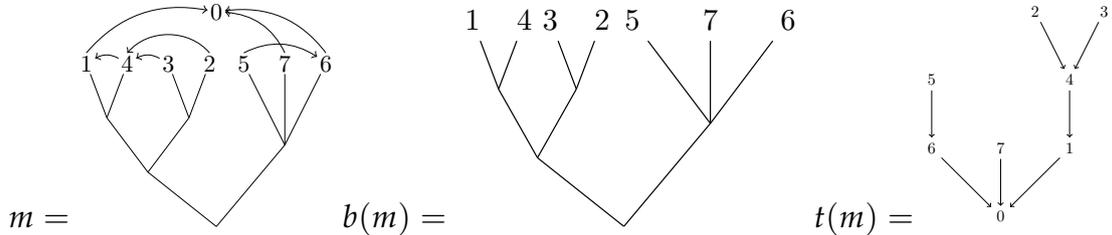
Définition 5.7.3. Pour un ensemble fini V , un V -*arbre de fusion* m est

- un arbre $b(m)$ enraciné (non plan) réduit (c'est-à-dire sans sommet avec un seul fils) dont les feuilles sont étiquetées par V , appelé *arbre inférieur*,

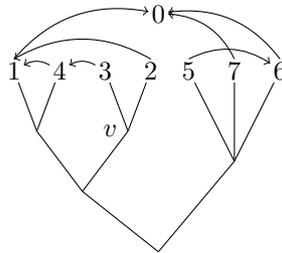
- un arbre $t(m)$ enraciné (non plan) dont les sommets sont étiquetés par $V \sqcup \{0\}$, enraciné en 0, dont les arêtes sont orientées vers la racine, appelé *arbre supérieur*,

tel que pour tout sommet v de B , l'ensemble des arêtes sortantes de feuilles au-dessus de v forme un sous-arbre de T (*condition de compatibilité*).

Exemple 5.7.4. Un premier exemple d'arbre de fusion est l'arbre de fusion m suivant avec son arbre inférieur $b(m)$ et son arbre supérieur $t(m)$:



Le couple d'arbres suivant n'est pas un arbre de fusion puisque la condition de compatibilité n'est pas vérifiée en v : le sous-arbre des arêtes sortantes a pour arêtes $(2, 1)$ et $(3, 4)$ et n'est donc pas connexe.



△

Remarque 5.7.5. Le nom *arbre de fusion* vient du fait que l'arbre $b(m)$ décrit les fusions effectuées dans l'arbre $t(m)$.

Étant donné un arbre T sur $\{0, 1, \dots, n\}$ enraciné en 0, nous notons $MT_T(n)$ le poset des arbres de fusion qui ont pour arbre supérieur T avec la relation de couverture suivante : $M \leq N$ si M est obtenu en contractant une arête interne dans l'arbre inférieur de N .

Étant donné un ensemble fini V , l'espace vectoriel engendré par les arbres de fusion est gradué par le nombre d'arêtes internes de son arbre inférieur. Nous notons $\widetilde{MT}(V)_k$ l'espace vectoriel engendré par les arbres de fusion avec un étiquetage additionnel $\{1, \dots, k\}$ sur les k sommets internes différents de la racine de son arbre inférieur. Nous considérons l'espace vectoriel gradué suivant

$$MT(V) = \bigoplus_k \widetilde{MT}(V)_k \otimes_{\mathfrak{S}_k} \text{sgn}_k,$$

où sgn_k est la représentation signature.

Les arbres inférieurs correspondent exactement aux arbres de la construction cobar : on étend la différentielle de cette construction aux arbres de fusion de manière à obtenir un complexe de cochaînes gradué par le nombre d'arêtes internes de l'arbre inférieur.

Nous décrivons maintenant la composition opéradique partielle $\circ_a : MT(V) \otimes MT(W) \rightarrow MT((V \sqcup W) \setminus a)$, pour $a \in V$. Considérons deux arbres de fusion $M \in MT(V)$ et $N \in MT(W)$. La composition opéradique $M \circ_i N$ est obtenue comme somme des arbres de fusion $W \in MT((V \sqcup W) \setminus a)$ tels que :

- l'arbre $b(W)$ est la greffe de l'arbre $b(N)$ sur la i ème feuille de l'arbre $b(M)$, comme pour l'opérade magmatique,

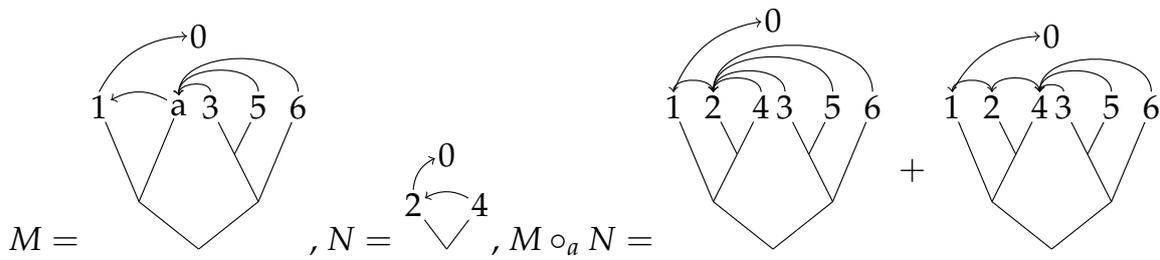


FIGURE 5.7.1 – Composition opéradique d’arbres de fusion. Dans un soucis de clarté, nous omettons l’ordre sur les sommets non racine de l’arbre inférieur et les signes de Koszul.

- l’ordre total sur les sommets non racine de $b(W)$ est obtenue par $a \leq_W b$ si et seulement si $a \leq_M b$, $a \leq_N b$ où a est un sommet non racine de $b(M)$ et b est un sommet non racine de $b(N)$. De plus, la racine de N , $\text{root}(N)$, vérifie $a \leq_W \text{root}(N) \leq_W b$ pour tout sommet non racine a de M et b de N . Nous résumons cet ordre dans la formule suivante : $M \leq \text{root}(N) \leq N$.
- l’arbre $t(W)$ est la greffe compatible de chaque enfant de i dans $t(M)$ sur un sommet de $t(N)$ et de la racine de $t(N)$ sur le parent de i dans $t(M)$.

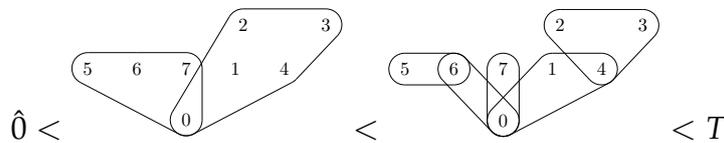
Cette composition partielle est bien définie et munit l’ensemble des arbres de fusion d’une structure d’opérade différentielle graduée :

Proposition 5.7.6. *Le \mathfrak{S} -module gradué des V -arbres de fusion $MT(V)$ est muni d’une structure d’opérade différentielle graduée (ou dg-opérade) MT . Nous notons $H^\bullet(MT)$ l’opérade induite sur la cohomologie du complexe de cochaînes.*

Exemple 5.7.7. Un exemple de composition de deux arbres de fusion est présenté sur la figure 5.7.1. △

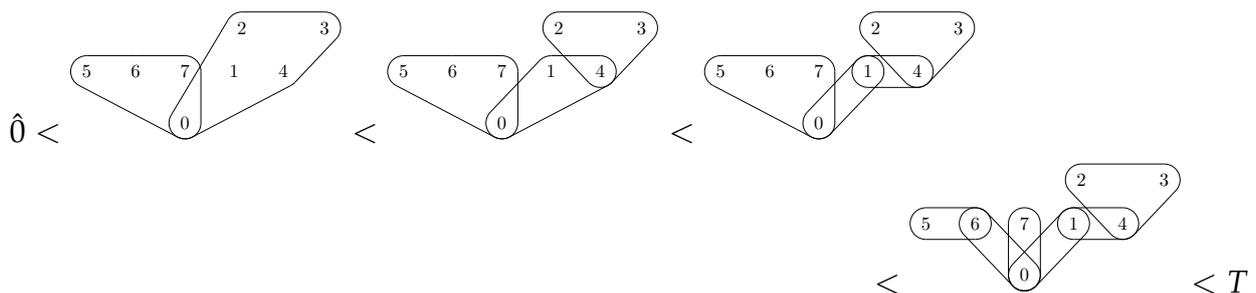
Dans [DD25a], nous adaptons ensuite l’isomorphisme de Fresse [Fre04] entre complexe de chaînes des posets des partitions et construction bar à niveaux aux posets des hyperarbres en définissant des "arbres de fusion à niveaux" qui sont en bijection avec les chaînes min–max.

Exemples 5.7.8. Prenant le T de l’exemple 5.7.4, la chaîne



est équivalente à l’arbre de fusion à niveaux A de la figure 5.7.2.

La chaîne



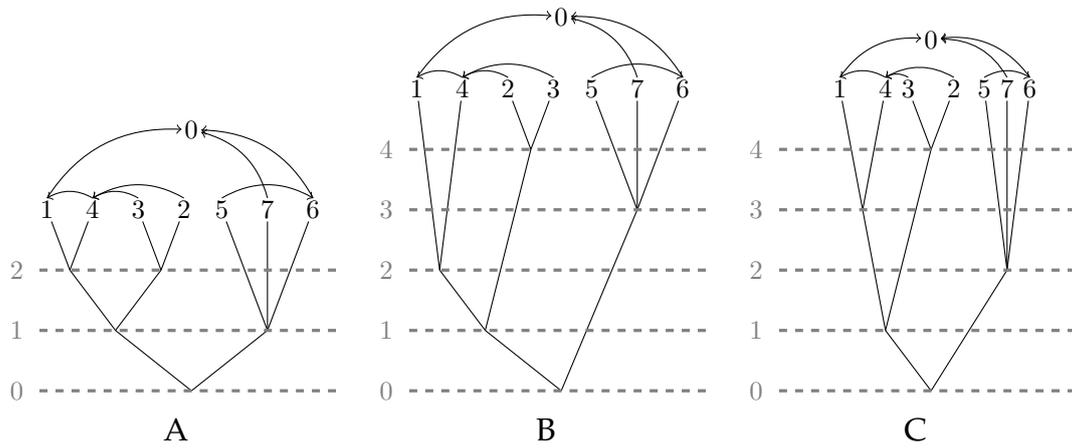
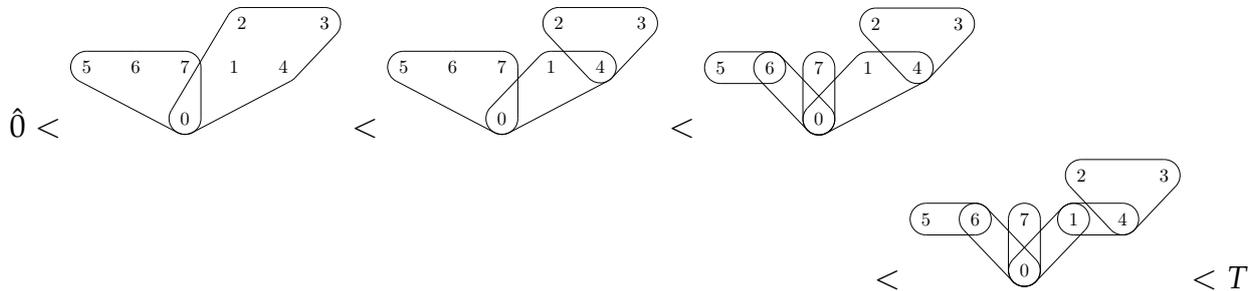


FIGURE 5.7.2 – Trois arbres de fusion à niveaux associés à l’arbre de fusion de l’exemple 5.7.4.



FIGURE 5.7.3 – Un hyperarborescence et son arbre de fusion associé.

est équivalente à l’arbre de fusion à niveaux *B* de la figure 5.7.2.
La chaîne



est équivalente à l’arbre de fusion à niveaux *C* de la figure 5.7.2.

△

Nous construisons ensuite un morphisme de dénivellation ("delevelization" dans le texte) qui permet de relier les arbres de fusion à niveaux aux arbres de fusion en oubliant les niveaux s’il n’y a qu’un sommet par niveau et renvoyant 0 sinon. Suivant le raisonnement développé dans [FM05a], nous appliquons ensuite le lemme de Quillen (Quillen fiber lemma) 2.2.14 pour montrer la proposition suivante :

Proposition 5.7.9. *Étant donné un arbre T sur $\{0, 1, \dots, n\}$, enraciné en 0, le complexe semi-simplicial des arbres de fusion d’arbre supérieur T est homotope au complexe d’ordre de l’intervalle $[\hat{0}, T]$. De plus, le quasi-isomorphisme de complexe de cochaînes correspondant induit un isomorphisme d’opérades graduées entre l’opérade sur la cohomologie du poset des hyperarbres $h^\bullet(\text{HT}(n))$ et l’opérade sur la cohomologie du complexe de cochaînes des arbres de fusion $H^\bullet(\text{MT}(n), d)$.*

Nous représentons sur la figure 5.7.3 un hyperarborescence et son arbre de fusion canoniquement associé quand son arbre supérieur est l’arbre $t(m)$ de l’exemple 5.7.4.

5.7.3 $\Sigma H^n(\text{MT}(n))$ est l'opérade post-Lie

Le complexe simplicial des arbres de fusion est homotope au complexe de chaînes du poset des hyperarbres. Nous caractérisons maintenant l'opérade obtenue sur la cohomologie de ces complexes en la reliant à l'opérade post-Lie introduite par Vallette dans [Val07], puis redécouverte de manière indépendante par Munthe-Kaas et Wright dans [MW08].

Définition 5.7.10 ([Val07; MW08]). Une *algèbre post-Lie* est un \mathbb{K} -espace vectoriel L muni de deux opérations binaires \triangleleft et $\{, \}$ telles que :

- $(L, \{, \})$ est une algèbre de Lie,
- les deux opérations \triangleleft et $\{, \}$ vérifient les relations distributives suivantes :

$$(x \triangleleft y) \triangleleft z - x \triangleleft (y \triangleleft z) - (x \triangleleft z) \triangleleft y + x \triangleleft (z \triangleleft y) = x \triangleleft \{y, z\} \quad (5.7.1)$$

$$\{x, y\} \triangleleft z = \{x \triangleleft z, y\} + \{x, y \triangleleft z\} \quad (5.7.2)$$

Remarque 5.7.11. L'opération binaire définie par

$$[x, y] = x \triangleleft y - y \triangleleft x + \{x, y\} \quad (5.7.3)$$

est aussi un crochet de Lie.

Notons PostLie l'opérade encodant les algèbres post-Lie. Cette opérade est binaire, quadratique et son dual de Koszul est l'opérade ComTrias . Elle est apparue dans une grande variété de domaines, de l'algèbre [Val07; Dot20] à l'analyse numérique [CEO20]. Dotsenko et Griffin ont remarqué dans [DG14, Theorem 6.1] que l'espèce sous-jacente à cette opérade est le pléthysme $\text{Lie} \circ \text{Mag}$. L'opérade PostLie est ensuite obtenue via une loi distributive filtrée qui généralise les lois distributives de Markl [Mar96b]. Une base de l'espace vectoriel sous-jacent est donnée par les crochets de Lie d'arbres plans ([OEI24, A006963]).

L'opérade $H^n(\text{MT}(n))$ peut être calculée en analysant le quotient des arbres de fusion par l'image de la différentielle. Nous obtenons :

Proposition 5.7.12. *La suspension de l'opérade $H^n(\text{MT}(n))$ sur l'unique groupe de cohomologie de la dg-opérade des arbres de fusion, définie à la section 5.7.2 est isomorphe à l'opérade PostLie .*

5.7.4 Post-Lie module à gauche sur les arbres de Cayley

Dans [DD25a], nous adaptons l'analyse précédente aux chaînes min (et non plus min-max). Les ensembles nichés correspondant sont des "hyperarbres de fusion" où l'arbre supérieur est un hyperarbre et non plus seulement un arbre. J'ai montré dans [Oge13a] que l'unique groupe de cohomologie dans ce cas est isomorphe à la suspension du \mathfrak{S} -module des arbres de Cayley. La construction de la section 5.4 s'applique et nous obtenons une structure de post-Lie module à gauche sur les arbres de Cayley :

Proposition 5.7.13. *Notant \curvearrowright le produit pré-Lie sur les arbres de Cayley introduit dans [CL01], nous définissons pour tous arbres de Cayley S et T les produits suivants :*

$$S \triangleleft T = 1 \curvearrowright T, \text{ si } S \text{ est un arbre de Cayley à un sommet} \quad (5.7.4)$$

$$(G \curvearrowright D) \triangleleft T = (G \triangleleft T) \curvearrowright D + G \curvearrowright (D \triangleleft T) \quad (5.7.5)$$

$$\{S, T\} = T \curvearrowright S - S \curvearrowright T, \quad (5.7.6)$$

L'espace vectoriel gradué engendré par les arbres de Cayley muni des deux produits \triangleleft et $\{, \}$ est un post-Lie module à gauche monogène.

Conclusion et perspectives

Après avoir présenté chaque axe de mes recherches, j'aimerais insister sur les interactions entre ceux-ci qui auront été soulignées en filigrane par les renvois entre les différents chapitres. En effet, cette présentation segmentée de mes recherches n'est due qu'à des contraintes de présentation et reste arbitraire. Ma recherche s'effectue à la jonction de ces différents thèmes et s'ouvre dans différentes directions. Un exemple particulièrement parlant de cette symbiose est les posets de Tamari-Parking. Cette étude fait appel à plusieurs chapitres présentés : le chapitre 2 pour le caractère Cohen-Macaulay et le calcul des nombres de Möbius, le chapitre 3 pour la structure opéradique et tridendriforme sur les arbres de parking, le chapitre 4 pour l'étude de ce poset en tant que subdivision du permutoèdre et le chapitre 5 pour la structure opéradique sur la cohomologie du poset. Je présente sur la figure 6.0.1 une liste non exhaustive des nouveaux thèmes de recherche que j'aimerais aborder.

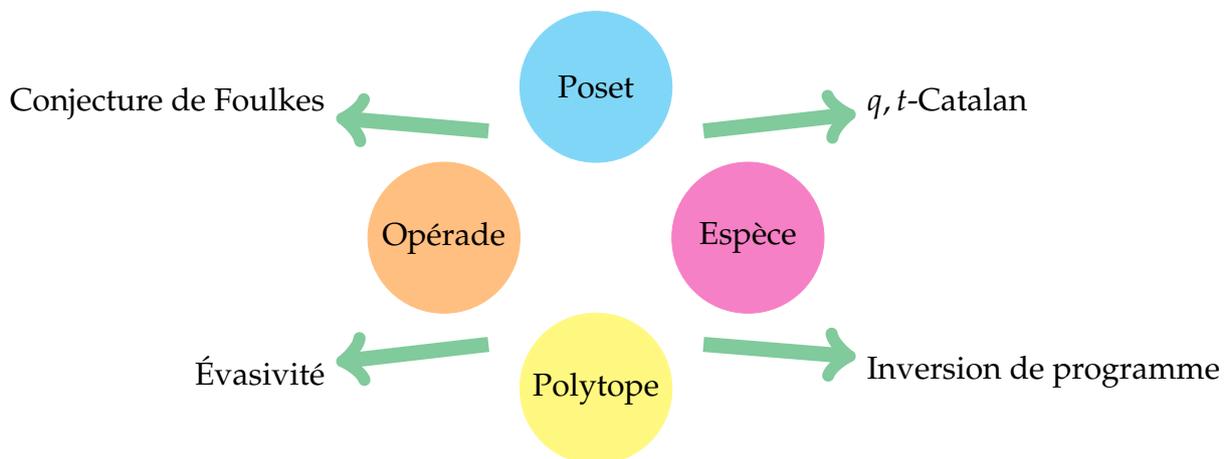


FIGURE 6.0.1 – Thèmes de recherche (ronds colorés) et certaines pistes de recherche

Je présente maintenant une liste non exhaustive de pistes de recherche, reprenant les notions dans l'ordre du manuscrit.

D'un point de vue topologique, j'aimerais placer le lemme 2.2.13 dans la hiérarchie de l'épluchabilité. Il semble clair que tout poset possédant un ordre récursif sur ses atomes vérifie le lemme : ce critère est donc équivalent à la CL-épluchabilité, ou plus faible. Dans

la même veine, j'aimerais travailler sur le lien entre les propriétés combinatoires des posets comme l'épluchabilité et la propriété d'évasivité des complexes simpliciaux (voir [KSS84]).

Les espèces sont un bon outil pour l'étude d'action du groupe symétrique, et de manière générale pour montrer la Schur-positivité de certaines fonctions symétriques. Parmi les conjectures de Schur-positivité, la conjecture de Foulkes est l'une des plus célèbres. Nous formulons ici une variante que nous aimerions montrer :

Conjecture 6.0.1 (conjecture de Foulkes). Il existe une espèce vectorielle qui soit isomorphe à $\mathbb{E}_b \circ \mathbb{E}_a - \mathbb{E}_a \circ \mathbb{E}_b$, pour $a \leq b$ et $\mathbb{E}_a(V) = \delta_{|V|=a} \mathbb{E}(V)$.

En collaboration avec Josaphat Baolahy, nous travaillons actuellement sur une généralisation de cette conjecture proposée par Baolahy :

Conjecture 6.0.2 (conjecture de Foulkes). Il existe une espèce vectorielle qui soit isomorphe à

$$\mathbb{E}_a \circ \mathbb{E}_\lambda - \mathbb{E}_\lambda \circ \mathbb{E}_a,$$

pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une partition d'entier telle que $a \geq \lambda_i$ pour tout i et $\mathbb{E}_\lambda := \mathbb{E}_{\lambda_1} \cdot \dots \cdot \mathbb{E}_{\lambda_n}$.

J'aimerais calculer l'action du groupe symétrique sur la cohomologie d'autres exemples de posets. L'étude des chaînes dans le poset des 2-partitions non croisées fait apparaître une série génératrice qui pourrait correspondre à des chaînes dans un poset de forêts d'arbres de Cayley. Dans un tel poset, l'espèce des multichaînes $\mathcal{F}_{k,t}^l$ vérifierait

$$\mathcal{F}_{k,t}^l = (\mathcal{E} - 1) \circ (X \left(t\mathcal{F}_{k,t}^l + 1 \right)^k) \quad (6.0.1)$$

j'aimerais définir cet ordre pour comparer les actions du groupe symétrique sur sa cohomologie avec celle du poset des 2-partitions non croisées. Un deuxième exemple possible est donné par une généralisation des hyperarbres : les arbres de Greg, ou arbres phylogénétiques, dont les filets de Greg sont un cas particulier. En collaboration avec Matthieu Josuat-Vergès et Bishal Deb, nous travaillons sur une preuve de l'épluchabilité de ces posets et le calcul de leurs nombres de Möbius. Finalement, un troisième exemple, qui pourrait donner lieu à un sujet de stage de M2, serait de réécrire l'étude de la cohomologie du poset des partitions en termes d'espèces en utilisant la section 2.4 et de retrouver la suspension de Lie de manière combinatoire.

L'étude du treillis de Tamari-Parking elle-même est très riche et pourrait donner lieu à une thèse. Tout d'abord, les arbres de parking m'enthousiasment parce qu'ils fournissent un nouveau point de vue sur les fonctions de parking et sur la combinatoire des nombres de Catalan si on se restreint à un étiquetage préfixe des sommets par exemple. Notamment, la plupart des décompositions utilisées dans la littérature correspondent aux chemins de Dyck et au "premier retour à la diagonale", qui correspond à couper un arbre de parking selon sa branche la plus à droite. Les arbres de parking, eux, suggèrent une composition plus fine puisque chaque sous-arbre de la racine est lui-même un arbre de parking. J'aime particulièrement cette définition récursive. Je pense que les arbres de parking pourraient fournir un nouvel outil pour l'étude de la combinatoire des q, t -Catalans et leurs liens avec les coinvariants diagonaux (voir [Hag08]). Notamment, les statistiques des aires et rebonds semblent être décrites comme suit :

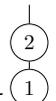
Conjecture 6.0.3. La statistique des aires sur l'arbre de parking T de racine de taille k avec pour sous-arbres de droite à gauche F_1, \dots, F_k est donnée par :

$$\text{aire}(T) = \frac{k(k-1)}{2} + \sum_{j=1}^k (\text{aire}(F_j) + |F_j| \times (j-1)).$$

La statistique des rebonds est donnée sur les arbres de parking par un parcours préfixe qui enregistre le nombre d'étiquettes entre les étapes i et $i + 1$ à la position i dans une liste j et ensuite "saute" de $j[i]$ nœuds. La statistique des rebonds est alors exactement la somme $\sum_{i=1}^p j[i]$.

Les treillis de Tamari-Parking semblent Cohen-Macaulay (d'après l'exploration expérimentale) mais Han a montré qu'ils n'étaient pas CL-épluchables. Peut-être qu'une adaptation des treillis LL de Blass et Sagan [BS97] permettrait de traiter ce problème. J'aimerais aussi adapter les méthodes du même article pour le calcul du nombre de Möbius du treillis de Tamari-Parking. La topologie du poset de Tamari-Parking (sans maximum ajouté) TP_n est tout aussi intéressante. Nous héritons ici de ce que nous savons sur le treillis de Tamari : ce poset est Cohen-Macaulay et la dimension de son unique groupe de cohomologie est $n!$. Cette dimension est aussi celle de l'opérade Assoc (ou de l'espèce vectorielle \mathbb{L}^+). Il serait intéressant de calculer l'action du groupe symétrique sur la cohomologie pour comparer ces deux \mathfrak{S} -modules. Dans la même veine, j'aimerais exhiber une structure d'espèce en posets opéradique sur les posets de Tamari-parking. Notamment, j'aimerais savoir si l'opérade obtenue en cohomologie serait exactement l'opérade Assoc ou si nous obtiendrions une autre structure opéradique. Une autre piste de recherche plus combinatoire serait le dénombrement des intervalles dans les treillis de Tamari-Parking. En effet, le nombre d'intervalles dans les treillis de Tamari compté par Chapoton [Cha05] et le nombre d'intervalles étiquetés dans les treillis de Tamari compté par Bousquet-Mélou, Chapuy et Préville-Ratelle [BCP13] sont de première importance puisqu'ils se relient à l'étude des coinvariants diagonaux et trigonaux. Même si aucune conjecture ne relie directement le nombre d'intervalles dans les treillis de Tamari-Parking et la théorie des représentations, ceux-ci semblent tout de même d'intérêt. Ensuite, notre étude nous met sur la voie de deux autres généralisations : les treillis de m -Tamari-parking (en termes de m -arbres de parking) et les treillis de Stanley (treillis des chemins de Dyck ordonnés par l'inclusion). Pour finir sur une note plus algébrique, définir une structure d'opérade symétrique sur les fonctions de parking est un problème toujours ouvert : les arbres de parking seraient la structure idéale pour ce faire. Je recherche ici une opérade suffisamment régulière, c'est-à-dire quadratique. Elle serait alors engendrée par

deux opérations $x \cdot y$, symétrique correspondant à l'arbre de parking  et $x \prec y$ corres-

pondant à l'arbre de parking . Cette structure serait particulièrement intéressante puisque ces opérations font penser à celles des algèbres tridendriformes. Il a été conjecturé pendant longtemps que l'algèbre tridendriforme sur les fonctions de parking était libre avant que Vong [Von16] ne montre le contraire. Notamment, les dimensions sont compatibles. Peut-être la structure opéradique sur les arbres de parking permettrait la définition de la structure d'algèbre tridendriforme libre sur les fonctions de parking tant recherchée.

Les résultats que nous avons obtenus sur les théorèmes de rigidité semblent indiquer un lien entre les bases PBW pour les opérades et l'existence de deux opérades sur une même espèce : l'une ensembliste et l'autre vectorielle. Plus précisément, j'aimerais savoir si l'on peut déduire de l'existence de deux telles opérades une base PBW de l'opérade vectorielle. Dans une autre direction, j'aimerais obtenir de nouveaux théorèmes de rigidité pour les exemples non encore explorés.

L'étude des structures tridendriformes sur les faces des polytopes d'hypergraphes soulève de nombreuses questions combinatoires et algébriques. D'un point de vue combinatoire, y aurait-il une formule générale pour le nombre de constructions ne dépendant que

de la forme de l'hypergraphe considéré? Les algèbres tridendriformes obtenues dans nos exemples satisfont souvent des équations en plus des équations tridendriformes. Nous aimerions faire la hiérarchie des structures opéradiques associées. Une première étape serait de compléter l'analogie du tableau 4.2.2 pour l'ensemble des familles considérées. Ensuite, des structures d'algèbres de Hopf sont connues pour les associaèdres et les permutoèdres. Peut-on trouver une condition suffisante pour munir une famille de polytopes d'une telle structure? Enfin, nous aimerions aussi trouver des résultats de comparaison, du type de [LR98] : étant donnés deux hypergraphes, si l'un est inclus dans l'autre, quelles relations peut-on en déduire entre les polytopes associés? Entre les algèbres associées?

Je clos l'exposé des pistes de recherche par celles autour de la notion d'espèce en posets opéradique et plus généralement associées aux espèces généralisées. Le poset des hyperarbres et le poset des partitions multipointées ont la même cohomologie. Il serait intéressant d'étudier le poset des hyperarbres multipointés et de voir si cette similitude est le reflet d'un théorème de fibres du type du lemme des fibres de Quillen. Ensuite, j'aimerais identifier des outils opéradiques, dans l'esprit de la dualité de Koszul, qui permettraient le calcul de la cohomologie de la construction cobar à coefficients apparaissant dans la proposition 5.5.6. Certains posets ne sont pas munis d'une action du groupe symétrique : il serait intéressant d'établir une variante de notre construction pour les inclure dans notre étude. Les posets des partitions seraient alors remplacés par les posets des partitions en intervalle. Nous obtiendrions une structure d'opérade non symétrique sur les cohomologies des posets considérés. À l'autre opposé du spectre, j'ai montré dans [Oge13a] qu'il y avait une action de \mathfrak{S}_{n+1} sur HT_n correspondant à la structure anti-cyclique de l'opérade pré-Lie. J'aimerais comprendre si cette structure peut être comprise directement sur les espèces en posets opéradiques. Aussi, la compatibilité min-max demandée est un peu trop restrictive pour certains exemples que nous aimerions considérer comme le poset des topologies finies ou encore le poset de Tamari-Parking. Nous aimerions travailler sur un relâchement de cette condition. Enfin, il reste beaucoup de structures opéradiques à calculer sur des cohomologies de posets connus : c'est le cas des posets des filets de Greg, des posets des topologies finies, des posets des 2-partitions non croisées ou encore des treillis de Tamari-Parking.

Pour finir, l'une des généralisations des espèces est la notion d'*espèces généralisées*, introduite par Fiore, Gambino, Hyland et Winskel [Fio+08]. Ces espèces sont utilisées en sémantique des langages de programmation pour représenter des programmes. L'une des questions qui me motivent particulièrement est l'importation en théorie des espèces généralisées de notions présentes en théorie des espèces, initiée par Christine Tasson dans son projet ANR JCJC S3 dont je fais partie. Par exemple, la dualité de Koszul permet de montrer qu'une certaine espèce virtuelle [Joy86] est l'inverse pour la composition d'une espèce. J'aimerais établir plus généralement les conditions sous lesquelles une espèce vectorielle admet un inverse compositionnel et exporter ces conditions aux espèces généralisées. D'un point de vue sémantique, cela revient à se demander à quelle condition sur un programme celui-ci peut être "inversé". Ici, considérant un programme P qui prend un argument n et renvoie un résultat $P(n)$, j'appelle *inverse* de P un programme Q tel que $Q(P(n))$ renvoie n pour tout argument n valide. Cette piste de recherche est l'objet d'un groupe de travail du GT CombAlg du GDR IFM au printemps 2025.

Je ne peux pas clore ce manuscrit sans évoquer un aspect qui nous touche tous : la parité. Je suis convaincue que la diversité des profils des chercheurs et chercheuses est essentielle non seulement à la qualité et à la pérennité de la recherche, mais aussi à un environnement de travail sain, enrichissant et harmonieux. Cet engagement pour l'égalité et la diversité est au cœur de mes actions, tant en recherche qu'en enseignement. Je travaille à améliorer les conditions de travail de mes collègues et étudiant.e.s au quotidien, par la mise en place

de formations adaptées, comme celle que j'ai montée avec Valérie Berthé en 2021 dédiée aux jeunes parents, d'espaces dédiés, comme une salle d'allaitement, de temps d'échange, comme les Café.e.s mis en place avec Hélène Mathis. Ayant été candidate, je connais la difficulté qu'il peut y avoir à passer un oral devant un jury entièrement masculin et participe régulièrement à des comités de sélection pour fournir aux candidates des conditions aussi proches que possibles de celles des candidats. Il reste encore beaucoup à faire mais j'espère, à l'avenir, avoir la possibilité d'encadrer autant de doctorantes que de doctorants.

- [ABT13] Marcelo AGUIAR, Nantel BERGERON et Nathaniel THIEM. « Hopf monoids from class functions on unitriangular matrices ». In : *Algebra Number Theory* 7.7 (2013), p. 1743-1779. ISSN : 1937-0652,1944-7833. DOI : 10.2140/ant.2013.7.1743. URL : <https://doi.org/10.2140/ant.2013.7.1743>.
- [AL11] Marcelo AGUIAR et Aaron LAUVE. « Lagrange's theorem for Hopf monoids in species ». In : *23rd International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2011)*. T. AO. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2011, p. 15-26.
- [AM10] Marcelo AGUIAR et Swapneel MAHAJAN. *Monoidal functors, species and Hopf algebras*. T. 29. CRM Monograph Series. With forewords by Kenneth Brown and Stephen Chase and André Joyal. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, p. lii+784. ISBN : 978-0-8218-4776-3. DOI : 10.1090/crmm/029. URL : <https://doi.org/10.1090/crmm/029>.
- [AM13] Marcelo AGUIAR et Swapneel MAHAJAN. « Hopf monoids in the category of species ». In : *Hopf algebras and tensor categories*. T. 585. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, p. 17-124. ISBN : 978-0-8218-7564-3. DOI : 10.1090/conm/585/11665. URL : <https://doi.org/10.1090/conm/585/11665>.
- [AM14] Marcelo AGUIAR et Swapneel MAHAJAN. « On the Hadamard product of Hopf monoids ». In : *Canad. J. Math.* 66.3 (2014), p. 481-504. ISSN : 0008-414X,1496-4279. DOI : 10.4153/CJM-2013-005-x. URL : <https://doi.org/10.4153/CJM-2013-005-x>.
- [AM20] Marcelo AGUIAR et Swapneel MAHAJAN. *Bimonoids for hyperplane arrangements*. T. 173. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2020, p. xx+832. ISBN : 978-1-108-49580-6. DOI : 10.1017/9781108863117. URL : <https://doi.org/10.1017/9781108863117>.
- [AM23] Marcelo AGUIAR et Swapneel MAHAJAN. *Coxeter bialgebras*. T. 186. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2023, p. xix+875. ISBN : 978-1-109-24377-3.
- [ARR15] Drew ARMSTRONG, Victor REINER et Brendon RHOADES. « Parking spaces ». In : *Adv. Math.* 269 (2015), p. 647-706. ISSN : 0001-8708. DOI : 10.1016/j.aim.2014.10.012. URL : <https://doi.org/10.1016/j.aim.2014.10.012>.

- [Ava+16] Jean-Christophe AVAL, Adrien BOUSSICAULT, Bérénice DELCROIX-OGER, Florent HIVERT et Patxi LABORDE-ZUBIETA. « Non-ambiguous trees : new results and generalization ». In : *proceedings of FPSAC 2016*. T. BC. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2016, p. 83-94.
- [Ava+21] Jean-Christophe AVAL, Adrien BOUSSICAULT, Bérénice DELCROIX-OGER, Florent HIVERT et Patxi LABORDE-ZUBIETA. « Non-ambiguous trees : new results and generalisation ». In : *European J. Combin.* 95 (2021), Paper No. 103331, 28. ISSN : 0195-6698,1095-9971. DOI : 10.1016/j.ejc.2021.103331. URL : <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2021.103331>.
- [Bau80] Hans J. BAUES. « Geometry of loop spaces and the cobar construction ». In : *Mem. Amer. Math. Soc.* 25.230 (1980), p. ix+171.
- [BB09] Olivier BERNARDI et Nicolas BONICHON. « Intervals in Catalan lattices and realizers of triangulations ». In : *J. Combin. Theory Ser. A* 116.1 (2009), p. 55-75. ISSN : 0097-3165,1096-0899. DOI : 10.1016/j.jcta.2008.05.005. URL : <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2008.05.005>.
- [BB97] Margaret M. BAYER et Keith A. BRANDT. « Discriminantal arrangements, fiber polytopes and formality ». In : *J. Algebraic Combin.* 6.3 (1997), p. 229-246.
- [BC09] N. BERGERON et P. CHOQUETTE. « Hyperoctahedral species ». In : *Sém. Lothar. Combin.* 61A (2009), Art. B61Aj, 22. ISSN : 1286-4889.
- [BCP13] Mireille BOUSQUET-MÉLOU, Guillaume CHAPUY et Louis-François PRÉVILLE-RATELLE. « The representation of the symmetric group on m -Tamari intervals ». In : *Adv. Math.* 247 (2013), p. 309-342. ISSN : 0001-8708,1090-2082. DOI : 10.1016/j.aim.2013.07.014. URL : <https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.07.014>.
- [BCP23] Alin BOSTAN, Frédéric CHYZAK et Vincent PILAUD. « Refined product formulas for Tamari intervals ». Preprint, arXiv:2303.10986. 2023.
- [BCR15] Emily BURGUNDER, Pierre-Louis CURIEN et Maria RONCO. « Free algebraic structures on the permutohedra ». In : *J. Algebra* (2015). URL : <http://arxiv.org/abs/1503.08995>.
- [BD08] Héctor BLANDÍN et Rafael DÍAZ. « Rational combinatorics ». In : *Adv. in Appl. Math.* 40.1 (2008), p. 107-126. ISSN : 0196-8858,1090-2074. DOI : 10.1016/j.aam.2006.12.006. URL : <https://doi.org/10.1016/j.aam.2006.12.006>.
- [BD19] Emily BURGUNDER et Bérénice DELCROIX-OGER. *Confluence laws and Hopf-Borel type theorem for operads*. 2019. arXiv : 1701.01323 [math.CO].
- [BD20] Emily BURGUNDER et Bérénice DELCROIX-OGER. « Structure theorems for dendriform and tridendriform algebras ». In : *Algebraic combinatorics, resurgence, moulds and applications (CARMA)*. Vol. 1. T. 31. IRMA Lect. Math. Theor. Phys. EMS Publ. House, Berlin, 2020, p. 29-66. ISBN : 978-3-03719-204-7.
- [BDH21] Joan BELLIER-MILLÈS, Bérénice DELCROIX-OGER et Eric HOFFBECK. « Operads with compatible CL-shellable partition posets admit a Poincaré-Birkhoff-Witt basis ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 374.11 (2021), p. 8249-8273. ISSN : 0002-9947,1088-6850. DOI : 10.1090/tran/8482. URL : <https://doi.org/10.1090/tran/8482>.
- [BDM17] Emily BURGUNDER, Bérénice DELCROIX-OGER et Dominique MANCHON. « An operad is never free as a pre-Lie algebra ». Preprint, arXiv:1702.01949. 2017.

- [Bec69] Jon BECK. « Distributive laws ». In : *Sem. on Triples and Categorical Homology Theory (ETH, Zürich, 1966/67)*. Springer, Berlin, 1969, p. 119-140.
- [Ber+23] Nantel BERGERON, Rafael S. GONZÁLEZ D'LEÓN, Shu Xiao LI, C. Y. Amy PANG et Yannic VARGAS. « Hopf algebras of parking functions and decorated planar trees ». In : *Adv. in Appl. Math.* 143 (2023), Paper No. 102436, 62. ISSN : 0196-8858,1090-2074. DOI : 10.1016/j.aam.2022.102436. URL : <https://doi.org/10.1016/j.aam.2022.102436>.
- [Ber18] Olivier BERNARDI. « Deformations of the braid arrangement and trees ». In : *Adv. Math.* 335 (2018), p. 466-518.
- [Ber87] François BERGERON. « Une combinatoire du pléthysme ». In : *J. Combin. Theory Ser. A* 46.2 (1987), p. 291-305. ISSN : 0097-3165,1096-0899. DOI : 10.1016/0097-3165(87)90007-0. URL : [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(87\)90007-0](https://doi.org/10.1016/0097-3165(87)90007-0).
- [Ber89a] Claude BERGE. *Hypergraphs*. T. 45. North-Holland Mathematical Library. Combinatorics of finite sets. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1989, p. x+255. ISBN : 0-444-87489-5.
- [Ber89b] François BERGERON. « A combinatorial outlook on symmetric functions ». In : *J. Combin. Theory Ser. A* 50.2 (1989), p. 226-234. ISSN : 0097-3165,1096-0899. DOI : 10.1016/0097-3165(89)90016-2. URL : [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(89\)90016-2](https://doi.org/10.1016/0097-3165(89)90016-2).
- [BFT24] Mathilde BOUVEL, Luca FERRARI et Bridget Eileen TENNER. *Between weak and Bruhat : the middle order on permutations*. 2024. arXiv : 2405.08943 [math.CO]. URL : <https://arxiv.org/abs/2405.08943>.
- [Bir37] Garrett BIRKHOFF. « Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices ». In : *Ann. of Math. (2)* 38.2 (1937), p. 526-532. ISSN : 0003-486X,1939-8980. DOI : 10.2307/1968569. URL : <https://doi.org/10.2307/1968569>.
- [Bir40] Garrett BIRKHOFF. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, New York, 1940, p. v+155.
- [Bjö80] Anders BJÖRNER. « Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 260.1 (1980), p. 159-183. ISSN : 0002-9947. DOI : 10.2307/1999881. URL : <https://doi.org/10.2307/1999881>.
- [BLL98] F. BERGERON, G. LABELLE et P. LEROUX. *Combinatorial species and tree-like structures*. T. 67. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Translated from the 1994 French original by Margaret Readdy, With a foreword by Gian-Carlo Rota. Cambridge University Press, Cambridge, 1998, p. xx+457. ISBN : 0-521-57323-8.
- [BM19] Murray BREMNER et Martin MARKL. « Distributive laws between the three graces ». In : *Theory Appl. Categ.* 34 (2019), Paper No. 41, 1317-1342. ISSN : 1201-561X.
- [Bon+15] Marcello M. BONSAUGUE, Helle H. HANSEN, Alexander KURZ et Jurriaan ROT. « Presenting distributive laws ». In : *Log. Methods Comput. Sci.* 11.3 (2015), 3 :2, 23. ISSN : 1860-5974. DOI : 10.2168/LMCS-11(3:2)2015. URL : [https://doi.org/10.2168/LMCS-11\(3:2\)2015](https://doi.org/10.2168/LMCS-11(3:2)2015).
- [Bon+86] Flavio BONETTI, Gian-Carlo ROTA, Domenico SENATO et Antonietta M. VENEZIA. « Symmetric functions and symmetric species ». In : *Combinatorics '84 (Bari, 1984)*. T. 123. North-Holland Math. Stud. North-Holland, Amsterdam, 1986, p. 107-113.

- [Bor53] Armand BOREL. « Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts ». In : *Ann. of Math. (2)* 57 (1953), p. 115-207. ISSN : 0003-486X.
- [BP12] François BERGERON et Louis-François PRÉVILLE-RATELLE. « Higher trivariate diagonal harmonics via generalized Tamari posets ». English. In : *J. Comb.* 3.3 (2012), p. 317-341. ISSN : 2156-3527. DOI : 10.4310/JOC.2012.v3.n3.a4.
- [BR10] Emily BURGUNDER et Maria RONCO. « Tridendriform structure on combinatorial Hopf algebras. » English. In : *J. Algebra* 324.10 (2010), p. 2860-2883. ISSN : 0021-8693. DOI : 10.1016/j.jalgebra.2010.07.010.
- [Bra+01] Noel BRADY, Jon MCCAMMOND, John MEIER et Andy MILLER. « The pure symmetric automorphisms of a free group form a duality group ». In : *J. Algebra* 246.2 (2001), p. 881-896. ISSN : 0021-8693. DOI : 10.1006/jabr.2001.8944. URL : <https://doi.org/10.1006/jabr.2001.8944>.
- [BS97] Andreas BLASS et Bruce E. SAGAN. « Möbius functions of lattices ». In : *Adv. Math.* 127.1 (1997), p. 94-123. ISSN : 0001-8708,1090-2082. DOI : 10.1006/aima.1997.1616. URL : <https://doi.org/10.1006/aima.1997.1616>.
- [Bur10] Emily BURGUNDER. « A symmetric version of Kontsevich graph complex and Leibniz homology ». In : *J. Lie Theory* 20.1 (2010), p. 127-165. ISSN : 0949-5932.
- [Bur73] Élisabeth BURRONI. « Lois distributives mixtes ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 276 (1973), A897-A900.
- [BV68] J. M. BOARDMAN et R. M. VOGT. « Homotopy-everything H -spaces ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 74 (1968), p. 1117-1122. ISSN : 0002-9904. DOI : 10.1090/S0002-9904-1968-12070-1. URL : <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1968-12070-1>.
- [BV73] J. M. BOARDMAN et R. M. VOGT. *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*. T. Vol. 347. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973, p. x+257.
- [BW83] Anders BJÖRNER et Michelle WACHS. « On lexicographically shellable posets ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 277.1 (1983), p. 323-341. ISSN : 0002-9947. DOI : 10.2307/1999359. URL : <https://doi.org/10.2307/1999359>.
- [BW96] Anders BJÖRNER et Michelle L. WACHS. « Shellable nonpure complexes and posets. I ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 348.4 (1996), p. 1299-1327. ISSN : 0002-9947. DOI : 10.1090/S0002-9947-96-01534-6. URL : <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-96-01534-6>.
- [BW97] Anders BJÖRNER et Michelle L. WACHS. « Shellable nonpure complexes and posets. II ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 349.10 (1997), p. 3945-3975. ISSN : 0002-9947. DOI : 10.1090/S0002-9947-97-01838-2. URL : <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-97-01838-2>.
- [BY90] François BERGERON et Yeong Nan YEH. « The factoriality of the ring of S -species ». In : *J. Combin. Theory Ser. A* 55.2 (1990), p. 194-203. ISSN : 0097-3165,1096-0899. DOI : 10.1016/0097-3165(90)90067-7. URL : [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(90\)90067-7](https://doi.org/10.1016/0097-3165(90)90067-7).
- [Car22] Louis CARLIER. « Hereditary species as monoidal decomposition spaces, comodule bialgebras, and operadic categories ». In : *Int. Math. Res. Not. IMRN* 8 (2022), p. 5745-5780. ISSN : 1073-7928,1687-0247. DOI : 10.1093/imrn/rnaa260. URL : <https://doi.org/10.1093/imrn/rnaa260>.

- [Cat23] Pierre CATOIRE. « Tridendriform structures ». In : *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* 19 (2023), Paper No. 066, 36. ISSN : 1815-0659. DOI : 10.3842/SIGMA.2023.066. URL : <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2023.066>.
- [CD06] Michael CARR et Satyan L. DEVADOSS. « Coxeter complexes and graph-associahedra ». English. In : *Topology Appl.* 153.12 (2006), p. 2155-2168. ISSN : 0166-8641. DOI : 10.1016/j.topol.2005.08.010.
- [CDF11] Michael CARR, Satyan L. DEVADOSS et Stefan FORCEY. « Pseudograph associahedra ». In : *J. Combin. Theory Ser. A* 118.7 (2011), p. 2035-2055. ISSN : 0097-3165,1096-0899. DOI : 10.1016/j.jcta.2011.04.004. URL : <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2011.04.004>.
- [CDO25a] Pierre-Louis CURIEN, Bérénice DELCROIX-OGER et Jovana OBRADOVIĆ. *Restriction, order and shuffles in nestohedra*. 2025.
- [CDO25b] Pierre-Louis CURIEN, Bérénice DELCROIX-OGER et Jovana OBRADOVIĆ. « Tridendriform algebras on hypergraph polytopes ». en. In : *Algebraic Combinatorics* 8.1 (2025), p. 201-234. DOI : 10.5802/alco.401. URL : <https://alco.centre-mersenne.org/articles/10.5802/alco.401/>.
- [CEO20] Charles CURRY, Kurusch EBRAHIMI-FARD et Brynjulf OWREN. « The Magnus expansion and post-Lie algebras ». English. In : *Math. Comput.* 89.326 (2020), p. 2785-2799. ISSN : 0025-5718. DOI : 10.1090/mcom/3541.
- [CFZ02] Frédéric CHAPOTON, Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY. « Polytopal realizations of generalized associahedra ». In : t. 45. 4. Dedicated to Robert V. Moody. 2002, p. 537-566. DOI : 10.4153/CMB-2002-054-1. URL : <https://doi.org/10.4153/CMB-2002-054-1>.
- [Cha00] Frédéric CHAPOTON. « Algèbres de Hopf des permutahédres, associahédres et hypercubes. » French. In : *Adv. Math.* 150.2 (2000), p. 264-275. ISSN : 0001-8708. DOI : 10.1006/aima.1999.1868.
- [Cha01] Frédéric CHAPOTON. « Un endofoncteur de la catégorie des opérades ». In : *Dialgebras and Related Operads*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2001, p. 105-110. ISBN : 978-3-540-45328-4. DOI : 10.1007/3-540-45328-8_4.
- [Cha02a] F. CHAPOTON. « Construction de certaines opérades et bigèbres associées aux polytopes de Stasheff et hypercubes ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 354.1 (2002), p. 63-74. ISSN : 0002-9947. DOI : 10.1090/S0002-9947-01-02809-4. URL : <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-01-02809-4>.
- [Cha02b] Frédéric CHAPOTON. « Opérades différentielles graduées sur les simplexes et les permutoèdres. (Differential graded operads related to simplices and permutohedra). » French. In : *Bull. Soc. Math. Fr.* 130.2 (2002). <http://arxiv.org/abs/math.QA/0102172>, p. 233-251.
- [Cha05] F. CHAPOTON. « Sur le nombre d'intervalles dans les treillis de Tamari ». In : *Sém. Lothar. Combin.* 55 (2005), Art. B55f, 18. ISSN : 1286-4889.
- [Cha07] Frédéric CHAPOTON. « On the Coxeter transformations for Tamari posets ». In : *Canad. Math. Bull.* 50.2 (2007), p. 182-190. ISSN : 0008-4395,1496-4287. DOI : 10.4153/CMB-2007-019-x. URL : <https://doi.org/10.4153/CMB-2007-019-x>.
- [Che20] Eugenia CHENG. « Distributive laws for Lawvere theories ». In : *Compositionality* 2.1 (2020), p. 30. ISSN : 2631-4444.

- [CL01] Frédéric CHAPOTON et Muriel LIVERNET. « Pre-Lie algebras and the rooted trees operad ». In : *Internat. Math. Res. Notices* 8 (2001), p. 395-408. ISSN : 1073-7928. DOI : 10.1155/S1073792801000198. URL : <http://dx.doi.org/10.1155/S1073792801000198>.
- [CL24] Pierre-Louis CURIEN et Guillaume LAPLANTE-ANFOSSI. *Term rewriting on nestohedra*. 2024. arXiv : 2403.15987 [math.CT]. URL : <https://arxiv.org/abs/2403.15987>.
- [COI19] Pierre-Louis CURIEN, Jovana OBRADOVIĆ et Jelena IVANOVIĆ. « Syntactic aspects of hypergraph polytopes ». English. In : *J. Homotopy Relat. Struct.* 14.1 (2019), p. 235-279. ISSN : 2193-8407. DOI : 10.1007/s40062-018-0211-9.
- [CP15] Grégory CHÂTEL et Viviane PONS. « Counting smaller elements in the Tamari and m -Tamari lattices ». In : *J. Combin. Theory Ser. A* 134 (2015), p. 58-97. ISSN : 0097-3165. DOI : 10.1016/j.jcta.2015.03.004. URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcta.2015.03.004>.
- [CT20] Jules CHOUQUET et Christine TASSON. « Taylor expansion for Call-By-Push-Value ». In : *28th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL 2020)*. Sous la dir. de Maribel FERNÁNDEZ et Anca MUSCHOLL. T. 152. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany : Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2020, 16 :1-16 :16. ISBN : 978-3-95977-132-0. DOI : 10.4230/LIPIcs.CSL.2020.16. URL : <https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.CSL.2020.16>.
- [Cur42] Haskell B. CURRY. « The combinatory foundations of mathematical logic ». In : *J. Symbolic Logic* 7 (1942), p. 49-64. ISSN : 0022-4812,1943-5886. DOI : 10.2307/2266302. URL : <https://doi.org/10.2307/2266302>.
- [CV06] Frédéric CHAPOTON et Bruno VALLETTE. « Pointed and multi-pointed partitions of type A and B ». In : *J. Algebraic Combin.* 23.4 (2006), p. 295-316. ISSN : 0925-9899. DOI : 10.1007/s10801-006-8346-x.
- [Dav+21] Alex DAVIES et al. « Advancing mathematics by guiding human intuition with AI ». In : *Nature* 600 (2021). DOI : 10.1038/s41586-021-04086-x.
- [DD25a] Bérénice DELCROIX-OGER et Clément DUPONT. *Hypertrees, postLie and pre-Lie operads*. 2025.
- [DD25b] Bérénice DELCROIX-OGER et Clément DUPONT. *Lie-operads and operadic modules from poset cohomology*. 2025. arXiv : 2505.06094 [math.CO]. URL : <https://arxiv.org/abs/2505.06094>.
- [Del+23] Bérénice DELCROIX-OGER, Guillaume LAPLANTE-ANFOSSI, Vincent PILAUD et Kurt STOECKL. *Cellular diagonals of permutahedra*. 2023. arXiv : 2308.12119 [math.CO].
- [Del14] Bérénice DELCROIX-OGER. « Hyperarbres et Partitions semi-pointées : Aspects combinatoires, algébriques et homologiques ». Thèse de doct. Université Lyon 1, 2014.
- [Del15a] Bérénice DELCROIX-OGER. « Incidence Hopf algebra of the hypertree posets ». In : *Sém. Lothar. Combin.* 72 (2015), Art. B72d, 22. ISSN : 1286-4889.
- [Del15b] Bérénice DELCROIX-OGER. « Semi-pointed partition posets ». In : *Proceedings of FPSAC 2015*. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2015, p. 321-332.

- [Del17] Bérénice DELCROIX-OGER. « Semi-pointed partition posets and species ». In : *J. Algebraic Combin.* 45.3 (2017), p. 857-886. ISSN : 0925-9899. DOI : 10.1007/s10801-016-0727-1. URL : <https://doi.org/10.1007/s10801-016-0727-1>.
- [DG14] Vladimir DOTSENKO et James GRIFFIN. « Cacti and filtered distributive laws ». English. In : *Algebr. Geom. Topol.* 14.6 (2014), p. 3185-3225. ISSN : 1472-2747. DOI : 10.2140/agt.2014.14.3185.
- [DH22] Enrica DUCHI et Corentin HENRIET. « Bijections between fighting fish, planar maps, and Tamari intervals ». In : *Sém. Lothar. Combin.* 86B (2022), Art. 83, 12. ISSN : 1286-4889.
- [DHD23] Rafael S. González D'LEÓN, Joshua HALLAM et Yeison A. Quiceno D. *Whitney Twins, Whitney Duals, and Operadic Partition Posets*. 2023. arXiv : 2307.07480 [math.CO].
- [DHT02] Gérard DUCHAMP, Florent HIVERT et Jean-Yves THIBON. « Noncommutative symmetric functions. VI. Free quasi-symmetric functions and related algebras ». In : *Internat. J. Algebra Comput.* 12.5 (2002), p. 671-717. ISSN : 0218-1967,1793-6500. DOI : 10.1142/S0218196702001139. URL : <https://doi.org/10.1142/S0218196702001139>.
- [DJR20] Bérénice DELCROIX-OGER, Matthieu JOSUAT-VERGÈS et Lucas RANDAZZO. « Some properties of the parking function poset ». In : *Sém. Lothar. Combin.* 84B (2020), Art. 59, 12. ISSN : 1286-4889.
- [DJR22] Bérénice DELCROIX-OGER, Matthieu JOSUAT-VERGÈS et Lucas RANDAZZO. « Some properties of the parking function poset ». In : *Electron. J. Comb.* 29.4 (2022), Paper 4.42, 49 pp. ISSN : 1077-8926. DOI : 10.37236/10714.
- [DK07] Vladimir V. DOTSENKO et Anton S. KHOROSHKIN. « Character formulas for the operad of a pair of compatible brackets and for the bi-Hamiltonian operad ». In : *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 41.1 (2007). <http://arxiv.org/abs/math/0605233>, p. 1-22, 96. ISSN : 0374-1990. DOI : 10.1007/s10688-007-0001-3.
- [DK10] Vladimir DOTSENKO et Anton KHOROSHKIN. « Gröbner bases for operads ». In : *Duke Math. J.* 153.2 (2010), p. 363-396. ISSN : 0012-7094,1547-7398. DOI : 10.1215/00127094-2010-026. URL : <https://doi.org/10.1215/00127094-2010-026>.
- [DL02] Askar DZHUMADIL'DAEV et Clas LÖFWALL. « Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities ». In : *Homology Homotopy Appl.* 4.2, part 1 (2002). The Roos Festschrift volume, 1, p. 165-190. ISSN : 1512-0139.
- [DLL92] Hélène DÉCOSTE, Gilbert LABELLE et Pierre LEROUX. « The functorial composition of species, a forgotten operation ». In : *Discrete Math.* 99.1-3 (1992), p. 31-48. ISSN : 0012-365X,1872-681X. DOI : 10.1016/0012-365X(92)90363-K. URL : [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(92\)90363-K](https://doi.org/10.1016/0012-365X(92)90363-K).
- [Dot20] Vladimir DOTSENKO. « Functorial PBW theorems for post-Lie algebras ». In : *Communications in Algebra* 48.5 (2020), p. 2072-2080. DOI : 10.1080/00927872.2019.1710173. eprint : <https://doi.org/10.1080/00927872.2019.1710173>. URL : <https://doi.org/10.1080/00927872.2019.1710173>.
- [DP11] Kosta DOŠEN et Zoran PETRIĆ. « Hypergraph polytopes ». English. In : *Topology Appl.* 158.12 (2011), p. 1405-1444. ISSN : 0166-8641. DOI : 10.1016/j.topol.2011.05.015.
- [DP15] Kosta DOŠEN et Zoran PETRIĆ. « Weak Cat-operads ». In : *Log. Methods Comput. Sci.* 11.1 (2015), 1 :10, 38.

- [DP95] C. DE CONCINI et C. PROCESI. « Wonderful models of subspace arrangements ». In : *Selecta Math. (N.S.)* 1.3 (1995), p. 459-494. ISSN : 1022-1824,1420-9020. DOI : 10.1007/BF01589496. URL : <https://doi.org/10.1007/BF01589496>.
- [Ede80a] Paul H. EDELMAN. « Chain enumeration and noncrossing partitions ». In : *Discrete Math.* 31.2 (1980), p. 171-180. ISSN : 0012-365X. DOI : 10.1016/0012-365X(80)90033-3. URL : [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(80\)90033-3](https://doi.org/10.1016/0012-365X(80)90033-3).
- [Ede80b] Paul H. EDELMAN. « Zeta polynomials and the Möbius function ». In : *European J. Combin.* 1.4 (1980), p. 335-340. ISSN : 0195-6698. DOI : 10.1016/S0195-6698(80)80034-5. URL : [http://dx.doi.org/10.1016/S0195-6698\(80\)80034-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0195-6698(80)80034-5).
- [Fan18] Wenjie FANG. « Planar triangulations, bridgeless planar maps and Tamari intervals ». In : *European J. Combin.* 70 (2018), p. 75-91. ISSN : 0195-6698,1095-9971. DOI : 10.1016/j.ejc.2017.12.002. URL : <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2017.12.002>.
- [Fan21] Wenjie FANG. « Bijective link between Chapoton's new intervals and bipartite planar maps ». In : *European J. Combin.* 97 (2021), Paper No. 103382, 15. ISSN : 0195-6698,1095-9971. DOI : 10.1016/j.ejc.2021.103382. URL : <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2021.103382>.
- [FGP22] Marcelo FIORE, Zeinab GALAL et Hugo PAQUET. « A combinatorial approach to higher-order structure for polynomial functors ». In : *7th International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction*. T. 228. LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform. Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform., Wadern, 2022, Art. No. 31, 19. ISBN : 978-3-95977-233-4. DOI : 10.4230/lipics.fscd.2022.31. URL : <https://doi.org/10.4230/lipics.fscd.2022.31>.
- [FH24] Éric FUSY et Abel HUMBERT. « Bijections for generalized Tamari intervals via orientations ». In : *European J. Combin.* 117 (2024), Paper No. 103826, 19. ISSN : 0195-6698,1095-9971. DOI : 10.1016/j.ejc.2023.103826. URL : <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2023.103826>.
- [Fio+08] M. FIORE, N. GAMBINO, M. HYLAND et G. WINSKEL. « The Cartesian closed bicategory of generalised species of structures ». In : *J. Lond. Math. Soc. (2)* 77.1 (2008), p. 203-220. ISSN : 0024-6107,1469-7750. DOI : 10.1112/jlms/jdm096. URL : <https://doi.org/10.1112/jlms/jdm096>.
- [Fio+18] M. FIORE, N. GAMBINO, M. HYLAND et G. WINSKEL. « Relative pseudomonads, Kleisli bicategories, and substitution monoidal structures ». In : *Selecta Math. (N.S.)* 24.3 (2018), p. 2791-2830. ISSN : 1022-1824,1420-9020. DOI : 10.1007/s00029-017-0361-3. URL : <https://doi.org/10.1007/s00029-017-0361-3>.
- [FKM16] Soichiro FUJII, Shin-ya KATSUMATA et Paul-André MELLIÈS. « Towards a Formal Theory of Graded Monads ». In : *Foundations of Software Science and Computation Structures*. Sous la dir. de Bart JACOBS et Christof LÖDING. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2016, p. 513-530. ISBN : 978-3-662-49630-5.
- [FM05a] Eva Maria FEICHTNER et Irene MÜLLER. « On the topology of nested set complexes ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 133.4 (2005), p. 999-1006. ISSN : 0002-9939,1088-6826. DOI : 10.1090/S0002-9939-04-07731-7. URL : <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-04-07731-7>.
- [FM05b] Marcelo FIORE et Matías MENNI. « Reflective Kleisli subcategories of the category of Eilenberg-Moore algebras for factorization monads ». In : *Theory Appl. Categ.* 15 (2005), No. 2, 40-65. ISSN : 1201-561X.

- [FM97] Thomas F. FOX et Martin MARKL. « Distributive laws, bialgebras, and cohomology ». In : *Operads : Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995)*. T. 202. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, p. 167-205. DOI : 10.1090/conm/202/02584. URL : <http://dx.doi.org/10.1090/conm/202/02584>.
- [Foi07] Loïc FOISSY. « Bidendriform bialgebras, trees, and free quasi-symmetric functions ». In : *J. Pure Appl. Algebra* 209.2 (2007), p. 439-459. ISSN : 0022-4049,1873-1376. DOI : 10.1016/j.jpaa.2006.06.005. URL : <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2006.06.005>.
- [Foi12] Loïc FOISSY. « Ordered forests and parking functions ». In : *Int. Math. Res. Not. IMRN* 7 (2012), p. 1603-1633. ISSN : 1073-7928,1687-0247. DOI : 10.1093/imrn/rnr061. URL : <https://doi.org/10.1093/imrn/rnr061>.
- [Foi15] Loïc FOISSY. « The Hopf algebra of Fliess operators and its dual pre-Lie algebra ». In : *Comm. Algebra* 43.10 (2015), p. 4528-4552. ISSN : 0092-7872. DOI : 10.1080/00927872.2014.949730. URL : <http://dx.doi.org/10.1080/00927872.2014.949730>.
- [For12] Stefan FORCEY. « Extending the Tamari lattice to some compositions of species ». In : *Associahedra, Tamari lattices and related structures*. T. 299. Progr. Math. Birkhäuser/Springer, Basel, 2012, p. 187-210. DOI : 10.1007/978-3-0348-0405-9_10. URL : https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0405-9_10.
- [FP17] Wenjie FANG et Louis-François PRÉVILLE-RATELLE. « The enumeration of generalized Tamari intervals ». In : *European J. Combin.* 61 (2017), p. 69-84. ISSN : 0195-6698,1095-9971. DOI : 10.1016/j.ejc.2016.10.003. URL : <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2016.10.003>.
- [Fre04] Benoit FRESSE. « Koszul duality of operads and homology of partition posets ». In : *Homotopy theory : relations with algebraic geometry, group cohomology, and algebraic K-theory*. T. 346. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, p. 115-215. DOI : 10.1090/conm/346/06287.
- [FS05] Eva Maria FEICHTNER et Bernd STURMFELS. « Matroid polytopes, nested sets and Bergman fans ». English. In : *Port. Math. (N.S.)* 62.4 (2005), p. 437-468. ISSN : 0032-5155.
- [FS09] Philippe FLAJOLET et Robert SEDGEWICK. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009, p. xiv+810. ISBN : 978-0-521-89806-5. DOI : 10.1017/CB09780511801655. URL : <https://doi.org/10.1017/CB09780511801655>.
- [FS97] William FULTON et Bernd STURMFELS. « Intersection theory on toric varieties ». In : *Topology* 36.2 (1997), p. 335-353.
- [FT67] Haya FRIEDMAN et Dov TAMARI. « Problèmes d'associativité : Une structure de treillis finis induite par une loi demi-associative ». In : *J. Combinatorial Theory* 2 (1967), p. 215-242. ISSN : 0021-9800.
- [Gai15] Andrew GAINER-DEWAR. « Species with an equivariant group action ». In : *Australas. J. Combin.* 63 (2015), p. 202-225. ISSN : 1034-4942,2202-3518.
- [Gal23] Zeinab GALAL. « Fixpoint operators for 2-categorical structures ». In : *2023 38th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*. IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 2023, p. 13. ISBN : 979-8-3503-3587-3.

- [Gir18] Samuele GIRAUDO. *Nonsymmetric operads in combinatorics*. Springer, Cham, 2018, p. ix+172. DOI : 10 . 1007 / 978 - 3 - 030 - 02074 - 3. URL : <https://doi.org/10.1007/978-3-030-02074-3>.
- [GR96] Steven GOLD et Anand RANGARAJAN. « Softmax to Softassign : neural network algorithms for combinatorial optimization ». In : *Journal of Artificial Neural Networks* 2 (1996).
- [Hag08] James HAGLUND. *The q,t -Catalan numbers and the space of diagonal harmonics*. T. 41. University Lecture Series. With an appendix on the combinatorics of Macdonald polynomials. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, p. viii+167. DOI : 10 . 1007 / s10711 - 008 - 9270 - 0. URL : <https://doi.org/10.1007/s10711-008-9270-0>.
- [Hai94] Mark D. HAIMAN. « Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants ». In : *J. Algebraic Combin.* 3.1 (1994), p. 17-76. ISSN : 0925-9899. DOI : 10 . 1023 / A : 1022450120589. URL : <https://doi.org/10.1023/A:1022450120589>.
- [Han24] Hélène HAN. « Treillis de Tamari-Parking ». Mémoire de Master. MPRI, 2024.
- [Han81] Phil HANLON. « The fixed-point partition lattices ». English. In : *Pac. J. Math.* 96 (1981), p. 319-341. ISSN : 1945-5844. DOI : 10 . 2140 / pjm . 1981 . 96 . 319.
- [Hen05] Anthony HENDERSON. « Species over a finite field ». In : *J. Algebraic Combin.* 21.2 (2005), p. 147-161. ISSN : 0925-9899,1572-9192. DOI : 10 . 1007 / s10801 - 005 - 6905 - 1. URL : <https://doi.org/10.1007/s10801-005-6905-1>.
- [HLL98] G abor HETYEI, Gilbert LABELLE et Pierre LEROUX. « Cubical species and non-associative algebras ». In : *Adv. in Appl. Math.* 21.3 (1998), p. 499-546. ISSN : 0196-8858,1090-2074. DOI : 10 . 1006 / aama . 1998 . 0614. URL : <https://doi.org/10.1006/aama.1998.0614>.
- [Hof10] Eric HOFFBECK. « A Poincaré-Birkhoff-Witt criterion for Koszul operads ». In : *Manuscripta Math.* 131.1-2 (2010), p. 87-110. ISSN : 0025-2611. DOI : 10 . 1007 / s00229 - 009 - 0303 - 2. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00229-009-0303-2>.
- [How80] W. A. HOWARD. « The formulae-as-types notion of construction ». In : *To H. B. Curry : essays on combinatory logic, lambda calculus and formalism*. Academic Press, London-New York, 1980, p. 480-490. ISBN : 0-12-349050-2.
- [HP91] Peter HILTON et Jean PEDERSEN. « Catalan numbers, their generalization, and their uses ». In : *Math. Intelligencer* 13.2 (1991), p. 64-75.
- [HT21] Martin HYLAND et Christine TASSON. « The linear-non-linear substitution 2-monad ». In : *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 333 (f ev. 2021), p. 215-229. ISSN : 2075-2180. DOI : 10 . 4204 / eptcs . 333 . 15. URL : <http://dx.doi.org/10.4204/EPTCS.333.15>.
- [HW95] Phil HANLON et Michelle WACHS. « On Lie k -algebras ». In : *Adv. Math.* 113.2 (1995), p. 206-236. ISSN : 0001-8708. DOI : 10 . 1006 / aima . 1995 . 1038.
- [JMM06] Craig JENSEN, Jon MCCAMMOND et John MEIER. « The integral cohomology of the group of loops ». In : *Geom. Topol.* 10 (2006). <http://arxiv.org/abs/0903.0140>, 759-784 (electronic). ISSN : 1465-3060. DOI : 10 . 2140 / gt . 2006 . 10 . 759. URL : <http://dx.doi.org/10.2140/gt.2006.10.759>.

- [JMM07] Craig JENSEN, Jon MCCAMMOND et John MEIER. « The Euler characteristic of the Whitehead automorphism group of a free product ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 359.6 (2007). <http://arxiv.org/abs/math/0601694>, 2577-2595 (electronic). ISSN : 0002-9947. DOI : 10.1090/S0002-9947-07-03967-0. URL : <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-07-03967-0>.
- [Joy81] André JOYAL. « Une théorie combinatoire des séries formelles ». In : *Adv. in Math.* 42.1 (1981), p. 1-82. ISSN : 0001-8708. DOI : 10.1016/0001-8708(81)90052-9. URL : [http://dx.doi.org/10.1016/0001-8708\(81\)90052-9](http://dx.doi.org/10.1016/0001-8708(81)90052-9).
- [Joy86] André JOYAL. « Foncteurs analytiques et espèces de structures ». In : *Combinatoire énumérative (Montreal, Que., 1985/Quebec, Que., 1985)*. T. 1234. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1986, p. 126-159. DOI : 10.1007/BFb0072514. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0072514>.
- [JP03] Bart JACOBS et Erik POLL. « Coalgebras and monads in the semantics of Java ». In : *Theoretical Computer Science* 291.3 (2003). Algebraic Methodology and Software Technology, p. 329-349. ISSN : 0304-3975. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0304-3975\(02\)00366-3](https://doi.org/10.1016/S0304-3975(02)00366-3). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397502003663>.
- [Kla70] David A. KLARNER. « Correspondences between plane trees and binary sequences ». In : *J. Combinatorial Theory* 9 (1970), p. 401-411.
- [Koz08] Dmitry KOZLOV. *Combinatorial algebraic topology*. T. 21. Algorithms and Computation in Mathematics. Springer, Berlin, 2008, p. xx+389. ISBN : 978-3-540-71961-8. DOI : 10.1007/978-3-540-71962-5. URL : <https://doi.org/10.1007/978-3-540-71962-5>.
- [Kre72] G. KREWERAS. « Sur les partitions non croisées d'un cycle ». In : *Discrete Math.* 1.4 (1972), p. 333-350. ISSN : 0012-365X. DOI : 10.1016/0012-365X(72)90041-6. URL : [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(72\)90041-6](https://doi.org/10.1016/0012-365X(72)90041-6).
- [KS23] Younesse KADDAR et Sam STATON. « A model of stochastic memoization and name generation in probabilistic programming : categorical semantics via monads on presheaf categories ». In : *Proceedings of the 39th Conference on the Mathematical Foundations of Programming Semantics, MFPS XXXIX, Indiana University, Bloomington, IN, USA, June 21-23, 2023*. Sous la dir. de Marie KERJEAN et Paul Blain LEVY. T. 3. EPTICS. EpiSciences, 2023. DOI : 10.46298/ENTICS.12291. URL : <https://doi.org/10.46298/entics.12291>.
- [KSS84] Jeff KAHN, Michael SAKS et Dean STURTEVANT. « A topological approach to evasiveness ». In : *Combinatorica* 4.4 (1984), p. 297-306. ISSN : 0209-9683. DOI : 10.1007/BF02579140. URL : <https://doi.org/10.1007/BF02579140>.
- [KW66] Allan G. KONHEIM et Benjamin WEISS. « An occupancy discipline and applications ». English. In : *SIAM J. Appl. Math.* 14 (1966), p. 1266-1274. ISSN : 0036-1399. DOI : 10.1137/0114101.
- [Lam68] Joachim LAMBEK. « Deductive systems and categories. I. Syntactic calculus and residuated categories ». In : *Math. Systems Theory* 2 (1968), p. 287-318. ISSN : 0025-5661. DOI : 10.1007/BF01703261. URL : <https://doi.org/10.1007/BF01703261>.
- [Lam69] Joachim LAMBEK. « Deductive systems and categories. II. Standard constructions and closed categories ». In : *Category Theory, Homology Theory and their Applications, I (Battelle Institute Conference, Seattle, Wash., 1968, Vol. One)*. T. No. 86. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin-New York, 1969, p. 76-122.

- [Lap22a] Guillaume LAPLANTE-ANFOSSI. « Cellular approximations of diagonal applications of operadic polytopes ». Theses. Université Paris-Nord - Paris XIII, juin 2022. URL : <https://theses.hal.science/tel-03945476>.
- [Lap22b] Guillaume LAPLANTE-ANFOSSI. « The diagonal of the operahedra ». In : *Adv. Math.* 405 (2022), Paper No. 108494, 50.
- [Liv06] Muriel LIVERNET. « A rigidity theorem for pre-Lie algebras ». In : *J. Pure Appl. Algebra* 207.1 (2006), p. 1-18. ISSN : 0022-4049. DOI : 10.1016/j.jpaa.2005.10.014. URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jpaa.2005.10.014>.
- [LM23] Guillaume LAPLANTE-ANFOSSI et Thibaut MAZUIR. « The diagonal of the multiplihedra and the tensor product of A_∞ -morphisms ». In : *J. Éc. polytech. Math.* 10 (2023), p. 405-446.
- [LMW15] Muriel LIVERNET, Bachuki MESABLISHVILI et Robert WISBAUER. « Generalised bialgebras and entwined monads and comonads ». In : *J. Pure Appl. Algebra* 219.8 (2015), p. 3263-3278. ISSN : 0022-4049. DOI : 10.1016/j.jpaa.2014.10.013. URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jpaa.2014.10.013>.
- [Lod04] Jean-Louis LODAY. « Realization of the Stasheff polytope ». In : *Arch. Math. (Basel)* 83.3 (2004), p. 267-278. ISSN : 0003-889X,1420-8938. DOI : 10.1007/s00013-004-1026-y. URL : <https://doi.org/10.1007/s00013-004-1026-y>.
- [Lod08] Jean-Louis LODAY. « Generalized bialgebras and triples of operads ». In : *Astérisque* 320 (2008), p. x+116. ISSN : 0303-1179.
- [Lod96] Jean-Louis LODAY. « La renaissance des opérades ». In : *Astérisque* 237 (1996). Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95, Exp. No. 792, 3, 47-74. ISSN : 0303-1179.
- [Lor24] Fosco LOREGIAN. « Automata and coalgebras in categories of species ». In : *Coalgebraic methods in computer science*. T. 14617. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Cham, 2024, p. 65-92. DOI : 10.1007/978-3-031-66438-0_4. URL : https://doi.org/10.1007/978-3-031-66438-0_4.
- [LR02] Jean-Louis LODAY et Maria O. RONCO. « Order structure on the algebra of permutations and of planar binary trees ». English. In : *J. Algebr. Comb.* 15.3 (2002), p. 253-270. ISSN : 0925-9899. DOI : 10.1023/A:1015064508594.
- [LR04] Jean-Louis LODAY et Maria RONCO. « Trialgebras and families of polytopes ». English. In : *Homotopy theory*. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2004, p. 369-398. ISBN : 0-8218-3285-9.
- [LR06] Jean-Louis LODAY et María RONCO. « On the structure of cofree Hopf algebras ». In : *J. Reine Angew. Math.* 592 (2006), p. 123-155. ISSN : 0075-4102,1435-5345. DOI : 10.1515/CRELLE.2006.025. URL : <https://doi.org/10.1515/CRELLE.2006.025>.
- [LR13] Jean-Louis LODAY et María RONCO. « Permutads ». In : *J. Combin. Theory Ser. A* 120.2 (2013), p. 340-365.
- [LR98] Jean-Louis LODAY et María O. RONCO. « Hopf algebra of the planar binary trees ». In : *Adv. Math.* 139.2 (1998), p. 293-309. ISSN : 0001-8708. DOI : 10.1006/aima.1998.1759. URL : <http://dx.doi.org/10.1006/aima.1998.1759>.
- [LSV97] Jean-Louis LODAY, James D. STASHEFF et Alexander A. VORONOV, éd. *Operads, proceedings of renaissance conferences*. English. T. 202. Contemp. Math. Providence, RI : American Mathematical Society, 1997. ISBN : 0-8218-0513-4. DOI : 10.1090/conm/202.

- [LV12] Jean-Louis LODAY et Bruno VALLETTE. *Algebraic operads*. T. 346. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer, Heidelberg, 2012, p. xxiv+634. ISBN : 978-3-642-30361-6. DOI : 10.1007/978-3-642-30362-3.
- [Mar15] Eric MARBERG. « Strong forms of linearization for Hopf monoids in species ». In : *J. Algebraic Combin.* 42.2 (2015), p. 391-428. ISSN : 0925-9899,1572-9192. DOI : 10.1007/s10801-015-0585-2. URL : <https://doi.org/10.1007/s10801-015-0585-2>.
- [Mar20] Martin MARKL. « Permutads via operadic categories, and the hidden associahedron ». In : *J. Combin. Theory Ser. A* 175 (2020), p. 105277, 40. ISSN : 0097-3165,1096-0899. DOI : 10.1016/j.jcta.2020.105277. URL : <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2020.105277>.
- [Mar96a] Martin MARKL. « Cotangent cohomology of a category and deformations ». In : *J. Pure Appl. Algebra* 113.2 (1996), p. 195-218. ISSN : 0022-4049. DOI : 10.1016/0022-4049(95)00152-2. URL : [http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049\(95\)00152-2](http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049(95)00152-2).
- [Mar96b] Martin MARKL. « Distributive laws and Koszulness ». English. In : *Ann. Inst. Fourier* 46.2 (1996), p. 307-323. ISSN : 0373-0956. DOI : 10.5802/aif.1516.
- [Mas+21] Naruki MASUDA, Hugh THOMAS, Andy TONKS et Bruno VALLETTE. « The diagonal of the associahedra ». In : *J. Éc. polytech. Math.* 8 (2021), p. 121-146.
- [May72] J. P. MAY. *The geometry of iterated loop spaces*. T. Vol. 271. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, p. viii+175.
- [Mel19] Paul-André MELLIÈS. « Template games and differential linear logic ». In : *2019 34th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*. IEEE, [Piscataway], NJ, 2019, [13 pp.] ISBN : 978-1-7281-3608-0.
- [Mén10] Miguel A. MÉNDEZ. « Koszul duality for monoids and the operad of enriched rooted trees ». In : *Adv. in Appl. Math.* 44.3 (2010), p. 261-297. ISSN : 0196-8858,1090-2074. DOI : 10.1016/j.aam.2009.05.003. URL : <https://doi.org/10.1016/j.aam.2009.05.003>.
- [Mén15] Miguel A. MÉNDEZ. *Set operads in combinatorics and computer science*. Springer-Briefs in Mathematics. Springer, Cham, 2015, p. xvi+129. DOI : 10.1007/978-3-319-11713-3. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-11713-3>.
- [Mén93] Miguel MÉNDEZ. « Multisets and the combinatorics of symmetric functions ». In : *Adv. Math.* 102.1 (1993), p. 95-125. ISSN : 0001-8708,1090-2082. DOI : 10.1006/aima.1993.1057. URL : <https://doi.org/10.1006/aima.1993.1057>.
- [MM04] Jon MCCAMMOND et John MEIER. « The hypertree poset and the ℓ^2 -Betti numbers of the motion group of the trivial link ». In : *Math. Ann.* 328.4 (2004), p. 633-652. ISSN : 0025-5831. DOI : 10.1007/s00208-003-0499-5. URL : <https://doi.org/10.1007/s00208-003-0499-5>.
- [MM65] John W. MILNOR et John C. MOORE. « On the structure of Hopf algebras ». In : *Ann. of Math.* (2) 81 (1965), p. 211-264. ISSN : 0003-486X. DOI : 10.2307/1970615. URL : <https://doi.org/10.2307/1970615>.
- [MM96] Darryl MCCULLOUGH et Andy MILLER. « Symmetric automorphisms of free products ». In : *Mem. Amer. Math. Soc.* 122.582 (1996), p. viii+97. ISSN : 0065-9266. DOI : 10.1090/memo/0582. URL : <https://doi.org/10.1090/memo/0582>.

- [Mor05] Kent E. MORRISON. « An introduction to q -species ». In : *Electron. J. Combin.* 12 (2005), Research Paper 62, 15. ISSN : 1077-8926. DOI : 10 . 37236 / 1959. URL : <https://doi.org/10.37236/1959>.
- [Mos11] Peter D. MOSSES. « VDM semantics of programming languages : combinators and monads ». In : *Form. Asp. Comput.* 23.2 (mars 2011), p. 221-238. ISSN : 0934-5043. DOI : 10 . 1007 / s00165 - 009 - 0145 - 4. URL : <https://doi.org/10.1007/s00165-009-0145-4>.
- [MR95] Claudia MALVENUTO et Christophe REUTENAUER. « Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra ». English. In : *J. Algebra* 177.3 (1995), p. 967-982. ISSN : 0021-8693. DOI : 10 . 1006 / jabr . 1995 . 1336.
- [MS06] Martin MARKL et Steve SHNIDER. « Associahedra, cellular W -construction and products of A_∞ -algebras ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 358.6 (2006), p. 2353-2372.
- [MS89] Yurii I. MANIN et V. V. SCHECHTMAN. « Arrangements of hyperplanes, higher braid groups and higher Bruhat orders ». In : *Algebraic number theory*. T. 17. Adv. Stud. Pure Math. Academic Press, Boston, MA, 1989, p. 289-308.
- [MSS02] Martin MARKL, Steve SHNIDER et Jim STASHEFF. *Operads in algebra, topology and physics*. T. 96. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002, p. x+349. ISBN : 0-8218-2134-2.
- [Müh15] Henri MÜHLE. *The Topology of the m -Tamari Lattices*. 2015. arXiv : 1201 . 2020 [math.CO]. URL : <https://arxiv.org/abs/1201.2020>.
- [Mul92] Philip S. MULRY. « Monads and Algebras in the Semantics of Partial Data Types ». In : *Theor. Comput. Sci.* 99.1 (1992), p. 141-155. DOI : 10 . 1016 / 0304 - 3975 (92) 90176 - G. URL : [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(92\)90176-G](https://doi.org/10.1016/0304-3975(92)90176-G).
- [Mul98] Philip S. MULRY. « Monads in semantics ». In : *US-Brazil Joint Workshop on the Formal Foundations of Software Systems (Rio de Janeiro, 1997/New Orleans, LA, 1997)*. T. 14. Electron. Notes Theor. Comput. Sci. Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 1998, 12 pp.
- [Mun84] James R. MUNKRES. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984, p. ix+454. ISBN : 0-201-04586-9.
- [MW08] H. Z. MUNTKE-KAAS et W. M. WRIGHT. « On the Hopf algebraic structure of Lie group integrators. » English. In : *Found. Comput. Math.* 8.2 (2008), p. 227-257. ISSN : 1615-3375. DOI : 10 . 1007 / s10208 - 006 - 0222 - 5.
- [MY91] Miguel MÉNDEZ et Julia S. YANG. « Möbius species ». In : *Adv. Math.* 85.1 (1991), p. 83-128. ISSN : 0001-8708,1090-2082. DOI : 10 . 1016 / 0001 - 8708 (91) 90051 - 8. URL : [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(91\)90051-8](https://doi.org/10.1016/0001-8708(91)90051-8).
- [NR85] Oscar NAVA et Gian-Carlo ROTA. « Plethysm, categories, and combinatorics ». In : *Adv. in Math.* 58.1 (1985), p. 61-88. ISSN : 0001-8708. DOI : 10 . 1016 / 0001 - 8708 (85) 90049 - 0. URL : [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(85\)90049-0](https://doi.org/10.1016/0001-8708(85)90049-0).
- [NT06] Jean-Christophe NOVELLI et Jean-Yves THIBON. « Polynomial realizations of some trialgebras ». In : *18th Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC'06)*. 1. (12 pp.) San Diego, USA, France, 2006, p. 243-254. URL : <https://hal.science/hal-00622743>.

- [NT07] Jean-Christophe NOVELLI et Jean-Yves THIBON. « Hopf algebras and dendri-form structures arising from parking functions ». In : *Fund. Math.* 193.3 (2007), p. 189-241. ISSN : 0016-2736,1730-6329. DOI : 10.4064/fm193-3-1. URL : <https://doi.org/10.4064/fm193-3-1>.
- [NT20] Jean-Christophe NOVELLI et Jean-Yves THIBON. « Duplicial algebras, parking functions, and Lagrange inversion ». In : *Algebraic combinatorics, resurgence, moulds and applications (CARMA). Vol. 1.* T. 31. IRMA Lect. Math. Theor. Phys. EMS Publ. House, Berlin, 2020, p. 263-290. ISBN : 978-3-03719-204-7.
- [NT21] Norihiro NAKASHIMA et Shuhei TSUJIE. « Enumeration of flats of the extended Catalan and Shi arrangements with species ». In : *J. Integer Seq.* 24.9 (2021), Art. 21.9.2, 21. ISSN : 1530-7638.
- [OEI24] OEIS FOUNDATION INC. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)*. 2024. URL : <http://oeis.org/>.
- [Oge13a] Bérénice OGER. « Action of the symmetric groups on the homology of the hypertree posets ». In : *J. Algebraic Combin.* 38.4 (2013), p. 915-945. ISSN : 0925-9899. DOI : 10.1007/s10801-013-0432-2. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s10801-013-0432-2>.
- [Oge13b] Bérénice OGER. « Decorated hypertrees ». In : *J. Combin. Theory Ser. A* 120.7 (2013), p. 1871-1905. ISSN : 0097-3165. DOI : 10.1016/j.jcta.2013.07.006. URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcta.2013.07.006>.
- [OPM14] Dominic A. ORCHARD, Tomas PETRICEK et Alan MYCROFT. « The semantic marriage of monads and effects ». In : *CoRR abs/1401.5391* (2014). arXiv : 1401.5391. URL : <http://arxiv.org/abs/1401.5391>.
- [OT92] Peter ORLIK et Hiroaki TERAQ. *Arrangements of hyperplanes*. T. 300. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1992, p. xviii+325. ISBN : 3-540-55259-6. DOI : 10.1007/978-3-662-02772-1. URL : <https://doi.org/10.1007/978-3-662-02772-1>.
- [PB23] Indrasen POOLA et Velibor BOZIC. « Guiding AI with human intuition for solving mathematical problems in Chat GPT ». In : *Int. Journ. of Eng. & Sci. Res.* 11 (juill. 2023).
- [Pos09] Alexander POSTNIKOV. « Permutohedra, associahedra, and beyond ». English. In : *Int. Math. Res. Not.* 2009.6 (2009), p. 1026-1106. ISSN : 1073-7928. DOI : 10.1093/imrn/rnn153.
- [PR04] Frédéric PATRAS et Christophe REUTENAUER. « On descent algebras and twisted bialgebras ». In : *Mosc. Math. J.* 4.1 (2004), p. 199-216, 311. ISSN : 1609-3321,1609-4514. DOI : 10.17323/1609-4514-2004-4-1-199-216. URL : <https://doi.org/10.17323/1609-4514-2004-4-1-199-216>.
- [PR06] Patricia PALACIOS et Maria O. RONCO. « Weak Bruhat order on the set of faces of the permutohedron and the associahedron ». In : *J. Algebra* 299.2 (2006), p. 648-678.
- [PS00] Alexander POSTNIKOV et Richard P. STANLEY. « Deformations of Coxeter hyperplane arrangements ». In : t. 91. 1-2. In memory of Gian-Carlo Rota. 2000, p. 544-597.

- [PW02] John POWER et Hiroshi WATANABE. « Combining a monad and a comonad ». In : t. 280. 1-2. Coalgebraic methods in computer science (Amsterdam, 1999). 2002, p. 137-162. DOI : 10.1016/S0304-3975(01)00024-X. URL : [https://doi.org/10.1016/S0304-3975\(01\)00024-X](https://doi.org/10.1016/S0304-3975(01)00024-X).
- [Qui78] Daniel QUILLEN. « Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group ». English. In : *Adv. Math.* 28 (1978), p. 101-128. ISSN : 0001-8708. DOI : 10.1016/0001-8708(78)90058-0.
- [Raj93] Dayanand S. RAJAN. « The equations $D^k Y = X^n$ in combinatorial species ». In : *Discrete Math.* 118.1-3 (1993), p. 197-206. ISSN : 0012-365X,1872-681X. DOI : 10.1016/0012-365X(93)90061-W. URL : [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(93\)90061-W](https://doi.org/10.1016/0012-365X(93)90061-W).
- [Rho14] Brendon RHOADES. « Parking structures : Fuss analogs ». In : *J. Algebraic Combin.* 40.2 (2014), p. 417-473. ISSN : 0925-9899. DOI : 10.1007/s10801-013-0494-1. URL : <https://doi.org/10.1007/s10801-013-0494-1>.
- [Ron12] María RONCO. « Generalized Tamari order ». English. In : *Associahedra, Tamari lattices and related structures. Tamari memorial Festschrift*. Basel : Birkhäuser, 2012, p. 339-350. DOI : 10.1007/978-3-0348-0405-9_17.
- [Rot64] Gian-Carlo ROTA. « On the foundations of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions ». In : *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* 2 (1964), 340-368 (1964).
- [Sch87] William R. SCHMITT. « Antipodes and incidence coalgebras ». In : *J. Combin. Theory Ser. A* 46.2 (1987), p. 264-290. ISSN : 0097-3165. DOI : 10.1016/0097-3165(87)90006-9. URL : [http://dx.doi.org/10.1016/0097-3165\(87\)90006-9](http://dx.doi.org/10.1016/0097-3165(87)90006-9).
- [Sch93] William R. SCHMITT. « Hopf algebras of combinatorial structures ». In : *Canad. J. Math.* 45.2 (1993), p. 412-428. ISSN : 0008-414X,1496-4279. DOI : 10.4153/CJM-1993-021-5. URL : <https://doi.org/10.4153/CJM-1993-021-5>.
- [Sch94] William R. SCHMITT. « Incidence Hopf algebras ». In : *J. Pure Appl. Algebra* 96.3 (1994), p. 299-330. ISSN : 0022-4049. DOI : 10.1016/0022-4049(94)90105-8. URL : [http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049\(94\)90105-8](http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049(94)90105-8).
- [Sek85] Milan SEKANINA. « Functors and enumeration for ordered sets ». In : *Contributions to general algebra, 3 (Vienna, 1984)*. Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna, 1985, p. 341-353. ISBN : 3-209-00591-5.
- [Ser51] Jean-Pierre SERRE. « Homologie singulière des espaces fibrés. Applications ». In : *Ann. of Math. (2)* 54 (1951), p. 425-505. ISSN : 0003-486X. DOI : 10.2307/1969485. URL : <https://doi.org/10.2307/1969485>.
- [Shi86] Jian Yi SHI. *The Kazhdan-Lusztig cells in certain affine Weyl groups*. T. 1179. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1986, p. x+307.
- [Shi87] Jian Yi SHI. « Sign types corresponding to an affine Weyl group ». In : *J. London Math. Soc. (2)* 35.1 (1987), p. 56-74.
- [SK93] STEPHEN BROOKES et KATHRYN VAN STONE. « Monads and Comonads in Intensional Semantics ». In : (jan. 1993). DOI : 10.21236/ada266522.
- [Sta07] Richard P. STANLEY. « An introduction to hyperplane arrangements ». In : *Geometric combinatorics*. T. 13. IAS/Park City Math. Ser. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, p. 389-496. DOI : 10.1090/pcms/013/08. URL : <https://doi.org/10.1090/pcms/013/08>.

- [Sta12] Richard P. STANLEY. *Enumerative combinatorics. Volume 1*. Second. T. 49. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2012, p. xiv+626. ISBN : 978-1-107-60262-5.
- [Sta63] James Dillon STASHEFF. « Homotopy associativity of H -spaces. I, II ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 108 (1963). 108 (1963), 275-292; *ibid*, p. 293-312. ISSN : 0002-9947,1088-6850. DOI : 10 . 1090 / s0002 - 9947 - 1963 - 0158400 - 5. URL : <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1963-0158400-5>.
- [Sta74] Richard P. STANLEY. « Combinatorial reciprocity theorems ». In : *Advances in Math.* 14 (1974), p. 194-253. ISSN : 0001-8708.
- [Sta82] Richard P. STANLEY. « Some aspects of groups acting on finite posets ». English. In : *J. Comb. Theory, Ser. A* 32 (1982), p. 132-161. ISSN : 0097-3165. DOI : 10 . 1016 / 0097 - 3165 (82) 90017 - 6.
- [Stu21] Christian STUMP. « Artificial intelligence aids intuition in mathematical discovery ». In : *Nature* 600 (2021). DOI : 10 . 1038 / d41586 - 021 - 03512 - 4.
- [SU04] Samson SANEBLIDZE et Ronald UMBLE. « Diagonals on the permutahedra, multiplihedra and associahedra ». In : *Homology Homotopy Appl.* 6.1 (2004), p. 363-411.
- [SU22] Samson SANEBLIDZE et Ronald UMBLE. « Comparing Diagonals on the Associahedra ». Preprint, arXiv:2207.08543. 2022.
- [SV88] Domenico SENATO et Antonietta M. VENEZIA. « Polynomial species and connections among bases of the symmetric polynomials ». In : *Combinatorics '86 (Trento, 1986)*. T. 37. Ann. Discrete Math. North-Holland, Amsterdam, 1988, p. 405-412. ISBN : 0-444-70369-1. DOI : 10 . 1016 / S0167 - 5060 (08) 70263 - 2. URL : [https://doi.org/10.1016/S0167-5060\(08\)70263-2](https://doi.org/10.1016/S0167-5060(08)70263-2).
- [SVY97] D. SENATO, A. VENEZIA et J. YANG. « Möbius polynomial species ». In : *Discrete Math.* 173.1-3 (1997), p. 229-256. ISSN : 0012-365X,1872-681X. DOI : 10 . 1016 / S0012 - 365X (96) 00133 - 1. URL : [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)00133-1](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00133-1).
- [Tam22] Pedro TAMAROFF. « The cohomology of coalgebras in species ». In : *Comm. Algebra* 50.7 (2022), p. 2811-2830. ISSN : 0092-7872,1532-4125. DOI : 10 . 1080 / 00927872 . 2021 . 2021219. URL : <https://doi.org/10.1080/00927872.2021.2021219>.
- [Tam62] Dov TAMARI. « The algebra of bracketings and their enumeration ». In : *Nieuw Arch. Wisk.* (3) 10 (1962), p. 131-146. ISSN : 0028-9825.
- [TAO18] Takeshi TSUKADA, Kazuyuki ASADA et C.-H. Luke ONG. « Species, profunctors and Taylor expansion weighted by SMCC. A unified framework for modelling nondeterministic, probabilistic and quantum programs ». In : *LICS '18—33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. ACM, New York, 2018, [10 pp.] ISBN : 978-1-4503-5583-4. DOI : 10 . 1145 / 3209108 . 3209157. URL : <https://doi.org/10.1145/3209108.3209157>.
- [Tas18] Christine TASSON. « Models of Distributed, Differential and Probabilistic Computation ». Habilitation à diriger des recherches. Université Paris Diderot - Paris 7 - Sorbonne Paris Cité, nov. 2018. URL : <https://theses.hal.science/tel-01953502>.

- [TP97] Daniele TURI et Gordon PLOTKIN. « Towards a mathematical operational semantics ». In : *Proceedings of Twelfth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. IEEE. 1997, p. 280-291.
- [Val07] Bruno VALLETTE. « Homology of generalized partition posets ». In : *J. Pure Appl. Algebra* 208.2 (2007), p. 699-725. ISSN : 0022-4049. DOI : 10.1016/j.jpaa.2006.03.012.
- [Van04] Pepijn VAN DER LAAN. « Operads : Hopf algebras and coloured Koszul duality ». Thèse de doct. Utrecht University, 2004.
- [Van73] Donovan H. VAN OSDOL. « Bicohomology theory ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 183 (1973), p. 449-476. ISSN : 0002-9947,1088-6850. DOI : 10.2307/1996479. URL : <https://doi.org/10.2307/1996479>.
- [Von16] Vincent VONG. « On (non-) freeness of some tridendriform algebras ». In : *28th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2016)*. T. BC. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2016, p. 1183-1194.
- [Wac07] Michelle L. WACHS. « Poset topology : tools and applications ». In : *Geometric combinatorics*. T. 13. IAS/Park City Math. Ser. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, p. 497-615. DOI : 10.1090/pcms/013/09. URL : <https://doi.org/10.1090/pcms/013/09>.
- [Wag21] Adam WAGNER. « Constructions in combinatorics via neural networks ». Avr. 2021. DOI : 10.48550/arXiv.2104.14516.
- [Whi20] Jacob A. WHITE. « On Cohen-Macaulay Hopf monoids in species ». In : *Sém. Lothar. Combin.* 84B (2020), Art. 84, 12. ISSN : 1286-4889.
- [Wit37] Ernst WITT. « Treue Darstellung Liescher Ringe ». In : *J. Reine Angew. Math.* 177 (1937), p. 152-160. ISSN : 0075-4102,1435-5345. DOI : 10.1515/crll.1937.177.152. URL : <https://doi.org/10.1515/crll.1937.177.152>.
- [Yan01] Catherine H. YAN. « Generalized parking functions, tree inversions, and multi-colored graphs ». In : t. 27. 2-3. Special issue in honor of Dominique Foata's 65th birthday (Philadelphia, PA, 2000). 2001, p. 641-670. DOI : 10.1006/aama.2001.0754. URL : <https://doi.org/10.1006/aama.2001.0754>.
- [Zas02] Thomas ZASLAVSKY. « Perpendicular dissections of space ». English. In : *Discrete Comput. Geom.* 27.3 (2002), p. 303-351. ISSN : 0179-5376. DOI : 10.1007/s00454-001-0073-4.
- [Zas75] Thomas ZASLAVSKY. « Facing up to arrangements : face-count formulas for partitions of space by hyperplanes ». In : *Mem. Amer. Math. Soc.* 1.issue 1, 154 (1975), p. vii+102.
- [Zel06] Andrei ZELEVINSKY. « Nested complexes and their polyhedral realizations ». English. In : *Pure Appl. Math. Q.* 2.3 (2006), p. 655-671. ISSN : 1558-8599. DOI : 10.4310/PAMQ.2006.v2.n3.a3.
- [ZM22] Maaïke ZWART et Dan MARSDEN. « No-go theorems for distributive laws ». In : *Log. Methods Comput. Sci.* 18.1 (2022), Paper No. 13, 61. ISSN : 1860-5974. DOI : 10.46298/lmcs-18(1:13)2022. URL : [https://doi.org/10.46298/lmcs-18\(1:13\)2022](https://doi.org/10.46298/lmcs-18(1:13)2022).

